

УДК [330.55:303.094.5]:311

*А.А. Мухин***ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ ИНДЕКСА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ НАСТРОЕНИЙ В РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Рассматривается применение метода Фурье¹ в моделировании индекса потребительских настроений в РФ. Проведено аналитическое выравнивание линии с помощью ряда Фурье. Используются гармоники 1, 2, 3 и 4-го порядка. Рассчитаны параметры уравнений гармоник ряда Фурье на основе метода наименьших квадратов. Проанализированы графики на наличие в изменении показателя сезонных волн, сделан выбор в пользу выравнивания по ряду Фурье. Рассчитаны параметры гармоник с помощью таблицы. Определена величина остаточной дисперсии. Произведен выбор наилучшей модели, которая имеет наименьшую величину остаточной дисперсии. Представлен график эмпирических значений динамического ряда с нанесенной на него выбранной линией тренда. Использован критерий Дарбина-Уотсона для проверки адекватности выбранного уравнения тренда. Проведена проверка наличия автокорреляции в остаточных величинах. По стандартным таблицам данного критерия найдены значения нижней и верхней границ доверительного интервала. Для $n = 12$ они соответственно равны: $d_1 = 0,97$ и $d_2 = 1,33$. Так как $d > d_2$ или $1,5 > 1,33$ автокорреляция отсутствует. Полученная величина находится в интервале от 0 до 2. Автокорреляция в ряду остаточных величин отсутствует и выбранную модель тренда можно считать адекватной. Указанная информация может служить важным инструментом хозяйствования различных экономических агентов рынка.

Ключевые слова: применение метода Фурье в моделировании индекса потребительских настроений в РФ, расчет параметров гармоник методом наименьших квадратов, остаточная дисперсия, применение критерия Дарбина-Уотсона для проверки адекватности выбранного уравнения тренда, отсутствие автокорреляции в остаточных величинах, адекватность модели.

Аналитическое выравнивание динамических рядов – это нахождение определенной модели (уравнения тренда), которая математически точно описывает тенденцию развития явления во времени. Изменение уровней показателя представляется только как функция от времени. Необходимо решить задачу: есть ли тенденция в динамическом ряду или нет, определить ее направление. Аналитическое выравнивание позволяет установить характер развития явления, а главное – описать его математически, определить направления развития, использовать полученную модель для прогнозирования.

Необходимо обозначить нахождение модели тренда по ряду Фурье, проверить остаточные величины (отклонения фактических значений показателя от выравненных по уравнению тренда) на автокорреляцию с использованием критерия Дарбина-Уотсона.

Индекс потребительских настроений (ИПН)² является значительным инструментом прогнозирования поведения потребителей, определяется специалистами Левада Центр.

В условиях роста экономики в России потребители начинают диктовать свои требования. Производителям необходимо знать настроения потребителей, их покупательские намерения для того, чтобы наиболее результативно строить планы производства, импорта или продаж, для организации маркетинга и рекламы. Прогнозные свойства ИПН проверены практикой десятилетий в большинстве развитых стран.

ИПН обеспечивает краткосрочное прогнозирование развития российской экономики и дает реальному сектору потенциал своевременно реагировать на изменения экономической ситуации.

Метод построения ИПН прост: индекс рассчитывается на основе ответов респондентов на пять вопросов. По каждому вопросу строится индивидуальный индекс как разность долей положительных и отрицательных ответов и прибавляется 100, чтобы избежать появления отрицательных значений индекса. Совокупный индекс ИПН рассчитывается как арифметическая средняя из индивидуальных индексов. ИПН изменяется в интервале от 0 до 200, причем значения индекса менее 100 означают преобладание отрицательных оценок в обществе.

ИПН строится на основе опросов общественного мнения, которые проводят по репрезентативной выборке, отражают мнения взрослого (старше 16 лет), городского и сельского населения страны (число опрошенных – 2000). В России замеры ИПН проводятся с середины 90-х гг.

