

УДК 519.21

© *А. В. Беляев, Т. В. Рязанова***МЕТОД ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В АНАЛИЗЕ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ**

Работа посвящена применению метода функции стохастической чувствительности к аттракторам кусочно-гладкого одномерного отображения, описывающего динамику численности популяции. Первым этапом исследования является параметрический анализ возможных режимов детерминированной модели: определение зон существования устойчивых равновесий и хаотических аттракторов. Для определения параметрических границ хаотического аттрактора применяется теория критических точек. В случае, когда на систему оказывает влияние случайное воздействие, на основе техники функции стохастической чувствительности дается описание разброса случайных состояний вокруг равновесия и хаотического аттрактора. Проводится сравнительный анализ влияния параметрического и аддитивного шума на аттракторы системы. С помощью техники доверительных интервалов изучаются вероятностные механизмы вымирания популяции под действием шума. Анализируются изменения параметрических границ существования популяции под действием случайного возмущения.

Ключевые слова: кусочно-гладкие отображения, популяционная динамика, стохастическая чувствительность.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-04

Введение

Область научных исследований, связанная с моделированием и анализом различных систем взаимодействующих популяций, в последние годы привлекает внимание не только биологов, но и математиков. Интерес к данным моделям с математической точки зрения прежде всего связан с необходимостью их описания языком динамических систем. И здесь основная задача заключается в описании разнообразных бифуркаций и анализ устанавливающихся режимов как регулярных, так и хаотических. В работах [1–4] рассмотрены популяционные модели, демонстрирующие подобное поведение. Наряду с моделями, задаваемыми гладкими отображениями, большое внимание привлекают кусочно-гладкие отображения как с разрывами, так и без. В работах [5–7] описываются примеры моделей популяций такого типа.

Природа кусочно-гладких отображений приводит динамику описываемой модели к новым бифуркациям, не наблюдаемым в гладких системах, например, удвоение кусочности хаотического аттрактора и бифуркация столкновения с границей. Теория кусочно-гладких отображений в настоящее время широко развивается и, например, в работах [8–11] дается описание этих бифуркаций, а также инструментария, который представляется полезным в описании данных явлений.

В силу функционирования реальной живой системы в присутствии случайного возмущения динамика может не только существенно усложниться, но и продемонстрировать явления, которые не наблюдаются в детерминированных системах. Здесь важным является изучение воздействия шума с целью избежать нежелательных экологических сдвигов, вызванных случайными факторами. В задачах, объединяющих в себе нелинейность и стохастическую составляющую, хорошо зарекомендовал себя метод функции стохастической чувствительности, используемый для изучения отклика аттракторов на вносимый шум и описания стохастических феноменов, таких как индуцированные шумом переходы, возбудимость и вымирания. За последние годы этот метод не единожды применялся для одномерных отображений, задаваемых гладкими функциями [12–14]. А также в работах [15, 16] на примере модели нейронной активности Рутькова показано, что функция стохастической чувствительности и связанный с ней метод доверительных областей могут быть применены для кусочно-гладких отображений с целью описания феноменов, наблюдаемых в параметрических зонах регулярных аттракторов.

Целью данного исследования является объединение накопленного опыта обеих школ: с одной стороны описание бифуркаций кусочно-гладких отображений, а с другой — изучение отклика модели на вносимое случайное возмущение. В работе мы демонстрируем на примере одномерного отображения, что техника функции стохастической чувствительности также позволяет описывать разброс случайных состояний для кусочно-гладких отображений, подверженных случайному воздействию, и успешно применять метод доверительных областей (в данном случае интервалов) для описания индуцированного шумом вымирания. В статье основное внимание наравне с описанием чувствительности равновесия уделяется и чувствительности хаотического аттрактора. Найдены теоретические оценки критического уровня интенсивности вносимого шума, необходимого для вымирания популяции.

§ 1. Детерминированная модель

Мы рассматриваем модель, описывающую динамику численности популяции, которая задается кусочно-гладким отображением и представлена в работе [5]:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} \lambda x_n, & x_n < 1, \\ \lambda x_n^{1-b}, & x_n \geq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где x_n — численность популяции (исходя из биологического смысла $x_n \geq 0$), $\lambda > 0$ и $b > 0$ — бифуркационные параметры системы.

Данное отображение имеет два равновесия:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0, \\ \bar{x}_2 &= \lambda^{\frac{1}{b}}. \end{aligned}$$

Равновесие \bar{x}_1 существует при $\lambda > 0$, а равновесие \bar{x}_2 — при $\lambda \geq 1$. Характеристикой устойчивости равновесий для одномерных отображений является характеристический показатель $f'(\bar{x})$, который для устойчивого равновесия должен удовлетворять условию $|f'(\bar{x})| < 1$. Для равновесий уравнения (1) характеристические показатели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}_1) &= \lambda, \\ f'(\bar{x}_2) &= 1 - b. \end{aligned}$$

