

УДК [330.55:303.094.5]:311

*А.А. Мухин***ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ**

В современной экономике все больше и больше происходит процесс изучения независимых и альтернативных подходов изучения бизнеса (организации). К таким альтернативным подходам современности относятся: «неоклассическая теория», «теория транзакционных издержек» (теория специфических активов), «теория неполных контрактов» (теория прав собственности), а также «агентская теория» (теория стимулов).

Такие интегрированные системы и подходы экономики и менеджмента, как «ресурсная теория», «теория знаний», «стратегическая теория», «предпринимательская теория», «сетевая теория», «теория ресурсной зависимости», «теория институционального изоморфизма», «теория ситуационного выбора», «теория стратегического выбора», в настоящее время перспективны и актуальны.

Рассматривается базовая модель неоклассической теории. Главное превосходство этой теории выражается в том, что она предопределяет технологическую составляющую в целом по экономике в широком смысле понимания, и зависит от масштабов деятельности экономического субъекта. При этом данная теория предусматривает отражение экономии в деятельности экономического субъекта с учетом масштабов деятельности и бизнес-процессов (факторов), характеризующих объемы производства и оборота организаций.

В рамках рассматриваемого подхода определяется некоторая макроструктура, осуществляющая затраты экономических ресурсов: основные фонды, численность занятых, которые влияют на оборот организаций. Задача рационального ведения хозяйствования, с которой встречается Удмуртская Республика, заключается в определении прогноза оборота организаций при заданных ресурсах и в расчете необходимых для ее стоимости основных фондов, численности занятых. Выявлено, что экономика сельских районов Удмуртии имеет незначительный эффект от масштаба ресурсов, так как при одновременном росте труда и капитала на 1 % оборот организаций увеличивается на 1,82 %, причем конечный продукт в наибольшей степени зависит от состояния рабочей силы, так как современное состояние применяемого оборудования находится в критическом состоянии по уровню износа и эффективности.

Ключевые слова: моделирование, комплексное исследование, прогнозирование, оценка.

DOI: 10.35634/2412-9593-2020-30-6-822-829

В современной экономике назрела необходимость применения новых интегрированных систем и подходов для целей определения макроструктур экономического субъекта.

Макроструктура экономического субъекта с учетом функций – экономических показателей, производственных показателей и других функционально-технических показателей показывают систему целостности организации.

Производственная функция – это статистически значимая связь (технологическая связь) между совокупным выпуском (доходом) и объемами используемых ресурсов [1; 2].

Производственные функции могут быть определены для производственных систем различных масштабов – от производственного участка до мировой экономики. Каждая производственная система характеризуется собственной производственной функцией.

Аппарат производственных функций широко используется в микроэкономическом и макроэкономическом анализе при моделировании производственных процессов. С помощью производственных функций можно оценить эффективность функционирования системы и использования отдельных производственных факторов, определить возможности и последствия замещения одних факторов производства другими, найти влияние масштаба производства на его эффективность, изучить воздействие управленческих и технологических инноваций на производственные процессы.

Нахождение производственной функции для реальной производственной системы представляет задачу, которая решается статистическими методами обработки эмпирических данных. В общем виде производственную функцию можно записать следующим образом:

$$q = f(x) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

где q – размер выпуска; x_j – количество j -го ресурса.

Как правило, делается предположение, что структура производит только один продукт и ее производственная функция непрерывна дифференцируема.

Рассмотрим понятие кривой замещения, кривой безразличия для производителей – изокванты. *Изокванта* – это кривая, которая показывает все возможные комбинации факторов производства, которые обеспечивают одинаковый объем производства. Введение изоквант состоит в том, что они наглядно показывают возможность замещения одного фактора производства другим.

Изокванты обладают следующими свойствами:

- изокванты не пересекаются друг с другом;
- в области определения производственной функции (экономической области) изокванты имеют отрицательный наклон и вогнуты по отношению к началу координат;
- большему выпуску продукции соответствует изокванта, более удаленная от начала координат;
- если все ресурсы абсолютно необходимы для производства, то изокванты не имеют общих точек с осями координат.

Для количественной характеристики скорости изменения предельной нормы замещения вдоль изокванты используется понятие *эластичности замещения ресурсов*. Эластичность замещения ресурсов имеет следующий экономический смысл: она приближенно показывает, на сколько процентов должно измениться отношение ресурсов при движении вдоль изокванты, чтобы при этом предельная норма замещения γ изменилась на 1 %. Эластичность замещения характеризует кривизну изоквант.

