

УДК 517.977

© *А. И. Мачтакова***ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И РАЗНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ИГРОКОВ**

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}x_i = a_ix_i + u_i, \quad u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad v \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (1, 2)$ функции f . Множества допустимых управлений U_i , V — выпуклые компакты, a_i , a — вещественные числа. Терминальные множества — выпуклые компакты. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная.

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-04

Введение

Основы теории дифференциальных игр преследования–уклонения двух лиц были заложены еще в 1965 г. в работе Р. Айзекса [1]. Его труды получили развитие в исследованиях многих математиков [2–8] и к настоящему времени представляют собой фундаментальную содержательную теорию с различными подходами к анализу конфликтных ситуаций, описание которых возможно с помощью дифференциальных уравнений. Кроме метода Айзекса, были разработаны и другие методы решения игровых задач такие, как метод альтернированного интеграла Понтрягина, метод стабильных мостов Красовского, метод полугрупповых операторов Пшеничного и другие.

В качестве естественного обобщения игр преследования–уклонения с участием двух лиц возникли дифференциальные игры, в которых происходит взаимодействие группы преследователей с одним или несколькими убегающими [9–12]. При этом преследователи ставят своей целью поимку заданного числа убегающих, а убегающие стремятся уклониться от встречи. Так, например, в работе [13] представлены достаточные условия уклонения хотя бы одного убегающего из счетного числа убегающих от счетного числа преследователей в задаче простого преследования с интегральными ограничениями на управления. Задача поимки заданного числа убегающих при условии, что каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [14], а при условии, что каждого убегающего должны поймать несколько преследователей, — в работах [15, 16].

Помимо обобщения дифференциальных игр двух игроков на дифференциальные игры двух групп, возникли и другие ответвления исходной задачи преследования–уклонения, в частности, такая задача, в которой кроме преследователей и убегающих вводится еще один класс участников — защитники убегающих [17].

Следует обратить внимание на одно из направлений развития современной теории группового преследования — поиск новых задач, в которых применимы разработанные ранее методы. В частности, метод разрешающих функций, предложенный для исследования линейных дифференциальных игр с геометрическими ограничениями, в настоящее время распро-

странен на линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями [18], дифференциальные игры с запаздыванием [19], дифференциальные игры с дробными производными [20–22] (в том числе, при условии равных возможностей участников игры [23–27]) и другие классы дифференциальных игр.

В данной работе рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и одного убегающего при условии, что законы движения игроков описываются уравнениями с дробными производными, а их возможности не предполагаются равными. Получены достаточные условия поимки и уклонения.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1.1 (см. [28]). Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — такая функция, что f'' абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{f''(s)}{(t-s)^{\alpha-1}} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$ $n+1$ лица: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \quad u_i \in U_i. \quad (1.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Здесь $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha \in (1, 2)$, $D^{(\alpha)}x$ — производная по Капуто функции x порядка α , a_i, a — вещественные числа. Считаем, что $x_i^0 - y^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$, где $M_i, i \in I$, — заданные выпуклые компакты.

§ 2. Достаточные условия поимки

Определение 2.1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение U_i^0 , ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = (x_i^0, \dot{x}_i^0, y^0, \dot{y}^0, i \in I)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i .

Определение 2.2. В игре $G(n+1)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, существуют момент $t_0 \in [0, T]$ и номер $l \in I$, для которых $x_l(t_0) - y(t_0) \in M_l$.

Введем следующие обозначения:

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)} - \text{обобщенная функция Миттаг-Леффлера } (\rho > 0, z, \mu \in \mathbb{R}^1),$$

$$f_i(t, s) = t^{s-1} E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, s), \quad f(t, s) = t^{s-1} E_{1/\alpha}(at^\alpha, s),$$

$$g_i(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a_i(t - \tau)^\alpha, \alpha), \quad g(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha),$$

$$F_i(t) = \int_0^t g_i(t, \tau) d\tau, \quad F(t) = \int_0^t g(t, \tau) d\tau,$$

$\text{Int } A$, $\text{co } A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A . Отметим, что из теоремы 4.1.1 [29] следует, что для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$, справедливы неравенства $g_i(t, \tau) \geq 0$, $g(t, \tau) \geq 0$.