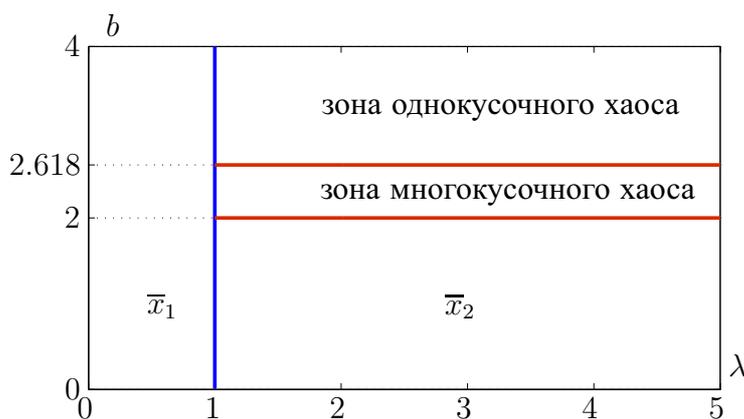


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1)

Таким образом, равновесие \bar{x}_1 устойчиво при $0 < \lambda < 1$ и $b > 0$, а равновесие \bar{x}_2 устойчиво при $\lambda > 1$ и $0 < b < 2$. На рисунке 1 представлена карта динамических режимов системы (1). На карте

показаны параметрические зоны существования устойчивых равновесий \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , зона однокусочного хаотического аттрактора, а также зона многокусочных хаотических аттракторов. При приближении параметра b к значению 2 сверху (если $\lambda > 1$), в системе наблюдается каскад бифуркаций удвоения кусочности хаотического аттрактора. Данная бифуркация свойственна кусочно-гладким отображениям и подробно описана, например, в работах [8–10].

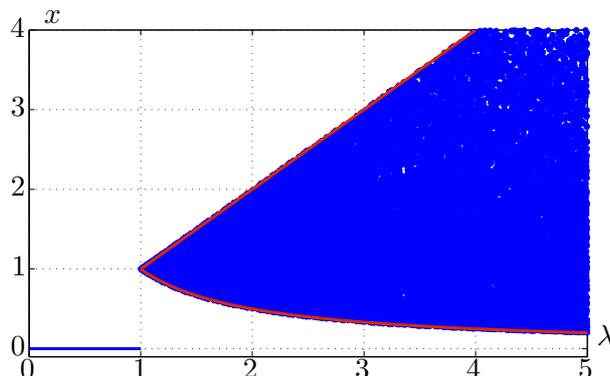


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма изменения численности популяции x в зависимости от параметра λ при $b = 3$

На рисунке 2 показана бифуркационная диаграмма изменения численности популяции x в зависимости от параметра λ при фиксированном значении параметра $b = 3$. Для $0 < \lambda < 1$ система всегда имеет единственный аттрактор — равновесие $\bar{x}_1 = 0$. Далее в точке бифуркации $\lambda = 1$ происходит рождение хаотического аттрактора, который наблюдается и при дальнейшем изменении параметра λ . При этом кусочность этого аттрактора не меняется, увеличивается только его размер. Красным цветом представлены линии $c = \lambda$ и $c_1 = \lambda^{2-b}$, описывающие границы хаотического аттрактора, полученные как $c = f(c_{-1})$ и $c_1 = f(c)$, где $c_{-1} = 1$ точка максимума функции $f(x)$ (см. [9]).

На рисунке 3 а) представлена бифуркационная диаграмма изменения численности популяции x в зависимости от параметра b при фиксированном значении параметра $\lambda = 2$. Для $0 < b < 2$ в системе существует одно устойчивое равновесие \bar{x}_2 . В зоне $2 < b < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ наблюдается каскад удвоения кусочности хаотического аттрактора. Аналогично рисунку 2 красным цветом изображены границы хаотического аттрактора: две внешние $c = \lambda$ и $c_1 = \lambda^{2-b}$ и две внутренние $c_2 = \lambda^{3-b}$ и $c_3 = \lambda^{(b-2)^2}$. На рисунках 3 б, в) показаны приближенные участки бифуркационной диаграммы так, что на рисунке 3 б) показана верхняя половина четырехкусочного хаотического аттрактора, а на рисунке 3 в) — верхняя четверть восьмикусочного хаотического аттрактора. Таким образом, в системе (1) наблюдаются самоподобные хаотические структуры.

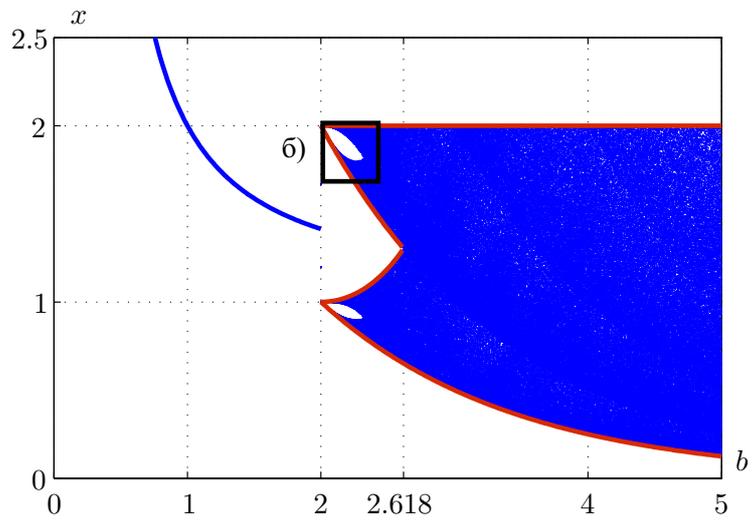
§ 2. Стохастическая модель

Далее рассмотрим стохастическую модель, описывающую влияние аддитивного ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$) или параметрического ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$) шума, являющихся неотъемлемой частью функционирования любой живой системы:

