

УДК 621.31

© В. В. Зиновьев, А. П. Бельтюков, О. А. Бартенев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ W -ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА

В статье рассматривается модель солнечного фотоэлектрического преобразователя как единичного источника. Используется W -функция Ламберта для получения параметров солнечного элемента. Показывается универсальность такого подхода.

Ключевые слова: солнечная энергетика, модель солнечного элемента, W -функция Ламберта.

Введение

В настоящее время развивается солнечная энергетика, использующая фотоэлектрические преобразователи. Фотоэлектрический преобразователь (ФЭП) позволяет превращать энергию оптического излучения непосредственно в электроэнергию, минуя стадии тепловой и механической форм энергии. Работа ФЭП основана на явлении внутреннего фотоэффекта в полупроводниковой структуре с р-п-переходом.

Когда ФЭП облучается солнечным светом, он ведет себя в базовом режиме как источник тока в соответствии со своей вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Реперными точками ВАХ (рис. 1) являются точка холостого хода, которая характеризуется напряжением холостого хода (U_{xx}) при токе, равном нулю, точка короткого замыкания, которая характеризуется током короткого замыкания ($I_{кз}$) при напряжении, равном нулю, и точка, в которой мощность ФЭП максимальна ($U_{мм}$, $I_{мм}$). Эти четыре основных параметра (U_{xx} , $I_{кз}$, $U_{мм}$ и $I_{мм}$) позволяют описать вольт-амперную характеристику ФЭП и могут использоваться для моделирования выходных электрических параметров.

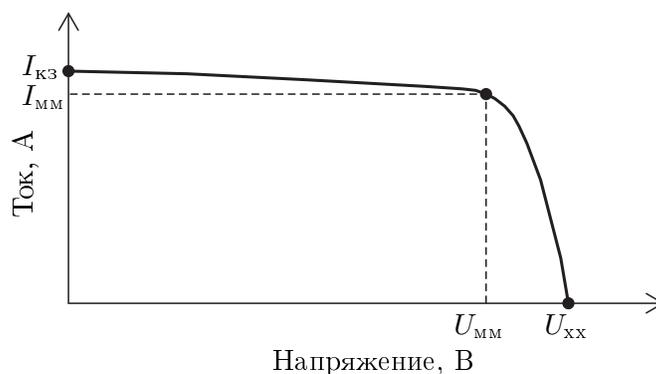


Рис. 1. Типичная вольт-амперная характеристика ФЭП

Вольт-амперную характеристику ФЭП экспериментально получают на заводе-изготовителе. Для изучения ФЭП при различных режимах работы необходимо иметь модель ФЭП — аналитическое соотношение между электрическими параметрами ФЭП и внешними условиями (интенсивность солнечного излучения, температура и т. п.).

Цель данной работы — показать универсальный метод, который позволял бы достаточно точно определять ряд электрических характеристик ФЭП.

Существует несколько методов для моделирования параметров ФЭП: метод касательных Ньютона, метод Гаусса–Зейделя, использование W -функции Ламберта, PSpice-моделирование.

В работе представлена математическая модель фотоэлектрического преобразователя с учетом влияния внешних факторов: энергетической освещенности и температуры. Модель основывается на использовании W -функции Ламберта. Этот метод отличается универсальностью и точностью для определения электрических параметров ФЭП.

§ 1. Модель ФЭП

Модель отражает взаимоотношения четырех экспериментально измеряемых переменных ФЭП: ток (I_n), напряжение (U_n), энергетическая освещенность (E) и температура элемента (T).

ФЭП можно представить в виде эквивалентной электрической схемы замещения на рис. 2 (однодиодная модель или 5-параметрическая модель). Существуют также многодиодные модели [1]. Однодиодная модель отличается простотой и достаточно точно описывает характеристики ФЭП для большинства применений.