Пусть $\gamma_i(t, \tau)$, $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$, — некоторые ограниченные, измеримые по (t, τ) , локально суммируемые по τ (при каждом t) вектор-функции, которые, следуя [30], будем называть функциями сдвига. Зафиксируем некоторый набор функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i \in I\}$ и обозначим

$$\xi_i(t) = f_i(t, 1)x_i^0 - f(t, 1)y^0 + f_i(t, 2)\dot{x}_i^0 - f(t, 2)\dot{y}^0 + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau.$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_i(t, \tau, v, \gamma_i) = g_i(t, \tau)U_i - g(t, \tau)v - \gamma_i(t, \tau), \quad W_i(t, \tau, \gamma_i) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, \tau, v, \gamma_i).$$

Предположение 2.1. Существуют функции сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i \in I\}$ такие, что для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $0 \leq \tau \leq t$, выполнено условие

$$0 \in W_i(t, \tau, \gamma_i).$$

Теорема 2.1. Пусть выполнено предположение 2.1 и существуют $T > 0$, $l \in I$ такие, что $\xi_l(T) \in M_l$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$U_l(T, \tau, v) = \{u_l \in U_l \mid g_l(T, \tau)u_l - g(T, \tau)v - \gamma_l(T, \tau) = 0\}.$$

В силу предположения 2.1, $U_l(T, \tau, v) \neq \emptyset$ для всех $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Из теоремы измеримого выбора [31] следует, что существует измеримый селектор $u_l^2(\tau, v) \in U_l(T, \tau, v)$. Полагаем управление преследователя P_l равным

$$u_l(\tau) = u_l^2(\tau, v(\tau)), \quad \tau \in [0, T].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Решение задачи Коши для систем (1.1), (1.2) представимо в виде [32]

$$x_l(t) - y(t) = \xi_l(t) + \int_0^t (g_l(t, \tau)u_l(\tau) - g(t, \tau)v(\tau) - \gamma_l(t, \tau)) d\tau.$$

Поэтому $x_l(T) - y(T) = \xi_l(T) \in M_l$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.1. Пусть существует номер $l \in I$ такой, что

- (1) $0 \in g_l(t, \tau)U_l - g(t, \tau)v$ для всех $v \in V$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$;
- (2) $a_l < 0$, $a < 0$;
- (3) $0 \in \text{Int } M_l$.

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Взяв $\gamma_l(t, \tau) = 0$ для всех $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$, получим, что $0 \in W_l(t, \tau, \gamma_l)$ для всех $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$. Тогда $\xi_l(t) = f_l(t, 1)x_l^0 - f(t, 1)y^0 + f_l(t, 2)\dot{x}_l^0 - f(t, 2)\dot{y}^0$. Из [29, с. 12] следует, что при $t \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$\begin{aligned} f(t, 1) &= -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), & f_l(t, 1) &= -\frac{1}{a_l t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \\ f(t, 2) &= -\frac{1}{at^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), & f_l(t, 2) &= -\frac{1}{a_l t^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_l(t) = 0$. Следовательно, существует $T > 0$, для которого $\xi_l(T) \in M_l$. Осталось применить теорему 2.1. Следствие доказано. $\square$

В дальнейшем будем считать, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i \in I, t \geq 0$. Каждому преследователю $P_i, i \in I$, поставим в соответствие разрешающую функцию

$$\lambda_i(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \lambda(M_i - \xi_i(t)) \cap W_i(t, \tau, v, \gamma_i) \neq \emptyset\}.$$

Т е о р е м а 2.2. Пусть выполнено предположение 2.1 и существует $T > 0$ такой, что

$$\inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_0^T \lambda_i(T, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.1 [9]. $\square$

Т е о р е м а 2.3. Пусть $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$, выполнено предположение 2.1 и существует $T > 0$ такой, что

$$\inf_{v(\cdot)} \max_i \int_0^T \frac{\lambda_i^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|} d\tau \geq 1,$$

где

$$\lambda_i^0(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda \xi_i^0(t) \in g_i(t, \tau)U_i - g(t, \tau)v - \gamma_i(t, \tau)\}, \quad \xi_i^0(t) = \xi_i(t)/\|\xi_i(t)\|.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Определим функции

$$h_i(t, v(\cdot)) = 1 - \int_0^t \frac{\lambda_i^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|} d\tau,$$