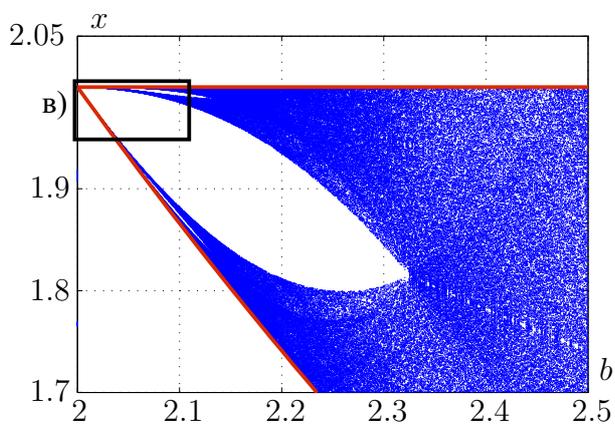
$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda x_n + \varepsilon_1 \sigma_1 \xi_n + \varepsilon_2 \sigma_2 x_n \xi_n, & x_n < 1, \\ \lambda x_n^{1-b} + \varepsilon_1 \sigma_1 \xi_n + \varepsilon_2 \sigma_2 x_n^{1-b} \xi_n, & x_n \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — интенсивность случайного воздействия и ξ_n — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $(0, 1)$. Далее предполагаем, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

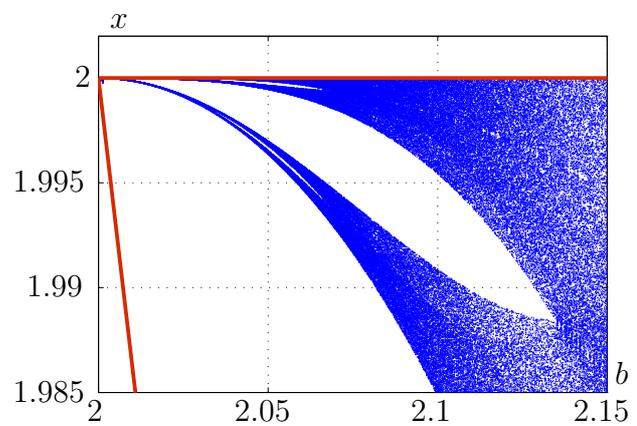
Под влиянием случайного воздействия состояния модели покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него пучок случайных состояний. На рисунке 4 изображены случайные со-



а)

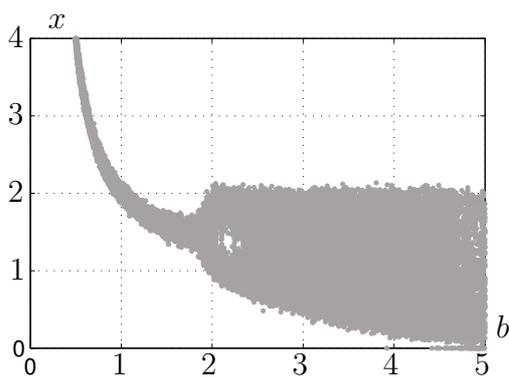


б)

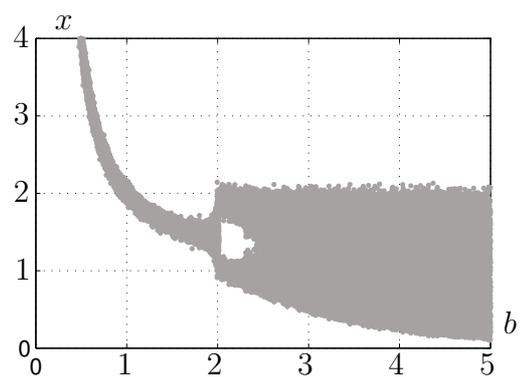


в)

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма изменения численности популяции x в зависимости от параметра b при $\lambda = 2$



а)



б)

Рис. 4. Случайные состояния модели (1) при $\lambda = 2$ и $\varepsilon = 0.05$: а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$; б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$

стояния¹ системы (2) под действием аддитивного шума (рисунок 4 а), то есть $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$) и параметрического шума (рисунок 4 б), то есть $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$) для одинаковой интенсивности. При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний увеличивается, а также границы между кусочками хаотического аттрактора размываются. Легко заметить, что распределение случайных состояний для аддитивного шума отличается от распределения состояний для параметрического шума при одинаковой интенсивности случайного возмущения.

Для аппроксимации вероятностного распределения случайных состояний вокруг равновесия и хаотического аттрактора в случае одномерных моделей можно использовать технику функций стохастической чувствительности (ФСЧ), разработанную и описанную с применением к ряду различных моделей в работах [17, 18].