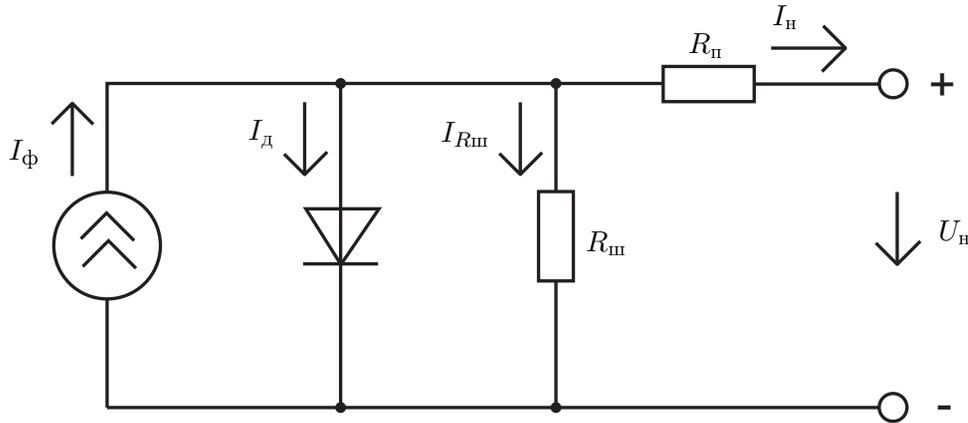


Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема замещения ФЭП

По закону Кирхгофа, соотношение токов в цепи имеет вид

$$I_n = I_\phi - I_d - I_{R_{ш}}.$$

Рассматривая диод как идеальный, можно записать для однодиодной модели следующее уравнение, определяющее связь действующих тока и напряжения:

$$I_n = I_\phi - I_{он} \left(\exp \left(\frac{e \cdot (U_n + I_n R_{п})}{A \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{U_{R_{ш}}}{R_{ш}}, \quad (1)$$

где I_n — ток нагрузки, А;

U_n — напряжение нагрузки, В;

I_ϕ — фототок (ток, произведенный фотогальваническим эффектом), А;

$I_{он}$ — обратный ток насыщения, А;

e — заряд электрона ($e = 1,602177 \cdot 10^{-19}$ Кл);

A — фактор идеальности р-п-перехода ($A = 1 \dots 5$);

k — постоянная Больцмана ($k = 1,380649 \cdot 10^{-23}$ Дж/К);

T — абсолютная температура, К;

$R_{п}$ и $R_{ш}$ — последовательное и параллельное (шунтовое) сопротивление, Ом.

С учетом термического напряжения

$$U_T = \frac{k \cdot T}{e}$$

уравнение (1) примет вид

$$I_n = I_\phi - I_{он} \left(\exp \left(\frac{U_n + I_n R_{п}}{A \cdot U_T} \right) - 1 \right) - \frac{U_n + I_n R_{п}}{R_{ш}}. \quad (2)$$

Модельные параметры $I_{он}$, $R_{п}$ и $R_{ш}$ можно рассчитать на основе паспортных данных солнечного элемента (модуля). Фототок I_ϕ рассчитывается исходя из освещенности и температуры.

Ток $I_{\text{оН}}$ зависит от температуры и определяется по формуле [2]

$$I_{\text{оН}} = \frac{I_{\text{кз}} + k_{\text{Икз}}(T - T_0)}{\exp\left(\frac{U_{\text{хх}} + k_{\text{Uхх}}(T - T_0)}{A \cdot U_{\text{T}}}\right) - 1}, \quad (3)$$

где $I_{\text{кз}}$ — ток короткого замыкания, А;

$U_{\text{хх}}$ — напряжение холостого хода, В;

$k_{\text{Икз}}$ и $k_{\text{Uхх}}$ — температурные коэффициенты тока короткого замыкания и напряжения холостого хода соответственно, А/К и В/К;

T_0 — абсолютная температура при стандартных условиях ($T_0 = 298$ К).