множества

$$T_i(v(\cdot)) = \{\tau \in [0, T] \mid h_i(\tau, v(\cdot)) = 0\}$$

и моменты времени

$$t_i^*(v(\cdot)) = \begin{cases} \inf\{\tau \mid \tau \in T_i(v(\cdot))\}, & \text{если } T_i(v(\cdot)) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } T_i(v(\cdot)) = \emptyset. \end{cases}$$

Из определения $T_i(v(\cdot))$ и $t_i^*(v(\cdot))$ следует, что для любой функции $v(\cdot)$ существует номер $l \in I$, для которого $t_l^*(v(\cdot)) \leq T$. Рассмотрим многозначные отображения

$$\begin{aligned} U_i^1(\tau, v) &= \{u_i \in U_i \mid g_i(T, \tau)u_i - g(T, \tau)v - \gamma_i(T, \tau) = -\lambda_i^0(T, \tau, v)\xi_i^0(T)\}, \\ U_i^2(\tau, v) &= \{u_i \in U_i \mid g_i(T, \tau)u_i - g(T, \tau)v - \gamma_i(T, \tau) = 0\}. \end{aligned}$$

Из теоремы измеримого выбора [31] следует, что существуют измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v) \in U_i^1(\tau, v), u_i^2(\tau, v) \in U_i^2(\tau, v)$. Задаем управления преследователей $P_i, i \in I$, следующим образом. Если $t_i^*(v(\cdot)) < T$, то полагаем

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^1(t, v(t)), & t \in [0, t_i^*(v(\cdot))], \\ u_i^2(t, v(t)), & t \in (t_i^*(v(\cdot)), T]. \end{cases}$$

Если $t_i^*(v(\cdot)) \geq T$, то полагаем

$$u_i(t) = u_i^1(t, v(t)), \quad t \in [0, T].$$

Решение задачи Коши для систем (1.1), (1.2) представимо в виде [32]

$$x_i(t) - y(t) = \xi_i(t) + \int_0^t (g_i(t, \tau)u_i(\tau) - g(t, \tau)v(\tau) - \gamma_i(t, \tau)) d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_i(T) - y(T) &= \xi_i(T) - \int_0^{t_i^*(v(\cdot))} \lambda_i^0(T, \tau, v(\tau)) \xi_i^0(T) d\tau = \\ &= \xi_i^0(T) \|\xi_i(T)\| \left(1 - \int_0^{t_i^*(v(\cdot))} \frac{\lambda_i^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|} d\tau \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим далее подробнее ситуацию, в которой для всех $i \in I$

$$M_i = \{0\}, \quad U_i = \{u_i \mid \|u_i - b_i\| \leq R_i\}, \quad V = \{v \mid \|v - b\| \leq R\}, \quad (2.1)$$

где $b, b_i \in \mathbb{R}^k$, $i \in I$; R, R_i , $i \in I$, — неотрицательные вещественные числа, и в качестве нормы рассматривается евклидова норма.

Предположение 2.2. $R_i g_i(t, \tau) \geq R g(t, \tau)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$.

Если в качестве $\gamma_i(t, \tau)$ взять $\gamma_i(t, \tau) = g_i(t, \tau)b_i - g(t, \tau)b$, то

$$g_i(t, \tau)U_i - g(t, \tau)v - \gamma_i(t, \tau) = g_i(t, \tau)(U_i - b_i) - g(t, \tau)(v - b).$$

Отсюда с учетом условия (2.1) и предположения 2.2 получаем

$$0 \in g_i(t, \tau)(U_i - b_i) - g(t, \tau)(v - b), \quad \text{то есть } 0 \in W_i(t, \tau, v, \gamma_i),$$

а значит $0 \in W_i(t, \tau, \gamma_i)$. Таким образом, выполняется предположение 2.1. Тогда

$$\xi_i(t) = f_i(t, 1)x_i^0 - f(t, 1)y^0 + f_i(t, 2)\dot{x}_i^0 - f(t, 2)\dot{y}^0 + F_i(t)b_i - F(t)b.$$

Пусть далее $\delta(t) = \min_{\|p\|=1} \max_i (p, \xi_i^0(t))$, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b .