У т в е р ж д е н и е 1. *Если равновесие \bar{x} является устойчивым, т.е. $|f'(\bar{x})| < 1$, тогда функция стохастической чувствительности w для этого равновесия может быть найдена по формуле:*

$$w = \frac{s(\bar{x})}{1 - (f'(\bar{x}))^2},$$

где $f(x)$ — функция, описывающая детерминированную динамику, а $s(x)$ — функция, описывающая вносимое случайное воздействие.²

Так как для равновесия \bar{x}_2 модели (2) $f'(\bar{x}_2) = 1 - b$, а также $s(\bar{x}_2) = 1$ для аддитивного шума и $s(\bar{x}_2) = \lambda^{\frac{2}{b}-2}$ для параметрического, то функция стохастической чувствительности имеет аналитический вид:

$$w^a = \frac{1}{1 - (1 - b)^2}, \quad w^p = \frac{\lambda^{\frac{2}{b}-2}}{1 - (1 - b)^2}. \quad (3)$$

Здесь и далее введены обозначения: w^a — стохастическая чувствительность в случае воздействия аддитивного шума и w^p — в случае параметрического. На рисунке 5 а) для $0 < b < 2$ представлены зависимости этих функций: w^a — красной сплошной линией, w^p — синей сплошной линией. Видно, что чувствительность равновесия выше к аддитивному шуму, чем к параметрическому.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если $A = [c, c_1]$ — однокусочный хаотический аттрактор, и функция $f(x)$ имеет на отрезке $[c, c_1]$ единственный максимум, тогда функции стохастической чувствительности $w(c)$ и $w(c_1)$ для границ этого хаотического аттрактора соответственно могут быть найдены по следующим формулам:*

$$\begin{aligned} w(c_1) &= (f'(f(c_{-1})))^2 s(c_{-1}) + s(f(c_{-1})), \\ w(c) &= s(c_{-1}), \end{aligned}$$

где c_{-1} — точка максимума функции $f(x)$, описывающей детерминированную динамику, а $s(x)$ — функция, описывающая вносимое случайное воздействие.³

Так как для модели (2) выполняются следующие равенства $c_{-1} = 1, c = f(c_{-1}) = \lambda, c_1 = f(c) = \lambda^{2-b}$ и $f'(c) = 1 - b$, а также $s(x) = 1$ для аддитивного шума, и $s(x) = x^{2-2b}$ для параметрического, то стохастическая чувствительность границ хаотического аттрактора может быть описана следующими формулами:

$$\begin{aligned} w^a(c_1) &= (1 - b)^2 \lambda^{2-2b} + 1, \\ w^p(c_1) &= (1 - b)^2 \lambda^{2-2b} + \lambda^{2-2b}, \\ w^a(c) &= w^p(c) = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

¹Здесь и далее для построения случайных состояний мы пропускаем 3000 итераций с начальной точки $x_0 = 1.2$ и строим 50 состояний.

²Доказательство данного утверждения приведено в работе [17].

³Доказательство данного утверждения приведено в работе [17]. В этой работе также приведены формулы для случая, когда функция $f(x)$ имеет минимум на отрезке, являющимся хаотическим аттрактором.

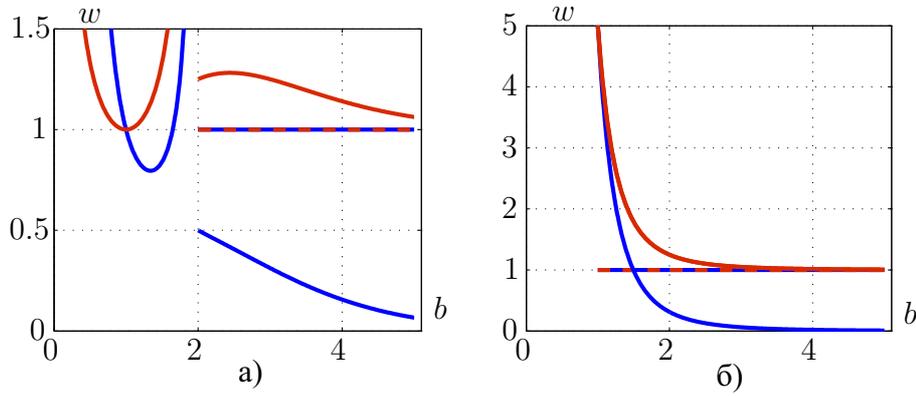


Рис. 5. Функция стохастической чувствительности для равновесия и границ хаотического аттрактора при: а) $\lambda = 2$; б) $b = 3$

На рисунке 5 а) для $b > 2$ и на рисунке 5 б) представлены зависимости этих функций: w^a — красной сплошной линией, w^p — синей сплошной линией. Аналогично случаю равновесия, чувствительность нижней границы хаотического аттрактора $c_1 = \lambda^{2-b}$ выше к аддитивному шуму, чем к параметрическому.