¹ Фурье, Жан Батист Жозеф (1768-1830 гг.) – французский математик и физик. Высшая нормальная школа. Париж. Научный руководитель – Ж. Лагранж.

² URL: <http://www.levada.ru/indikatory/sotsialno-ekonomicheskie-indikatory/>

Пример

Рассмотрим построение модели по ряду Фурье, используем критерий Дарбина-Уотсона для проверки точности выбранного вида уравнения тренда.

Решение

Таблица 1

Динамика индекса потребительских настроений за период 2016 г.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2016	57	63	59	64	65	70	69	67	67	72	68	71

Первым шагом в проведении аналитического выравнивания является выбор вида математической функции, которую предполагается применять в качестве модели тренда. Исследователь руководствуется формой кривой, полученной на основе отображения графика эмпирических данных. Схема построения графика: по оси абсцисс откладываются временные периоды (даты), по оси ординат – значения уровней динамического ряда. По характеру скопления нанесенных точек решают о предполагаемом виде модели.

В динамическом анализе в качестве линии тренда чаще используются следующие функции: линейная, парабола 2-го порядка, показательная, гиперболическая.

Если в исследуемом динамическом ряду наблюдается периодическая колеблемость его уровней, например, по месяцам года (сезонные колебания), циклические колебания (с циклом 5-10 лет), проводить аналитическое выравнивание предпочтительнее с помощью ряда Фурье. В данном случае линия тренда будет описываться следующим уравнением:

$$\hat{y}_x = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где k – порядок гармоники.

Чаще всего используются гармоники 1, 2, 3 и 4 – го порядка. Так, уравнение 1-й гармоники ($k = 1$) имеет вид:

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t;$$

уравнение с двумя гармониками ($k = 2$):

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t;$$

уравнение, содержащее три гармоники ($k = 3$):

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t;$$

уравнение с четырьмя гармониками примет вид ($k = 4$):

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + a_4 \cos 4t + b_4 \sin 4t.$$

При выравнивании по ряду Фурье рассчитывают все четыре уравнения, то есть все четыре гармоники, сравнивают эмпирические данные с теоретическими, предсказанными по ряду Фурье, выбирают наилучшую модель, которая наиболее точно описывает исследуемые колебания и среди всех предлагаемых уравнений имеет наименьшую остаточную дисперсию.

Параметры уравнений гармоник ряда Фурье определяют на основе метода наименьших квадратов по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n}; a_k = \frac{2 \sum y \cos kt}{n}, b_k = \frac{2 \sum y \sin kt}{n},$$

где t – условный показатель времени, изменяющийся по мере следования временных периодов от 0 с шагом $\frac{2\pi}{n}$;

n – количество уровней динамического ряда.

При наличии сезонной волны (колебаний показателя по месяцам года), когда количество уровней ряда равно числу месяцев в году ($n = 12$), показатель t примет значения:

$$0; \pi/6; \pi/3; \pi/2; 2\pi/3; 5\pi/6; \pi; 7\pi/6; 4\pi/3; 3\pi/2; 5\pi/3; 11\pi/6.$$

Таблица 2

Расчетная таблица для определения параметров уравнения гармоник

Месяц	Условный показатель времени t	Индекс, y	$y \cos t$	$y \cos 2t$	$y \cos 3t$	$y \cos 4t$	$y \sin t$	$y \sin 2t$	$y \sin 3t$	$y \sin 4t$
Январь	0	57	57	57	57	57	0	0	0	0
Февраль	0,524	63	54,6	32	0	-32	32	54,6	63	54,56
Март	1,047	59	29,5	-29,5	-59	-29,5	51	51,1	0	-51,1
Апрель	1,571	64	0	-64	0	64	64	0	-64	0
Май	2,094	65	-33	-33	65	-33	56,3	-56,3	0	56,3
Июнь	2,618	70	-60,6	35	0	-35	35	-60,6	70	-60,6
Июль	3,142	69	-69	69	-69	69	0	0	0	0
Август	3,665	67	-58	34	0	-33	-34	58	-67	58
Сентябрь	4,189	67	-33,5	-33,5	67	-33,5	-58	58	0	-58
Октябрь	4,712	72	0	-72	0	72	-72	0	72	0
Ноябрь	5,236	68	34	-34	-68	-34	-58,9	-58,9	0	58,9
Декабрь	5,760	71	61,5	35	0	-36	-36	-615	-71	-61,5
Сумма		792	-17,1	-4,0	-7	-3,0	-20,03	-15,6	3	-3,464