Предположение 2.3. Существует момент $T > 0$ такой, что

(а) $0 \in \text{Int co } \{\xi_i(T), i \in I\}$;

(б) справедливо неравенство

$$\sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| \leq 2\delta(T)RF(T). \quad (2.2)$$

Лемма 2.1. Пусть M_i, U_i, V определены соотношением (2.1) и выполнены предположения 2.2, 2.3. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ выполнено неравенство

$$\sum_{i \in I} \left(\|\xi_i(T)\| - \int_0^T \lambda_i^0(T, \tau, v(\tau)) d\tau \right) \leq 0.$$

Доказательство. Из определения функций λ_i^0 следует, что

$$\lambda_i^0(T, \tau, v) = g(T, \tau)(v - b, \xi_i^0(T)) + \sqrt{g^2(T, \tau)(v - b, \xi_i^0(T))^2 + R_i^2 g_i^2(T, \tau) - \|v - b\|^2 g^2(T, \tau)}.$$

Обозначим $\widehat{v} = v - b$. Тогда $\|\widehat{v}\| \leq R$. Из предположения 2.2 следует, что для всех $t \in [0, T]$, $i \in I$, $v \in V$ справедливы неравенства

$$\lambda_i^0(T, t, v) \geq g(T, t) \left((\widehat{v}, \xi_i^0(T)) + |(\widehat{v}, \xi_i^0(T))| \right). \quad (2.3)$$

Функции $\lambda_i^0(T, t, v)$ при каждом фиксированном t являются вогнутыми по v [12]. Поэтому существует $\widehat{v}_0$, $\|\widehat{v}_0\| = 1$, для которого

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, \widehat{v}) \geq \min_{\|\widehat{v}\| \leq R} \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, \widehat{v}) = \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, R\widehat{v}_0).$$

Из пункта (а) предположения 2.3, работы [33] и определения $\delta(T)$ следует, что для всякого v , $\|v\| = 1$, найдется номер $l \in I$, для которого $(v, \xi_l^0(T)) \geq \delta(T) > 0$. Следовательно, из (2.3) получаем

$$\lambda_l^0(T, t, R\widehat{v}_0) \geq 2g(T, t)R \cdot (\widehat{v}_0, \xi_l^0(T)) \geq 2R\delta(T)g(T, t).$$

Тогда для каждого $t \in [0, T]$, $v \in V$ справедливо неравенство

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, v) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, R\widehat{v}_0) \geq \lambda_l^0(T, t, R\widehat{v}_0) \geq 2R\delta(T)g(T, t).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, v(t)) dt &\leq \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - \int_0^T 2\delta(T)Rg(T, t) dt = \\ &= \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - 2R\delta(T)F(T) \leq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

С л е д с т в и е 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого

$$\|\xi_l(T)\| - \int_0^T \lambda_l^0(T, t, v(t)) dt \leq 0.$$

Т е о р е м а 2.4. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (2.1), и выполнены предположения 2.2, 2.3. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимая функция. В силу следствия 2.2, существует номер $l \in I$, для которого

$$\|\xi_l(T)\| - \int_0^T \lambda_l^0(T, t, v(t)) dt \leq 0, \text{ или } 1 - \int_0^T \frac{\lambda_l^0(T, t, v(t))}{\|\xi_l(T)\|} dt \leq 0.$$

Осталось применить теорему 2.3. Теорема доказана. □

С л е д с т в и е 2.3. Пусть $a_i = a \leq 0$, $b_i = b = 0$, $R_i = R > 0$, $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$ и

$$\dot{y}^0 \in \text{Int co } \{\dot{x}_1^0, \dots, \dot{x}_n^0\}.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае $f_i(t) = f(t)$, $F_i(t) = F(t) = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Примем $\gamma_i(t, \tau) = 0$, тогда получаем, что

$$\xi_i(t) = f(t, 1)(x_i^0 - y^0) + f(t, 2)(\dot{x}_i^0 - \dot{y}^0) = f(t, 2) \left(\frac{f(t, 1)}{f(t, 2)}(x_i^0 - y^0) + (\dot{x}_i^0 - \dot{y}^0) \right). \quad (2.4)$$

Так как $\frac{f(t, 1)}{f(t, 2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, то существует момент $t_0 > 0$ такой, что для всех $t > t_0$ $\delta(t) \geq \frac{\delta}{2}$, где $\delta = \min_{\|v\| \leq R} \max_i (\dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, v) > 0$.