Параметры $I_{\text{кз}}$, $U_{\text{хх}}$, $k_{\text{Икз}}$ и $k_{\text{Uхх}}$ указаны в паспорте на солнечный модуль.

Фототок прямо пропорционален освещенности и увеличивается с ростом температуры солнечного элемента [2]:

$$I_{\text{ф}} = \frac{E}{E_0}(I_{\text{кз}} + k_{\text{Икз}}(T - T_0)), \quad (4)$$

где E — энергетическая освещенность, Вт/м²;

E_0 — энергетическая освещенность при стандартных условиях ($E_0 = 1000$ Вт/м²).

Параметры $R_{\text{п}}$ и $R_{\text{ш}}$ можно определить численным методом, например по методике, приведенной в [2]. Метод основан на последовательном приближении значений $R_{\text{п}}$ и $R_{\text{ш}}$ к оптимальным, при которых совпадают три характерные точки ФЭП (холостого хода, короткого замыкания и максимальной мощности) модельной вольт-амперной характеристики и паспортной.

Трансцендентные уравнения типа (1) решаются с использованием численных методов. Существует множество различных численных методов с разной точностью и трудоемкостью. Далее будет приведен способ решения уравнений такого типа с использованием W -функции Ламберта.

§ 2. Моделирование параметров солнечного элемента с использованием W -функции Ламберта

Уравнение (2) можно записать для трех характерных точек ВАХ:

- точка короткого замыкания:

$$I_{\text{кз}} = I_{\text{ф}} - I_{\text{оН}} \left(\exp\left(\frac{I_{\text{кз}} R_{\text{п}}}{A U_{\text{T}}}\right) - 1 \right) - \frac{I_{\text{кз}} R_{\text{п}}}{R_{\text{ш}}}; \quad (5)$$

- точка холостого хода:

$$0 = I_{\text{ф}} - I_{\text{оН}} \left(\exp\left(\frac{U_{\text{хх}}}{A U_{\text{T}}}\right) - 1 \right) - \frac{U_{\text{хх}}}{R_{\text{ш}}}; \quad (6)$$

- точка максимальной мощности:

$$I_{\text{мм}} = I_{\text{ф}} - I_{\text{оН}} \left(\exp\left(\frac{U_{\text{мм}} + I_{\text{мм}} R_{\text{п}}}{A U_{\text{T}}}\right) - 1 \right) - \frac{U_{\text{мм}} + I_{\text{мм}} R_{\text{п}}}{R_{\text{ш}}}. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что производная мощности ФЭП в точке максимальной мощности равна нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial U} = U \frac{\partial I}{\partial U} + I = 0,$$

получаем следующее равенство:

$$-\frac{I_{\text{мм}}}{U_{\text{мм}}} = -\frac{I_{\text{оН}}}{A U_{\text{T}}} \left(1 - \frac{I_{\text{мм}}}{U_{\text{мм}}} R_{\text{п}} \right) \exp\left(\frac{U_{\text{мм}} + I_{\text{мм}} R_{\text{п}}}{A U_{\text{T}}}\right) - \frac{1}{R_{\text{ш}}} \left(1 - \frac{I_{\text{мм}}}{U_{\text{мм}}} R_{\text{п}} \right). \quad (8)$$

Уравнения (5)–(8) представляют собой систему с четырьмя неизвестными, две из которых (R_{Π} и $R_{\text{ш}}$) находятся в составе эквивалентной схемы замещения. Необходимо вывести уравнения для сопротивлений R_{Π} и $R_{\text{ш}}$. Для этого проведем ряд преобразований. Результатом будут следующие уравнения:

- уравнение для R_{Π} , которое определяется только паспортными данными ФЭП:

$$\frac{AU_{\text{T}}U_{\text{MM}}(2I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}{(U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}}))(U_{\text{MM}} - I_{\text{MM}}R_{\Pi}) - AU_{\text{T}}(U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}})} = \exp\left(\frac{U_{\text{MM}} + I_{\text{MM}}R_{\Pi} - U_{\text{XX}}}{AU_{\text{T}}}\right); \quad (9)$$