Используя функцию стохастической чувствительности, удобно описывать разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора. Для случайных состояний модели (2) можно построить интервалы рассеивания $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$ вокруг детерминированного равновесия или границы хаотического аттрактора, где

$$r = \varepsilon \sqrt{2w^*} \operatorname{erf}^{-1}(P),$$

и \bar{x} — равновесие или граница хаотического аттрактора, w^* — стохастическая чувствительность равновесия или границы хаотического аттрактора, найденные по формулам (3), (4), P — доверительная вероятность, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Доверительный интервал рассеивания описывает геометрическое место точек такое, что в нем с заданной доверительной вероятностью P лежат $P\%$ всех случайных состояний системы.

На рисунке 6 для двух значений доверительной вероятности $P = 0.9973$ (зеленая сплошная линия) и $P = 0.9545$ ⁴ (зеленая пунктирная линия) представлены полосы рассеивания для равновесия и границ хаотического аттрактора при $\lambda = 2$: случай 6 а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$, и случай 6 б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$. Серым цветом изображены случайные состояния системы для интенсивности $\varepsilon = 0.1$ соответствующего шума. Как можно заметить, полосы рассеивания хорошо описывают распределение случайных состояний стохастической модели.

На рисунке 7 для двух значений доверительной вероятности $P = 0.9973$ (зеленая сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зеленая пунктирная линия) представлены полосы рассеивания для границ хаотического аттрактора при $b = 3$: случай 7 а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$, и случай 7 б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$. Серым цветом изображены случайные состояния системы для интенсивности $\varepsilon = 0.1$ соответствующего шума. В обоих представленных примерах (рисунки 6, 7) наблюдается феномен вымирания популяции, когда значение ее численности в некоторый момент времени обращается в ноль. Данный феномен может быть описан в терминах доверительной вероятности с помощью функции стохастической чувствительности и метода доверительных областей. Пересечение доверительной полосы с «опасной» границей $x = 0$ для фиксированного значения интенсивности шума предсказывает вымирание популяции в этих условиях. На рисунках 6 а), 7 а) в обоих представленных случаях обнаруживаются три зоны с различной динамикой, реализуемой за рассматриваемое время:

⁴Стоит отметить, что значение доверительной вероятности равное $P = 0.9973$ соответствует правилу трех сигма, в то время как $P = 0.9545$ — правилу двух сигма.

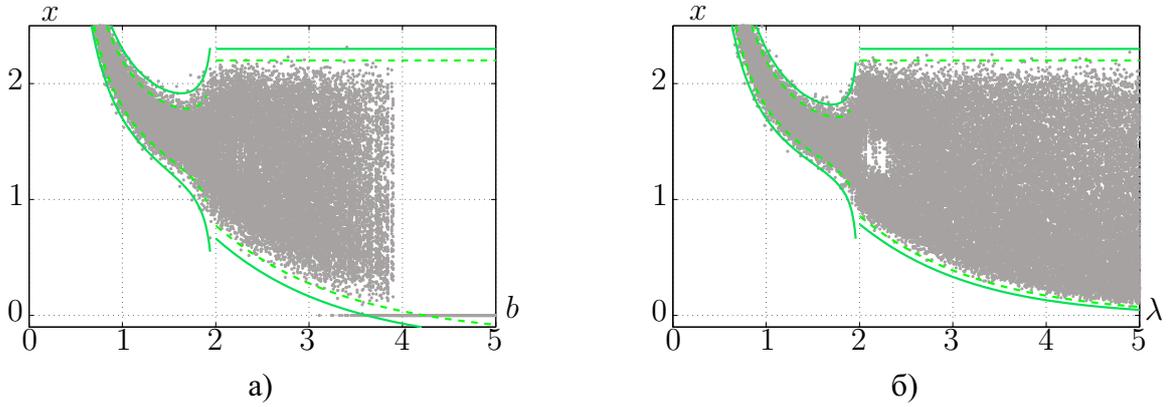


Рис. 6. Доверительные полосы (зеленый) и случайные состояния (серый) модели (2) при $\lambda = 2$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$. Здесь $P = 0.9973$ (зеленая сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зеленая пунктирная линия)

- *первая зона* — популяция не вымирает (примерные интервалы: $b < 3$ или $\lambda < 3$),
- *вторая зона* — популяция сначала существует, а затем вымирает (примерные интервалы: $3 < b < 4$ или $3 < \lambda < 4.7$),
- *третья зона* — ни одного представителя популяции не существует (примерные интервалы: $b > 4$ или $\lambda > 4.7$).