Далее из [34] имеем

$$F(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) d\tau = \int_0^t t^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha) dt = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1).$$

Поэтому при $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{F(t)}{f(t, 2)} = \frac{t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1)}{t E_{1/\alpha}(at^\alpha, 2)} = t^{\alpha-1} \frac{-\frac{1}{at^{\alpha-1}\Gamma(1)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right)}{-\frac{1}{at^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что $\sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| \leq f(T, 2) \cdot c \cdot \sum_{i \in I} \|\dot{x}_i^0 - \dot{y}^0\|$, где $c \geq 1$.

Учитывая (2.5), можно заметить, что существует момент $T > t_0$ такой, что

$$\frac{2\delta(T)RF(T)}{f(T, 2)} \geq c \sum_{i \in I} \|\dot{x}_i^0 - \dot{y}^0\|$$

при некотором $c \geq 1$. Следовательно, выполняется неравенство (2.2).

Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.4. $\square$

§ 3. Достаточные условия уклонения

О п р е д е л е н и е 3.1. В игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи, если существует программное управление $v(\cdot)$ убегающего E такое, что для любых траекторий $x_i(t)$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, и для любого $t > 0$ имеет место $x_i(t) \neq y(t)$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (2.1), и существует вектор $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, такой, что

(1) для всех $i \in I$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|b + Rp\|F(t) \geq (\|b_i\| + R_i)F_i(t), \quad f(t, s) \geq f_i(t, s), \quad s = 1, 2;$$

(2)

$$(b + Rp, y^0) \geq 0, \quad (b + Rp, y^0) \geq \max_{i \in I} (b + Rp, x_i^0),$$

$$(b + Rp, \dot{y}^0) \geq 0, \quad (b + Rp, \dot{y}^0) \geq \max_{i \in I} (b + Rp, \dot{x}_i^0).$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Задаем управление убегающего E следующим образом. Полагая $v(t) = b + Rp$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Пусть $u_i(t)$, $i \in I$, — произвольные управления преследователей P_i , $i \in I$. Определим функции $\widehat{u}_i(t) = u_i(t) - b_i$,

$$\widetilde{u}_i(t) = \frac{\int_0^t g_i(t, s) \widehat{u}_i(s) ds}{R_i F(t)}, \quad \omega_i(t) = f(t, 1)y^0 - f_i(t, 1)x_i^0 + f(t, 2)\dot{y}^0 - f_i(t, 2)\dot{x}_i^0.$$

Отметим, что $F_i(t) \neq 0$ для всех $t > 0$. Тогда для всех $t \geq 0$, $i \in I$

$$\|\widehat{u}_i(t)\| \leq R_i, \quad \|\widetilde{u}_i(t)\| \leq 1, \\ y(t) - x_i(t) = \omega_i(t) + (b + Rp)F(t) - (b_i + R_i\widetilde{u}_i(t))F_i(t).$$

Докажем, что $(b + Rp, \omega_i(t)) \geq 0$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Действительно, $(b + Rp, y^0) \geq (b + Rp, x_i^0)$, $(b + Rp, \dot{y}^0) \geq (b + Rp, \dot{x}_i^0)$ для всех $i \in I$. Так как [35] $f_i(t, s) \geq 0$, $f(t, s) \geq 0$ и $f(t, s) \geq f_i(t, s)$ для всех $i \in I$, $s = 1, 2$, $t \geq 0$, то

$$f(t, 1)(b + Rp, y^0) + f(t, 2)(b + Rp, \dot{y}^0) \geq f_i(t, 1)(b + Rp, x_i^0) + f_i(t, 2)(b + Rp, \dot{x}_i^0), \\ \text{или } (b + Rp, \omega_i(t)) \geq 0.$$