- уравнение для определения $R_{\text{ш}}$ с учетом рассчитанного сопротивления R_{Π} запишется в виде

$$R_{\text{ш}} = \frac{(U_{\text{MM}} - I_{\text{MM}}R_{\Pi})(U_{\text{MM}} - R_{\Pi}(I_{\text{K3}} - I_{\text{MM}}) - AU_{\text{T}})}{(U_{\text{MM}} - I_{\text{MM}}R_{\Pi})(I_{\text{K3}} - I_{\text{MM}}) - AU_{\text{T}}I_{\text{MM}}}. \quad (10)$$

Уравнение (9) представлено в неявной форме относительно R_{Π} . Такое уравнение можно записать в форме, удобной для дальнейшего введения W -функции Ламберта.

Согласно [3] W -функция Ламберта определяется как

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

где x — комплексное число.

W -функция Ламберта есть функция, обратная к функции $W = xe^x$. W -функция не является ни четной, ни нечетной функцией. Она определена на интервале $(-1/e, \infty)$, где принимает значения от $-\infty$ до ∞ , причем для отрицательных x функция двузначна. Точка с координатами $(-1/e, -1)$ делит график функции $W(x)$ на две ветви: верхнюю $W_0(x)$, называемую основной, и нижнюю $W_{-1}(x)$.

Для преобразования экспоненциальных трансцендентных уравнений используется следующее соотношение:

$$Ye^Y = X \Leftrightarrow Y = W(X). \quad (11)$$

Уравнение (9) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{U_{\text{MM}}(2I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})} \exp\left(-\frac{2U_{\text{MM}} - U_{\text{XX}}}{A \cdot U_{\text{T}}} + \frac{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}}}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}\right) = \\ & = \left(\frac{I_{\text{MM}}R_{\Pi} - U_{\text{MM}}}{A \cdot U_{\text{T}}} + \frac{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}}}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}\right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{I_{\text{MM}}R_{\Pi} - U_{\text{MM}}}{A \cdot U_{\text{T}}} + \frac{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}}}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, используя соотношение (11), уравнение (12) преобразуем к виду, содержащему W -функцию Ламберта:

$$\begin{aligned} & \frac{I_{\text{MM}}R_{\Pi} - U_{\text{MM}}}{A \cdot U_{\text{T}}} + \frac{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}}}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})} = \\ & = W_{-1}\left(-\frac{U_{\text{MM}}(2I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})} \exp\left(-\frac{2U_{\text{MM}} - U_{\text{XX}}}{A \cdot U_{\text{T}}} + \frac{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} - U_{\text{XX}}I_{\text{MM}}}{U_{\text{MM}}I_{\text{K3}} + U_{\text{XX}}(I_{\text{MM}} - I_{\text{K3}})}\right)\right), \end{aligned} \quad (13)$$

где W_{-1} — отрицательная ветвь W -функции Ламберта, так как левая часть уравнения (13) меньше -1 для типовых ФЭП.

Таким образом, явная форма уравнения для последовательного сопротивления R_{Π} ФЭП представляется в следующем виде:

$$R_{\Pi} = a(W_{-1}(b \cdot \exp(c)) - (d + c)), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \frac{A \cdot U_T}{I_{MM}}; \\
b &= -\frac{U_{MM}(2I_{MM} - I_{K3})}{U_{MM}I_{K3} + U_{XX}(I_{MM} - I_{K3})}; \\
c &= -\frac{2U_{MM} - U_{XX}}{A \cdot U_T} + \frac{U_{MM}I_{K3} - U_{XX}I_{MM}}{U_{MM}I_{K3} + U_{XX}(I_{MM} - I_{K3})}; \\
d &= \frac{U_{MM} - U_{XX}}{A \cdot U_T}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Точное аналитическое решение уравнения (1) в виде $U_n = f(I_n)$ можно также вывести, используя W -функцию Ламберта.