Построим уравнение тренда динамики индекса потребительских настроений за период 2016 г. и рассчитаем параметры гармоник (табл. 2).

Анализ графика (рис. 1) позволяет предположить наличие в изменении показателя сезонных волн, необходимо сделать выбор в пользу выравнивания по ряду Фурье.

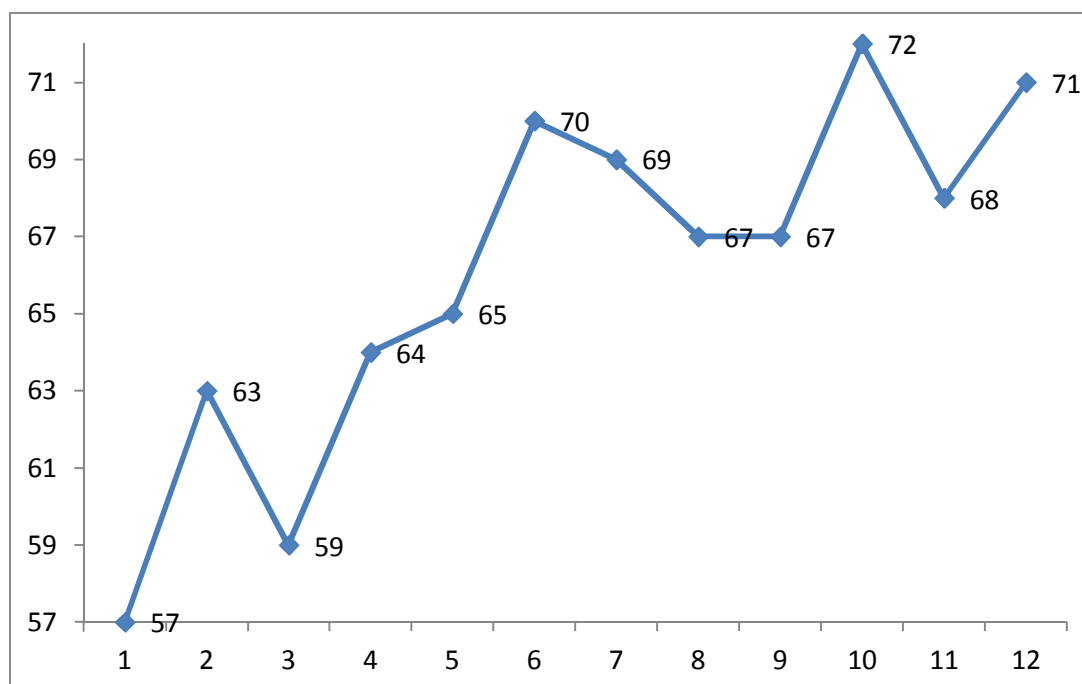


Рис. 1. Динамика индекса потребительских настроений за период 2016 г.

Рассчитаем параметры гармоник (табл. 2).