Поэтому для всех $i \in I$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|y(t) - x_i(t)\| \geq \|\omega_i(t) + (b + pR)F(t)\| - \|(b_i + R_i\widetilde{u}_i(t))F_i(t)\| \geq \\ \geq \sqrt{\|\omega_i(t)\|^2 + 2(b + Rp, \omega_i(t))F(t) + \|b + Rp\|^2 F^2(t) - F_i(t)(\|b_i\| + R_i)} > \\ > \|b + Rp\|F(t) - (\|b_i\| + R_i)F_i(t) \geq 0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3.1. Пусть $M_i = \{0\}$, $b_i = b = 0$ для всех $i \in I$. Кроме того, для всех $t \geq 0$, $i \in I$ справедливы неравенства

$$RF(t) \geq R_i F_i(t), \quad f(t, s) \geq f_i(t, s), \quad s = 1, 2,$$

и существует вектор $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, такой, что

$$(p, y^0) \geq 0, \quad (p, \dot{y}^0) \geq \max_i (p, \dot{x}_i^0), \quad (p, \dot{y}^0) \geq 0, \quad (p, \dot{y}^0) \geq \max_i (p, \dot{x}_i^0).$$

Тогда в игре $G(n + 1)$ происходит уклонение от встречи.

§ 4. Заключение

Получены новые достаточные условия поимки и уклонения от встречи в задаче группового преследования с дробными производными. Для решения задачи использован метод разрешающих функций.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070 (<https://rscf.ru/project/21-71-10070/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

4. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975.
5. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
6. Субботин А. И., Ченцов А. И. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
7. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments // *Systems and Control Letters*. 2019. Vol. 125. P. 22–28.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008>
8. Qadir M. Z., Piao Songhao, Jiang Haiyang, Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders // *The Journal of Supercomputing*. 2020. Vol. 76. Issue 5. P. 3416–3426. <https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3>
9. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
10. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
11. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344>
12. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: Survey of publications // *Dynamic Games and Applications*. 2017. Vol. 7. Issue 4. P. 609–633. <https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z>
13. Alias I. A., Ibragimov G., Rakhmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space // *Dynamic Games and Applications*. 2017. Vol. 7. Issue 3. P. 347–359. <https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0>
14. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2019. Vol. 182. Issue 1. P. 417–429. <https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7>
15. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // *Сибирские электронные математические известия*. 2022. Т. 19. Вып. 1. С. 371–377. <https://www.mathnet.ru/rus/semr1508>
16. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // *Dynamic Games and Applications*. 2019. Vol. 9. Issue 3. P. 594–613. <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8>
17. Liang Li, Deng Fang, Peng Zhihong, Li Xinxing, Zha Wenzhong. A differential game for cooperative target defense // *Automatica*. 2019. Vol. 102. P. 58–71. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034>
18. Саматов Б. Т. П-стратегия в дифференциальной игре с линейными ограничениями по управлению // *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78. № 3. С. 369–377. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21727041>
19. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания // *Математические заметки*. 2012. Т. 91. Вып. 5. С. 750–760. <https://doi.org/10.4213/mzm6346>
20. Эйдельман С. Д., Чикрий А. А. Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // *Украинский математический журнал*. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583. <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4561>
21. Чикрий А. А., Матичин И. И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278. <https://www.mathnet.ru/rus/timm419>
22. Chikrii A. A., Matychyn I. I. Game problems for fractional-order systems // *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*. Dordrecht: Springer, 2010. P. 233–241. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3293-5_19
23. Петров Н. Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. <https://doi.org/10.20537/vm170105>

24. Петров Н. Н. Многократная поимка в одной задаче группового преследования с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 156–164. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-156-164>
25. Петров Н. Н. К задаче группового преследования в дифференциальной игре с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 857–864. <https://doi.org/10.1134/S0374064119060116>
26. Банников А. С. Уклонение от группы преследователей в задаче группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 309–314. <https://doi.org/10.20537/vm170302>
27. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives and phase restrictions // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 11. Article 1171. <https://doi.org/10.3390/math9111171>
28. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II // Geophysical Journal International. 1967. Vol. 13. Issue 5. P. 529–539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
29. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функции Миттаг–Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. <https://www.mathnet.ru/rus/cmfd182>
30. Чикрий А. А., Чикрий К. В. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением // Проблемы управления и информатики. 2016. № 2. С. 65–78.
31. Aubin J. P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
32. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національної академії наук України. 2007. № 1. С. 50–55.
33. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. <https://www.mathnet.ru/rus/de328>
34. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
35. Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag–Leffler function $E_a(-x)$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1948. Vol. 54. No. 12. P. 1115–1116. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-09132-7>

Поступила в редакцию 03.07.2023

Принята к публикации 10.09.2023

Мачтакова Алёна Игоревна, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1570-5241>
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Цитирование: А. И. Мачтакова. Линейная задача группового преследования с дробными производными и разными возможностями игроков // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 43–55.