В случае однородных производственных функций эластичность замещения ресурсов может быть определена по формуле:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{MP_i(x) \cdot MP_j(x)}{(1 - q)MP_i(x) \cdot MP_j(x) + qf(x)f(x)''_{ij}},$$

где q – степень однородности.

Рассмотрим один из видов производственных функций, степенную производственную функцию, производственную функцию Кобба-Дугласа.

Степенная производственная функция с n ресурсами имеет следующий вид:

$$q = f(x) = a_0 \prod_{j=1}^n x_j^{a_j} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

где q – объем выпуска, x_j – количество j – го фактора, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – положительные параметры ($a_j < 1$ для всех $j=1, 2, \dots, n$).

Наиболее известным видом производственной функции является функция Кобба-Дугласа:

$$q = f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где x_1 – объем производственных фондов (капитал) в стоимостном или натуральном выражении, x_2 – объем трудовых ресурсов в стоимостном или натуральном выражении, q – выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении, a_0, a_1, a_2 – постоянные величины.

Если ($a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 + a_2 \leq 1$), то функция Кобба-Дугласа удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям, предъявляемым к производственным функциям.

Современные процессы развития экономики муниципалитетов требуют рассмотрения процессов эффективности развития с научных позиций экономико-математического моделирования [3;4]. Проведем комплексное исследование функции Кобба-Дугласа. В табл. 1 приведены данные об обороте организаций q , стоимости основных фондов x_1 , численности занятых x_2 за год по УР. Используя исходные данные, требуется:

- 1) определить параметры производственной функции Кобба-Дугласа $q = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$;
- 2) рассчитать основные экономико-математические характеристики производственной функции;
- 3) спрогнозировать оборот организаций для заданных средних значений ($x_1 = 1367$ и $x_2 = 4746$);
- 4) построить изокванты для показателей оборота организаций:
 - а) для заданных средних значениях ($x_1 = 1367$ и $x_2 = 4746$);
 - б) при уменьшении заданных значений в два раза.

Таблица 1

Данные по Удмуртской Республике за 2017 год [5]

№ п.п.	Районы УР	Оборот организаций, млн руб., q	Стоимость основных фондов, млн руб., x_1	Численность занятых, чел., x_2
1.	Алнашский	2787,2	1288,184	4195
2.	Балезинский	9860,9	2433,673	7535
3.	Вавожский	2138,8	1326,755	3198
4.	Воткинский	48977,1	1383,027	5405
5.	Глазовский	4830,8	1174,598	3497
6.	Граховский	696,7	500,2774	1721
7.	Дебесский	1532,2	814,6992	2867
8.	Завьяловский	21675,7	4289,19	13180
9.	Игринский	22334,5	1459,626	7751
10.	Камбарский	5602,7	1268,335	3706
11.	Каракулинский	19122,2	586,1064	3331
12.	Кезский	7285,3	1410,556	4266
13.	Кизнерский	1589,8	596,3904	4519
14.	Киясовский	1171,1	424,9752	1876
15.	Красногорский	1900,5	870,609	1694
16.	М.Пургинский	3300,4	1349,883	4437
17.	Можгинский	1805,9	1582,984	4385
18.	Сарапульский	14195,9	1139,236	4575
19.	Селтинский	989,5	646,0793	2094
20.	Сюмсинский	588,7	598,7145	1969
21.	Увинский	23613,4	2639,122	10342
22.	Шарканский	7805,2	1041,926	3373
23.	Юкаменский	490	388,064	1442
24.	Як-Бодьинский	19480,5	797,3	4275
25.	Ярский	1131,1	1068,572	2226

Таблица 2

Исходные данные для построения функции Кобба–Дугласа

Районы УР	1	2	3	4	5	6	7	8	...	23	24	25	Прогноз
q	2787	9861	2139	48977	4831	697	1532	21676	...	490	19481	1131	
x_1	1288	2434	1327	1383	1175	500	815	4289	...	388	797	1069	1367
x_2	4195	7535	3198	5405	3497	1721	2867	13180	...	1442	4275	2226	4746

Таблица 3

Прологарифмированные исходные данные

Районы УР	1	2	3	4	5	6	7	8	...	23	24	25
q	7,933	9,196	7,668	10,799	8,483	6,546	7,334	9,984	...	6,194	9,877	7,031
x_1	7,161	7,797	7,190	7,232	7,069	6,215	6,703	8,364	...	5,961	6,681	6,974
x_2	8,342	8,927	8,070	8,595	8,160	7,451	7,961	9,486	...	7,274	8,361	7,708

Решение

I. *Определение неизвестных параметров a_0, a_1, a_2 производственной функции.*

Прологарифмируем функцию Кобба-Дугласа:

$$\ln(q) = \ln(a_0) + a_1 \ln(x_1) + a_2 \ln(x_2).$$

Пусть $Q = \ln(q), A_0 = \ln(a_0), X_1 = \ln(x_1), X_2 = \ln(x_2)$, тогда в новых обозначениях получим:

$$Q = A_0 + a_1X_1 + a_2X_2.$$

Таким образом, получив функцию линейного вида, определяем неизвестные параметры A_0, a_1, a_2 с помощью метода наименьших квадратов и использования программного продукта *Excel*.