Для этого производится ряд преобразований. Умножив обе части уравнения (1) на

$$\frac{R_{ш}}{A \cdot U_T}$$

и введя следующую замену:

$$\beta = -I_n \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} + I_{\Phi} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} + I_{OH} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} - U_n \frac{1}{A \cdot U_T}, \tag{16}$$

получим:

$$\beta = I_{OH} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} \exp \left(U_n \frac{1}{A \cdot U_T} + I_n \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} \right). \tag{17}$$

Чтобы использовать W -функцию Ламберта, необходимо привести уравнение (17) к виду $\beta \exp(\beta) = f(\beta)$. Для этого умножим обе части уравнения (17) на экспоненту от правой части равенства (16). После упрощения получим:

$$\beta \exp(\beta) = I_{OH} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} \exp \left(\frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} (-I_n + I_{\Phi} + I_{OH}) \right). \tag{18}$$

Решение (18) можно записать в виде, содержащем W -функцию Ламберта:

$$\beta = W \left(I_{OH} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} \exp \left(\frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} (-I_n + I_{\Phi} + I_{OH}) \right) \right). \tag{19}$$

Далее вводится обратная замена (16) вместо β в (19). После дальнейшего упрощения и выражения U_n получим результирующую формулу для нахождения напряжения ФЭП в зависимости от тока I_n :

$$U_n = -A \cdot U_T \cdot W \left(I_{OH} \frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} \exp \left(\frac{R_{ш}}{A \cdot U_T} (-I_n + I_{\Phi} + I_{OH}) \right) \right) - I_n (R_n + R_{ш}) + R_{ш} (I_{\Phi} + I_{OH}). \tag{20}$$

Подобным образом можно выразить ток как функцию от напряжения $I_n = f(U_n)$. Для этого обе части уравнения (1) умножаются на

$$\frac{R_n}{A \cdot U_T \cdot r_1},$$

где

$$r_1 = 1 + \frac{R_n}{R_{ш}}.$$

После дальнейших преобразований и применения W -функции Ламберта получим следующую формулу:

$$I_n = -\frac{A \cdot U_T}{R_n} W \left(I_{OH} \frac{R_n}{A \cdot U_T \cdot r_1} \exp \left(\frac{U_n + R_n (I_{\Phi} + I_{OH})}{A \cdot U_T \cdot r_1} \right) \right) + \frac{I_{\Phi} + I_{OH} - \frac{U_n}{R_{ш}}}{r_1}.$$

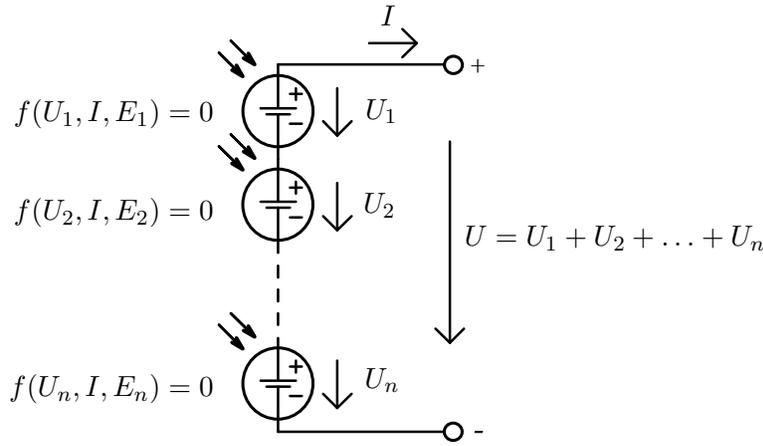


Рис. 3. Последовательное соединение фотоэлементов

§ 3. Модель последовательного соединения солнечных элементов

Для солнечных энергоустановок используются модули, представляющие собой электрические соединения отдельных элементов. Последовательное соединение из n солнечных элементов показано на рис. 3.