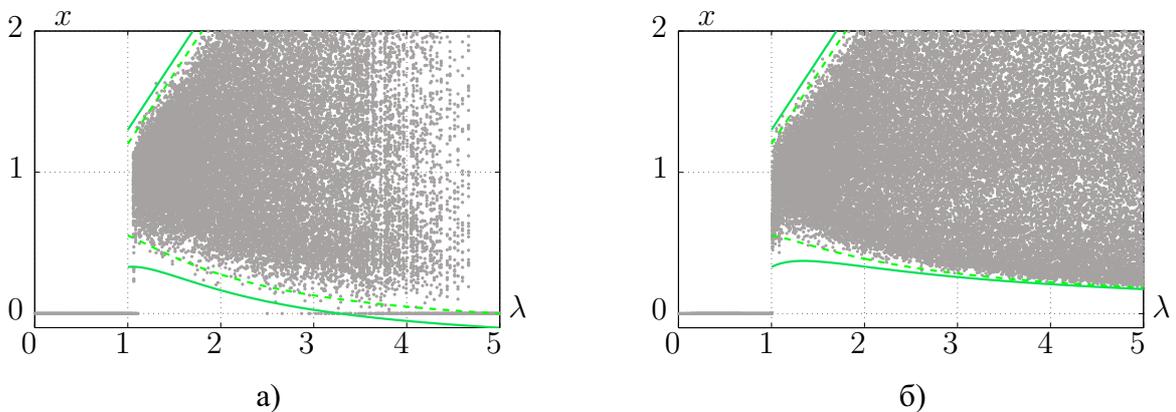


Рис. 7. Доверительные полосы (зеленый) и случайные состояния (серый) модели (2) при $b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$. Здесь $P = 0.9973$ (зеленая сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зеленая пунктирная линия)

На рисунке 8 этот феномен показан на временных рядах для $\lambda = 4, b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$. Хорошо видно, что под действием аддитивного шума случайная траектория в некий момент времени достигает «опасного» значения $x = 0$, и далее численность популяции равняется нулю (*вторая зона*). Для параметрического шума при том же значении интенсивности данный феномен не наблюдается. Сколько бы близко значение популяции не приближалось к «опасной» границе, вымирание не происходит. Данное поведение хорошо видно на рисунках 6, 7. Доверительная полоса для случая параметрического шума для заданной интенсивности не пересекает «опасную» границу $x = 0$. Стоит отметить, что данное сравнение производится в условии фиксированного и одинакового значения

интенсивности шума, вне зависимости от его вида. Другая ситуация наблюдается при изменении интенсивности случайного воздействия.

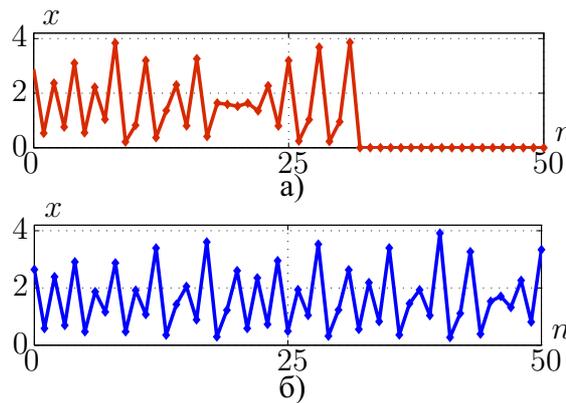


Рис. 8. Вымирание популяции: временные ряды при $\lambda = 4$, $b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$

Выше было показано, что индуцированное шумом вымирание зависит от двух основных внутренних факторов: во-первых, от чувствительности аттрактора модели к вносимому возмущению, и во-вторых, от удаленности этого аттрактора от «опасной» границы. Таким образом, имея аналитические представления равновесия $\bar{x}_2 = \lambda^{\frac{1}{b}}$ или нижней границы хаотического аттрактора $\bar{x} = \lambda^{2-b}$, соответствующие им значения чувствительности $w^* = w$ и $w^* = w(c_1)$, а также воспользовавшись для удобства вычислений правилом трех сигма, можно записать условие пересечения нижней границы полосы рассеивания с опасной границей $x = 0$ в виде $\bar{x} - 3\varepsilon\sqrt{w^*} = 0$. Отсюда легко выразить значение интенсивности шума ε такого, что при интенсивности шума выше, чем найденное в системе с доверительной вероятностью $P = 0.9973$, будет наблюдаться феномен вымирания. Данное значение интенсивности шума будем называть критической интенсивностью, и формулы для ее вычисления следующие:

- $\varepsilon^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{b}}}{3\sqrt{w}}$ для равновесия;
- $\varepsilon^* = \frac{\lambda^{2-b}}{3\sqrt{w(c_1)}}$ для нижней границы хаотического аттрактора.

На рис. 9 изображена критическая интенсивность ε^* случайного воздействия, больше которой для заданных значений параметров λ и b в системе будет наблюдаться вымирание популяции. Красным цветом представлен случай аддитивного шума, а синим — параметрического. Как легко заметить, для возникновения вымирания популяции под действием параметрического шума требуется интенсивность выше, чем для случая аддитивного шума.

На рис. 10 феномен вымирания популяции под действием параметрического шума показан на временных рядах для $\lambda = 2$, $b = 3$ при $\varepsilon = 0.5$ и для $\lambda = 2$, $b = 1$ при $\varepsilon = 0.8$. Как и предсказывалось выше, при достаточно большой интенсивности шума вымирание наблюдается и в случае воздействия на систему параметрического шума.

Таким образом, в работе изучено влияние случайного возмущения двух типов (аддитивный и параметрический шум) на одномерную кусочно-гладкую модель, описывающую динамику численности одной популяции. Впервые метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ) и техника доверительных областей использованы для описания хаотического аттрактора стохастической модели популяционной динамики, описываемой кусочно-гладким отображением. Результаты показывают, что техника ФСЧ применима и для этого класса отображений, активно изучаемых в настоящее время.