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{792}{12} = 66,00$$

$$a_1 = \frac{2 \sum y \cos t}{12} = \frac{2 \cdot (-17,1)}{12} = -2,850$$

$$a_2 = \frac{2 \sum y \cos 2t}{12} = \frac{2 \cdot (-4,0)}{12} = -0,667$$

$$a_3 = \frac{2 \sum y \cos 3t}{12} = \frac{2 \cdot (-7)}{12} = -1,2$$

$$a_4 = \frac{2 \sum y \cos 4t}{12} = \frac{2 \cdot (-3)}{12} = -0,5$$

$$b_1 = \frac{2 \sum y \sin t}{12} = \frac{2 \cdot (-3,464)}{12} = -3,338$$

$$b_2 = \frac{2 \sum y \sin 2t}{12} = \frac{2 \cdot (-15,6)}{12} = -2,598$$

$$b_3 = \frac{2 \sum y \sin 3t}{12} = \frac{2 \cdot 3}{12} = 0,5$$

$$b_4 = \frac{2 \sum y \sin 4t}{12} = \frac{2 \cdot (-3,464)}{12} = -0,577$$

Уравнение гармоника 1-го порядка (при $k = 1$) имеет вид:

$$\hat{y}_t(1) = 66,0 - 2,850 \cos t - 3,338 \sin t;$$

уравнение гармоника 2-го порядка ($k = 2$):

$$\hat{y}_t(2) = 66,0 - 2,850 \cos t - 3,338 \sin t - 0,667 \cos 2t - 2,598 \sin 2t;$$

уравнение гармоника 3-го порядка ($k = 3$):

$$\hat{y}_t(3) = 66,0 - 2,850 \cos t - 3,338 \sin t - 0,667 \cos 2t - 2,598 \sin 2t - 1,2 \cos 3t + 0,5 \sin 3t;$$

уравнение гармоника 4-го порядка ($k = 4$):

$$\hat{y}_t(4) = 66,0 - 2,850 \cos t - 3,338 \sin t - 0,667 \cos 2t - 2,598 \sin 2t - 1,2 \cos 3t + 0,5 \sin 3t - 0,5 \cos 4t - 0,577 \sin 4t.$$

Выберем наилучшую модель. Для этого рассчитаем остаточную дисперсию по формуле:

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y}_t)^2}{n}.$$

Промежуточные вычисления поместим в табл. 3.

Таблица 3

Расчетная таблица для определения величины остаточной дисперсии

Месяц	t	Индекс, y	Вываженные по уровню значения			
			$\hat{y}_t(1)$	$\hat{y}_t(2)$	$\hat{y}_t(3)$	$\hat{y}_t(4)$
Январь	0	57	63,2	62,5	61,3	60,8
Февраль	0,524	63	61,9	59,3	59,1	58,9
Март	1,047	59	61,7	59,8	60,3	61,0
Апрель	1,571	64	62,7	63,3	62,8	62,3
Май	2,094	65	64,5	67,1	66,6	66,3
Июнь	2,618	70	66,8	68,7	69,9	70,6
Июль	3,142	69	68,8	68,2	69,3	68,8
Август	3,665	67	70,1	67,6	66,4	66,2
Сентябрь	4,189	67	70,3	68,4	66,6	67,3
Октябрь	4,712	72	69,3	70,0	70,5	70,0
Ноябрь	5,236	68	67,5	70,0	71,9	71,6
Декабрь	5,76	71	65,2	67,1	67,3	68,0
Сумма		792	792	792	792	792

Продолжение табл. 3

Квадрат отклонений эмпирических значений от выравненных $(y - \hat{y}_t)^2$				
Для первой гармоника	Для второй гармоника	Для третьей гармоника	Для четвертой гармоника	
37,8	30,1	18,6	14,6	
1,3	13,8	14,9	16,9	
7,2	0,6	1,7	4,2	
1,8	0,5	1,4	2,8	
0,2	4,5	2,5	1,8	
10,2	1,6	0,0	0,4	
0,0	0,7	0,1	0,0	
9,8	0,3	0,3	0,7	
11,0	2,0	0,2	0,1	
7,1	4,0	2,2	4,0	
0,3	4,2	14,9	13,0	
33,6	15,1	14,0	9,0	
Сумма	120,4	77	70,9	67

Тогда остаточная дисперсия:

для первой гармоника равна: $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{120,4}{12} = 10,0$;

для второй гармоника: $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{77,0}{12} = 6,4$;

для третьей гармоника: $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{70,9}{12} = 5,9$;

для четвертой гармоника: $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{67}{12} = 5,6$.