Можно записать систему из n нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f(U_1, I, E_1) = 0, \\ f(U_2, I, E_2) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f(U_n, I, E_n) = 0. \end{cases}$$

Или

$$[f(U_i, I, E_i)] = [0].$$

Ток в цепи может меняться от 0 до максимального значения I_{\max} , которое равно току короткого замыкания ($I_{\text{кз}}$) при максимальной энергетической освещенности. Вектор тока, состоящий из дискретных значений с шагом ΔI , можно записать так:

$$[I(k)] = [0, \Delta I, 2\Delta I, \dots, k\Delta I, \dots, I_{\max}].$$

Каждому значению I_k соответствует значение U_i — напряжение i -го солнечного элемента, которое определяется по формуле (20).

Поскольку в последовательном соединении n солнечных элементов, то каждому I_k будет соответствовать n напряжений U_i элементов, находящихся при соответствующих освещенностях E_i . Результирующее напряжение последовательного соединения складывается из напряжений отдельных элементов:

$$U(k) = \sum_{i=1}^k U_i(k).$$

Таким образом, модель последовательного соединения солнечных элементов описывается двумя векторами:

$$\begin{aligned} [I_k] &= [I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_K], \\ [U_k] &= [U_1, U_2, \dots, U_k, \dots, U_K]. \end{aligned}$$

На основе этого можно составить эквивалентную электрическую схему и ВАХ всего модуля и изучать его характеристики, используя W -функцию Ламберта.

§ 4. Моделирование параметров солнечного модуля

Для примера выбран солнечный модуль KC200G японской фирмы Куосега мощностью 200 Вт, параметры которого приведены в таблице 1. Модуль состоит из 54 последовательно соединенных элементов. Электрические параметры схемы замещения для модуля приведены в таблице 2. Токи $I_{он}$ и $I_{ф}$ рассчитаны по формулам (3) и (4) соответственно. Сопротивления $R_{п}$ и $R_{ш}$ по формулам (14), (15) и (10). Параметр A для кремниевых поликристаллических солнечных элементов принимается равным 1,3.

Таблица 1. Паспортные параметры солнечного модуля KC200G при 25°, AM1,5, 1000 Вт/м²

$I_{мм}$	7,61 А
$U_{мм}$	26,3 В
$P_{макс}$	200,143 Вт
$U_{хх}$	32,9 В
$I_{кз}$	8,21 А
$K_{ц}$	-0,1230 В/К
K_{i}	0,0032 А/К
$N_{элемент}$	54

Таблица 2. Расчетные параметры модели KC200G при стандартных условиях

$I_{он}$	$9,825 \cdot 10^{-8}$ А
$I_{ф}$	8,214 А
$R_{ш}$	415,405 Ом
$R_{п}$	0,221 Ом

В целях сравнения на языке программирования Python была написана программа для решения уравнения (2) численным методом Ньютона (метод касательных). Для четырех уровней освещенности были вычислены координаты точек вольт-амперной характеристики модуля. Результаты приведены на рис. 4.

На рис. 5 приведены ВАХ, рассчитанные с использованием W -функции Ламберта по формуле (20). Расчеты проводились в свободной системе компьютерной алгебры Maxima.