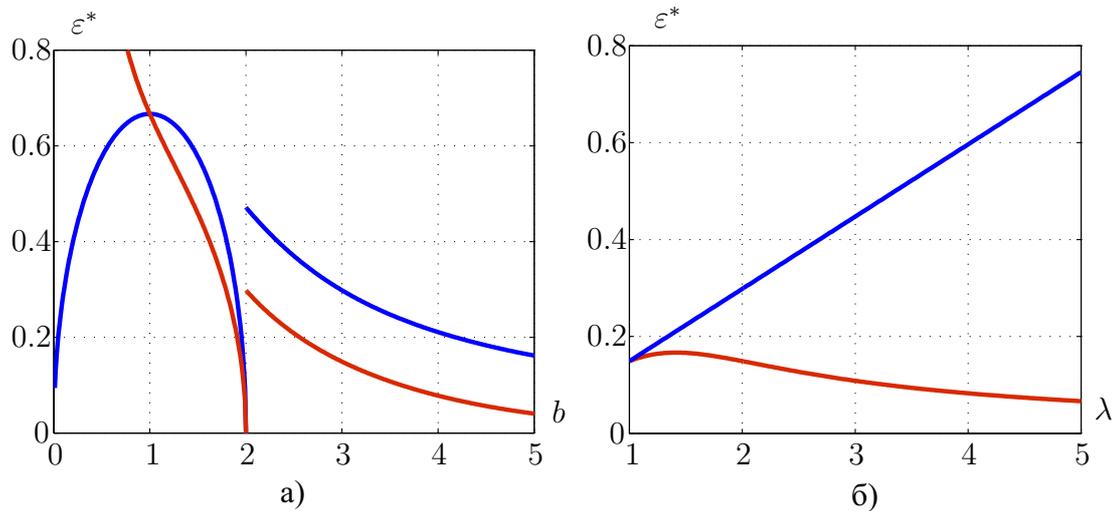


Рис. 9. Критическая интенсивность шума при: а) $\lambda = 2$; б) $b = 3$. Здесь красные линии соответствуют аддитивному шуму, синие — параметрическому

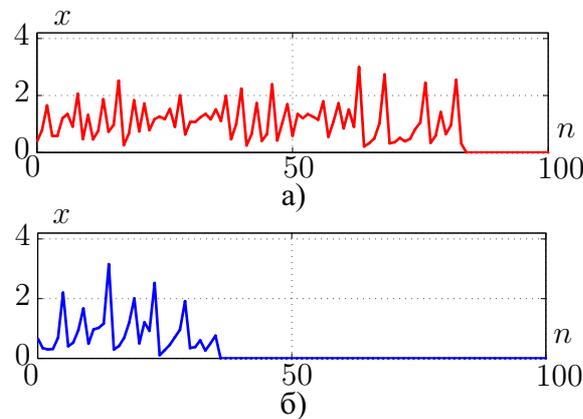


Рис. 10. Вымирание популяции: временные ряды для параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ при: а) $\lambda = 2$, $b = 3$ и $\varepsilon = 0.5$; б) $\lambda = 2$, $b = 1$ и $\varepsilon = 0.8$

Финансирование. Исследование проведено при поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10098).

Список литературы

1. Turchin P. Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis. Princeton University Press, 2003. <https://doi.org/10.1515/9781400847280>
2. Lande R., Engen S., Saether B.-E. Stochastic population dynamics in ecology and conservation. Oxford University Press, 2003. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525257.001.0001>
3. Chesson P. Stochastic population models // Ecological Heterogeneity. Ecological Studies (Analysis and Synthesis). New York: Springer, 1991. Vol. 86. P. 123–143. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3062-5_7
4. Gadrich T., Katriel G. A mechanistic stochastic Ricker model: analytical and numerical investigations // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. No. 4. 1650067. <https://doi.org/10.1142/S021812741650067X>

5. May R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*. 1976. Vol. 261. No. 5560. P. 459–467. <https://doi.org/10.1038/261459a0>
6. Murray J.D. *Discrete population models for a single species* // *Interdisciplinary Applied Mathematics*. New York: Springer, 1993. P. 44–78. https://doi.org/10.1007/978-0-387-22437-4_2
7. Higgins R.J., Kent C.M., Kocic V.L., Kostrov Y. Dynamics of a nonlinear discrete population model with jumps // *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. 2015. Vol. 9. No. 2. P. 245–270. <https://doi.org/10.2298/AADM150930019H>
8. Avrutin V., Sushko I. A gallery of bifurcation scenarios in piecewise smooth 1d map // *Global Analysis of Dynamic Models in Economics and Finance*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2012. P. 369–395. https://doi.org/10.1007/978-3-642-29503-4_14
9. Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2016. Vol. 22. No. 12. P. 1816–1870. <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426>
10. Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I. Bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional piecewise smooth maps // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24. No. 8. 1440012. <https://doi.org/10.1142/S0218127414400124>
11. Laurea M.B., Champneys A.R., Budd C.J., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth dynamical systems*. London: Springer, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
12. Bashkirtseva I. Crises, noise, and tipping in the Hassell population model // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2018. Vol. 28. No. 3. 033603. <https://doi.org/10.1063/1.4990007>
13. Bashkirtseva I. Preventing noise-induced extinction in discrete population models // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2017. Vol. 2017. P. 1–10. <https://doi.org/10.1155/2017/9610609>
14. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced order-chaos transitions in discrete-time systems with tangent and crisis bifurcations // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017. Vol. 467. P. 573–584. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.09.048>
15. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. Vol. 63. P. 261–270. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.03.015>
16. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2018. Vol. 110. P. 76–81. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.03.011>
17. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise // *Physics Letters A*. 2017. Vol. 381. No. 37. P. 3203–3210. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.017>
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Approximating chaotic attractors by period-three cycles in discrete stochastic systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2015. Vol. 25. No. 10. 1550138. <https://doi.org/10.1142/S0218127415501382>