Таким образом, наилучшей моделью необходимо признать уравнение гармоника 4-го порядка, которая имеет наименьшую величину остаточной дисперсии.

$$5,6 < 5,9 < 6,4 < 10,0.$$

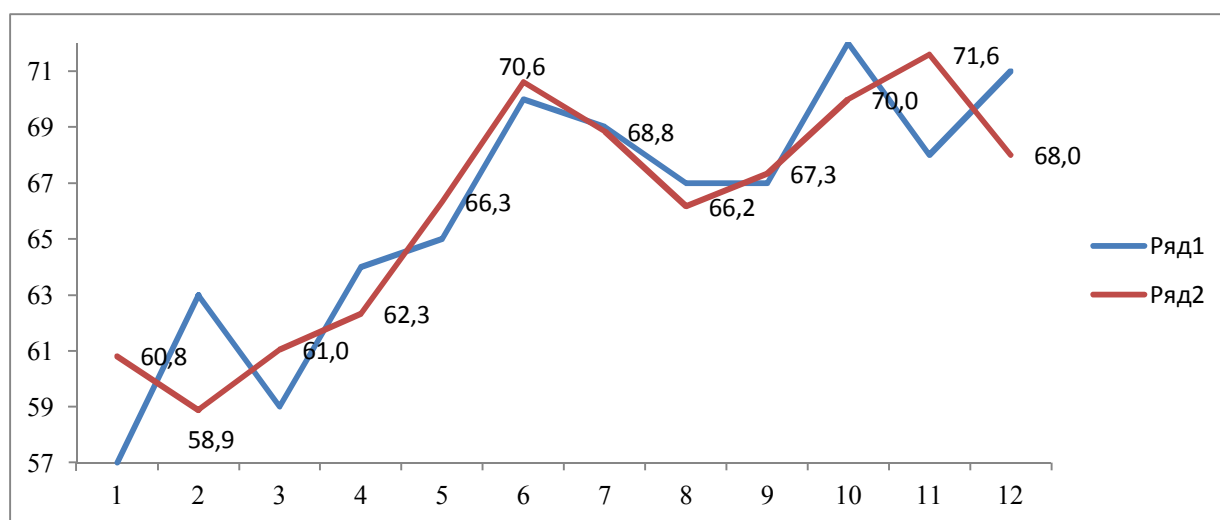


Рис. 2. Результаты выравнивания динамики индекса потребительских настроений по ряду Фурье

На рис. 2 представлен график эмпирических значений динамического ряда с нанесенной на него выбранной линией тренда. Ряд 2 представляет сглаженные значения по 4-й гармонике.

Используем критерий Дарбина-Уотсона для проверки адекватности выбранного вида уравнения тренда.

Расчетная величина критерия определяется по формуле:

$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2},$$

где ε_t – отклонения фактического уровня ряда от его выравненного значения ($\varepsilon_t = y_i - \hat{y}_x$).

Таблица 4

Расчетная таблица для вычисления значения критерия Дарбина-Уотсона

Индекс, у	Выравненные значения по 4-й гармонике \hat{y}_x	Остаточные величины $\varepsilon_t = y_i - \bar{y}_t$	ε_{t+1}	ε_t^2	$\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t$	$(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)^2$
57	60,8	-6,2	1,1	37,8	7,3	53,1
63	58,9	1,1	-2,7	1,3	-3,8	14,6
59	61,0	-2,7	1,3	7,2	4,0	16,2
64	62,3	1,3	0,5	1,8	-0,9	0,8
65	66,3	0,5	3,2	0,2	2,7	7,5
70	70,6	3,2	0,2	10,2	-3,1	9,3
69	68,8	0,2	-3,1	0,0	-3,3	10,8
67	66,2	-3,1	-3,3	9,8	-0,2	0,0
67	67,3	-3,3	2,7	11,0	6,0	35,7
72	70,0	2,7	0,5	7,1	-2,1	4,5
68	71,6	0,5	5,8	0,3	5,3	27,7
71	68,0	5,8	-	33,6		
Сумма	792	791,8		120,4		180,2