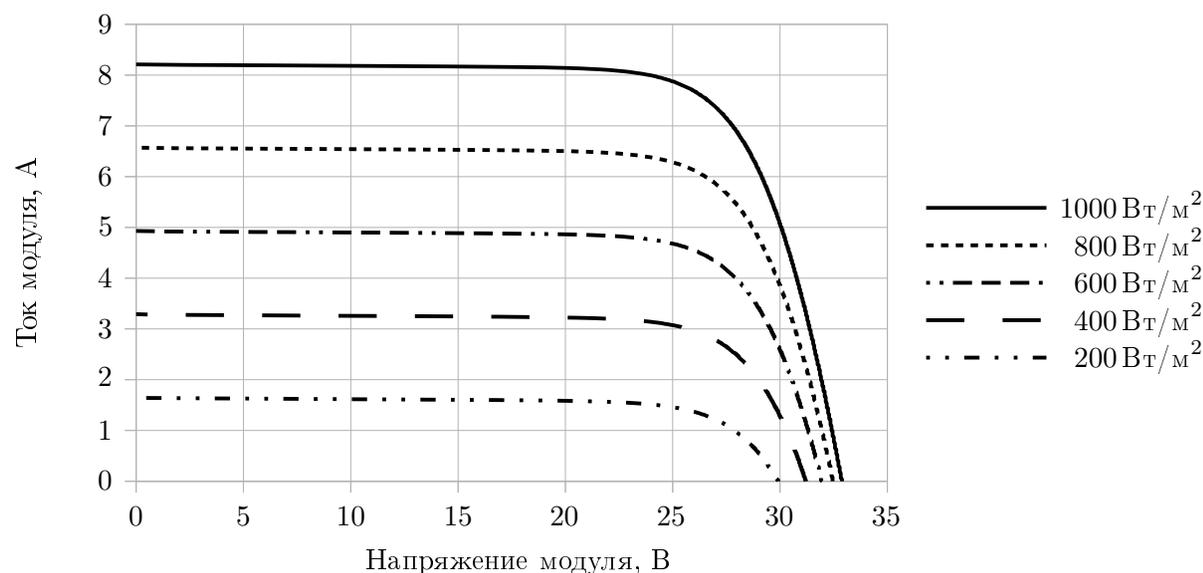


Рис. 4. ВАХ модуля KC200G при различных освещенностях, построенная методом Ньютона

Заключение

В данной работе было показано использование W -функции Ламберта для определения параметров ФЭП. Получены уравнения для построения вольт-амперных характеристик солнечного модуля в двух формах: $U_{п} = f(I_{п})$ и $I_{п} = f(U_{п})$; получены уравнения для вычисления сопротивлений $R_{п}$ и $R_{ш}$. При этом в расчетных формулах используются только паспортные