Поступила в редакцию 04.04.2019

Беляев Александр Владимирович, студент, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: belyaev.alexander1337@yandex.ru

Рязанова Татьяна Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической и математической физики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: tatyana.ryazanova@urfu.ru

A. V. Belyaev, T. V. Ryazanova

The stochastic sensitivity function method in analysis of the piecewise-smooth model of population dynamics

Citation: *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Univivertiteta*, 2019, vol. 53, pp. 36–47 (in Russian).

Keywords: piecewise-smooth map, population dynamics, stochastic sensitivity.

MSC2010: 39A50

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-04

This work is devoted to the application of the stochastic sensitivity function method to attractors of a piecewise-smooth one-dimensional map describing the dynamics of the population size. The first stage of the study is a parametric analysis of possible modes of the deterministic model: the definition of zones of existence of stable equilibria and chaotic attractors. The theory of critical points is used to determine the parametric boundaries of a chaotic attractor. In the case where the system is influenced by a random effect, based on the technique of the stochastic sensitivity function, a description of the spread of random states around the equilibrium and chaotic attractor is carried out. A comparative analysis of the influence of parametric and additive noise on the attractors of the system is conducted. Using the technique of confidence intervals, probabilistic mechanisms of extinction of a population under the influence of random disturbances are studied. Changes in the parametric boundaries of the existence of a population under the impact of a random perturbation are analyzed.

Funding. The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16–11–10098).

REFERENCES

1. Turchin P. *Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis*, Princeton University Press, 2003. <https://doi.org/10.1515/9781400847280>
2. Lande R., Engen S., Saether B.-E. *Stochastic population dynamics in ecology and conservation*, Oxford University Press, 2003. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525257.001.0001>
3. Chesson P. Stochastic population models, *Ecological Heterogeneity. Ecological Studies (Analysis and Synthesis)*, New York: Springer, 1991, vol. 86, pp. 123–143. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3062-5_7
4. Gadrach T., Katriel G. A mechanistic stochastic Ricker model: analytical and numerical investigations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 4, 1650067. <https://doi.org/10.1142/S021812741650067X>
5. May R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 1976, vol. 261, no. 5560, pp. 459–467. <https://doi.org/10.1038/261459a0>
6. Murray J.D. Discrete population models for a single species, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, New York: Springer, 1993, pp. 44–78. https://doi.org/10.1007/978-0-387-22437-4_2
7. Higgins R.J., Kent C.M., Kocic V.L., Kostrov Y. Dynamics of a nonlinear discrete population model with jumps, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 245–270. <https://doi.org/10.2298/AADM150930019H>
8. Avrutin V., Sushko I. A gallery of bifurcation scenarios in piecewise smooth 1d map, *Global Analysis of Dynamic Models in Economics and Finance*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2012, pp. 369–395. https://doi.org/10.1007/978-3-642-29503-4_14
9. Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 1816–1870. <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426>
10. Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I. Bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional piecewise smooth maps, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 8, 1440012. <https://doi.org/10.1142/S0218127414400124>
11. Laurea M.B., Champneys A.R., Budd C.J., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth dynamical systems*, London: Springer, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
12. Bashkirtseva I. Crises, noise, and tipping in the Hassell population model, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, vol. 28, no. 3, 033603. <https://doi.org/10.1063/1.4990007>
13. Bashkirtseva I. Preventing noise-induced extinction in discrete population models, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2017, vol. 2017, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1155/2017/9610609>
14. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced order-chaos transitions in discrete-time systems with tangent and crisis bifurcations, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, vol. 467, pp. 573–584. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.09.048>

15. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 63, pp. 261–270. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.03.015>
16. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018, vol. 110, pp. 76–81. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.03.011>
17. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise, *Physics Letters A.*, 2017, vol. 381, no. 37, pp. 3203–3210. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.017>
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Approximating chaotic attractors by period-three cycles in discrete stochastic systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 10, 1550138. <https://doi.org/10.1142/S0218127415501382>

Received 04.04.2019

Belyaev Aleksandr Vladimirovich, Student, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: belyaev.alexander1337@yandex.ru

Ryazanova Tat'yana Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical and Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: tatyana.ryazanova@urfu.ru