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, fractional derivative.

MSC2020: 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/2226-3594-2023-62-04

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of one evader by a group of pursuers is considered, described by a system of the form

$$D^{(\alpha)}x_i = a_ix_i + u_i, \quad u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad v \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (1, 2)$ of the function f . Sets of admissible controls U_i , V are convex compacts, a_i , a are real numbers. Terminal sets are convex compacts. Sufficient conditions for the solvability of the problems of pursuit and evasion are obtained. In the study, the method of resolving functions is used as the basic one.

Funding. This study was funded by the Russian Science Foundation, project 21-71-10070 (<https://rscf.ru/en/project/21-71-10070/>).

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. <https://zbmath.org/0125.38001>
Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967.
2. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988.
<https://www.springer.com/gp/book/9781461283188>
Original Russian text published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974.
4. Hajek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975.
5. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential pursuit games), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
6. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Guarantee optimization in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
7. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments, *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 125, pp. 22–28.
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008>
8. Qadir M. Z., Piao Songhao, Jiang Haiyang, Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders, *The Journal of Supercomputing*, 2020, vol. 76, issue 5, pp. 3416–3426. <https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3>
9. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7>
Original Russian text published in Chikrii A. A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy*, Kiev: Naukova dumka, 1992.
10. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for control of several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
11. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22947344>

12. Kumkov S.S., Ménec S.L., Patsko V.S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: Survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 4, pp. 609–633. <https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z>
13. Alias I. A., Ibragimov G., Rakhmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 3, pp. 347–359. <https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0>
14. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, issue 1, pp. 417–429. <https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7>
15. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games, *Sibirskie Élektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2022, vol. 19, issue 1, pp. 371–377. <https://www.mathnet.ru/eng/semr1508>
16. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 3, pp. 594–613. <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8>
17. Liang Li, Deng Fang, Peng Zhihong, Li Xinxing, Zha Wenzhong. A differential game for cooperative target defense, *Automatica*, 2019, vol. 102, pp. 58–71. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034>
18. Samatov B.T. The Π -strategy in a differential game with linear control constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, issue 3, pp. 258–263. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.09.008>
19. Mamadaliev N. Linear differential pursuit games with integral constraints in the presence of delay, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, issue 5, pp. 704–713. <https://doi.org/10.1134/S0001434612050124>
20. Éidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, issue 11, pp. 1787–1806. <https://doi.org/10.1023/A:1010439422856>
21. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. S54–S70. <https://doi.org/10.1134/S0081543810050056>
22. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order systems, *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, Dordrecht: Springer, 2010, pp. 233–241. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3293-5_19
23. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170105>
24. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. S150–S157. <https://doi.org/10.1134/S0081543819040151>
25. Petrov N.N. Group pursuit problem in a differential game with fractional derivatives, state constraints, and simple matrix, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 6, pp. 841–848. <https://doi.org/10.1134/S0012266119060119>
26. Bannikov A.S. Evasion from pursuers in a problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 309–314 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170302>
27. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives and phase restrictions, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 11, article 1171. <https://doi.org/10.3390/math9111171>
28. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent — II, *Geophysical Journal International*, 1967, vol. 13, issue 5, pp. 529–539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
29. Popov A. Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag–Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3>
30. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, issue 3, pp. 20–35.

<https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v48.i3.30>

31. Aubin J. P., Frankowska H. *Set-valued analysis*, Boston: Birkhäuser, 1990.
32. Chikrii A. A., Matichin I. I. On the analogue of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order, *Reports of the National Academy of Science of Ukraine*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
33. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/de328>
34. Dzhrbashyan M. M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transforms and representations of functions in the complex domain), Moscow: Nauka, 1966.
35. Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_a(-x)$, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1948, vol. 54, no. 12, pp. 1115–1116.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-09132-7>

Received 03.07.2023

Accepted 10.09.2023

Alena Igorevna Machtakova, Post-Graduate Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;

Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1570-5241>

E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Citation: A. I. Machtakova. A linear group pursuit problem with fractional derivatives and different player capabilities, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 43–55.