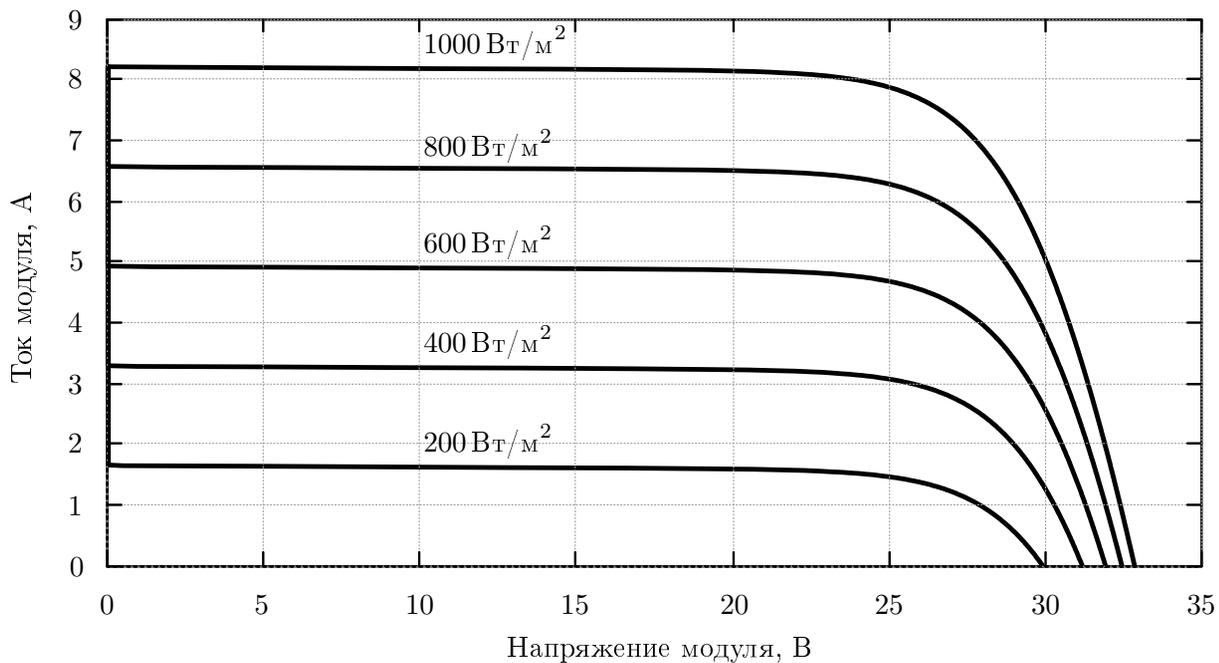


Рис. 5. ВАХ модуля KC200G при различных освещенностях, построенная с использованием W -функции Ламберта

данные солнечного модуля. Использование W -функции Ламберта дает универсальный метод для получения электрических параметров любых солнечных модулей.

Сравнение результатов по методу Ньютона (рис. 4) и с использованием W -функции Ламберта (рис. 5) показало их совпадение с достаточной точностью. Причем метод Ньютона является численным итерационным, дающим результат с определенной заданной точностью, а при использовании W -функции Ламберта получаются готовые формулы в явной форме для вычисления искомых значений.

Список литературы

1. Quaschnig V., Hanitsch R. Numerical simulation of current-voltage characteristics of photovoltaic systems with shaded solar cells // Solar Energy. 1996. Vol. 56. Issue 6. P. 513–520.
DOI: 10.1016/0038-092X(96)00006-0
2. Villalva M.G., Gazoli J.R., Filho E.R. Comprehensive approach to modeling and simulation of photovoltaic arrays // IEEE Transactions on Power Electronics. 2009. Vol. 24. Issue 5. P. 1198–1208.
DOI: 10.1109/TPEL.2009.2013862
3. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W -функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. 160 с.

Поступила в редакцию 01.06.2016

Зиновьев Виталий Валерьевич, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: vi777vz@gmail.com

Бельтюков Анатолий Петрович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теоретических основ информатики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: belt.udsu@mail.ru

Бартенев Олег Архипович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой теплоэнергетики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: boa2@udsu.ru

V. V. Zinov'ev, A. P. Bel'tyukov, O. A. Bartenev

Mathematical model of the photovoltaic converter using the Lambert W function

Keywords: solar energy, solar cell model, Lambert W function.

MSC2010: 93A30

The article deals with the solar photovoltaic converter model as a single energy source. The Lambert W function is used to obtain the solar cell parameters. Versatility of this approach is shown.

REFERENCES

1. Quaschnig V., Hanitsch R. Numerical simulation of current-voltage characteristics of photovoltaic systems with shaded solar cells, *Solar Energy*, 1996, vol. 56, issue 6, pp. 513–520.
DOI: 10.1016/0038-092X(96)00006-0
2. Villalva M.G., Gazoli J.R., Filho E.R. Comprehensive approach to modeling and simulation of photovoltaic arrays, *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, vol. 24, issue 5, pp. 1198–1208.
DOI: 10.1109/TPEL.2009.2013862
3. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saikov S.K. *W-funktsiya Lambert'a i ee primeneniye v matematicheskikh zadachakh fiziki* (Lambert W function and its application in mathematical problems of physics), Sarov: Russian Federal Nuclear Center, 2006, 160 p.

Received 01.06.2016

Zinov'ev Vitalii Valer'evich, Post-Graduate Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: vi777vz@gmail.com

Bel'tyukov Anatolii Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Foundations of Computer Science, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: belt.udsu@mail.ru

Bartenev Oleg Arkhipovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Thermal Engineering, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: boa2@udsu.ru