Тогда расчетное значение критерия равно:

$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2} = \frac{180,2}{120,4} = 1,5.$$

Полученная величина находится в интервале от 0 до 2. По стандартным таблицам данного критерия находим значения нижней и верхней границ доверительного интервала. Для $n = 12$ они соответственно равны: $d_1 = 0,97$ и $d_2 = 1,33$. Так как $d > d_2$ или $1,5 > 1,33$ автокорреляция отсутствует. Автокорреляция в ряду остаточных величин отсутствует и выбранную модель тренда можно считать адекватной.

Таким образом, при сохранении экономических условий, которые наблюдались в 2016 г., можно прогнозировать значения индекса потребительских настроений на уровне: январь – 60,8, февраль – 58,9, ..., декабрь – 68 (см. табл. 4).

Применение метода Фурье в моделировании индекса ИПН обеспечит краткосрочное прогнозирование развития российской экономики и даст возможность реальному сектору потенциал своевременно реагировать на изменения экономической ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухина И.А. Анализ социально-политической среды в государственном и муниципальном управлении: учеб. пособие. Ижевск, 2017.
2. Мухин А.А., Мухина И.А. Статистические методы изучения эффективности государственного и муниципального управления / Право и государство: теория и практика. М., 2010. № 8. С. 33-38.
3. Мухин А.А. Основы математического моделирования социально-экономических процессов. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2017. 190 с.
4. Постановление Правительства РФ от 02.06.2008г. № 420 (ред. 02.11.2013г.) «О Федеральной службе государственной статистики» // Собрание законодательства РФ, 09.06.2008, № 23, ст. 2710.
5. Федеральная служба государственной статистики. URL: <http://www.gks.ru/>.
6. Левада Центр. URL: <http://www.levada.ru/indikatory/sotsialno-ekonomicheskie-indikatory/>.

Поступила в редакцию 17.10.17

A.A. Mukhin

APPLICATION OF THE FOURIER METHOD IN MODELING THE INDEX OF CONSUMER SENTIMENT IN THE RUSSIAN FEDERATION

The article discusses the application of the Fourier method in modeling the index of consumer sentiment in Russia. Analytical alignment of the line using the Fourier series is carried out. Harmonics of 1, 2, 3 and 4-th order are used. Parameters of the equations of harmonics of the Fourier series are calculated based on least squares method. The graphs are analyzed for the presence of seasonal waves in the variation; a choice in favor of alignment by the Fourier series is made. Parameters of harmonics with the help of the table are calculated. The amount of residual dispersion is determined. The best model that has the smallest value of the residual dispersion is selected. A graph of the empirical values of the dynamic series with the selected trend line applied to it is presented. The criterion of Durbin-Watson to check the adequacy of the selected trend equations is used. The presence of autocorrelation in the residual values is tested. According to the standard tables of the criteria, values of lower and upper bounds of the confidence interval are found. For $n = 12$ they are respectively equal to: $d_1 = 0,97$ and $d_2 = 1,33$. As $d > d_2$ or $1,5 > 1,33$ autocorrelation is absent. The obtained value is in the range from 0 to 2. Autocorrelation in the series of residual values is absent and the selected trend model can be considered adequate. This information can serve as an important tool for the management of different economic agents of the market.

Keywords: application of the Fourier method in modeling the index of consumer sentiment in Russia, calculation of the parameters of the harmonics by the method of least squares, residual variance, application of the criterion of Durbin-Watson to check the adequacy of the selected trend equation, no autocorrelation in residual values, adequacy of the model.

Мухин Алексей Арьевич,
кандидат юридических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)

Mukhin A.A.,
Candidate of Law, Associate Professor
Udmurt State University
Universitetskaya st., 1/4, Izhevsk, Russia, 426034