Полученные значения параметров $a_0 = 0,001$; $a_1 = -0,49$; $a_2 = 2,31$ удовлетворяют требованиям $a_0 > 0, a_2 > 0$.

$$a_0 = \exp(A_0) = \exp(-7,224) = 0,001.$$

Достоверность аппроксимации полученного уравнения производственной функции Кобба-Дугласа $q = 0,001x_1^{-0,49}x_2^{2,31}$

достаточно высока и составляет $R^2 = 0,64$.

II. *Определение экономико-математических характеристик производственной функции Кобба-Дугласа* $q = f(x_1, x_2) = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$

Таблица 4

Экономико-математические характеристики функции Кобба-Дугласа

№ п/п	Показатель	Значения
1.	Средняя фондоотдача	4,8
2.	Средняя производительность	1,4
3.	Предельная фондоотдача	-2,3
4.	Предельная производительность труда	3,2
5.	Эластичность оборота организаций по производственным фондам	-0,5
6.	Эластичность оборота организаций по численности занятых	2,3
7.	Эластичность оборота	1,8
8.	Фондовооруженность	0,3
9.	Предельная норма замещения фондов численностью занятых	0,7
10.	Прогноз оборота организаций при заданных ресурсах	6516,5

1. Средняя фондоотдача при $x_1 = 1367, x_2 = 4746$:

$$AP_1 = \frac{q}{x_1} = \frac{a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}}{x_1} = a_0x_1^{a_1-1}x_2^{a_2} = 0,001 \cdot 1367^{-0,49-1} \cdot 4746^{2,31} = 4,8.$$

При увеличении стоимости основных фондов x_1 (при неизменной численности занятых x_2) средняя фондоотдача снижается. Увеличение же численности занятых x_2 (при неизменной стоимости основных фондов x_1) ведет к росту оборота организаций.

2. Средняя производительность при $x_1 = 1367, x_2 = 4746$:

$$AP_2 = \frac{q}{x_2} = \frac{a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}}{x_2} = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2-1} = 0,001 \cdot (-0,49) \cdot 1367^{-0,49-1} \cdot 4746^{2,31} = 1,4.$$

3. Предельная фондоотдача при $x_1 = 1367, x_2 = 4746$

$$MP_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial(a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2})}{\partial x_1} = a_0a_1x_1^{a_1-1}x_2^{a_2} = 0,001 \cdot (-0,49) \cdot 1367^{-0,49-1} \cdot 4746^{2,31} = -2,3.$$

Таким образом, с увеличением стоимости основных фондов (при неизменных значениях численности занятых) предельная фондоотдача снижается. Увеличение численности занятых (при неизменных значениях стоимости основных фондов) ведет к росту предельной фондоотдачи. Одновременное изменение обеих переменных может приводить к различным результатам. Если $a_0 > 0, a_1 < 0, a_2 > 0$, то $AP_1 > MP_1$.

4. Предельная производительность труда при $x_1 = 1367, x_2 = 4746$:

$$MP_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{\partial(a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2})}{\partial x_2} = a_0a_2x_1^{a_1}x_2^{a_2-1} = 0,001 \cdot 2,31 \cdot 1367^{-0,49} \cdot 4746^{2,31-1} = 3,2.$$

Если $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то также средняя производительность труда больше предельной, то есть $AP_2 > MP_2$.

5. Эластичность оборота организаций по производственным фондам:

$$\xi_1 = MP_1/AP_1 = \frac{a_0 a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}} = \frac{-2,3}{4,8} = a_1 = -0,49.$$

Данный показатель указывает, что при увеличении затрат по фондам на 1% оборот организаций предельно уменьшается на 0,49%.

6. Эластичность оборота организаций по численности занятых:

$$\xi_2 = MP_2/AP_2 = \frac{a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}}{a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}} = \frac{3,2}{1,4} = a_2 = 2,31.$$

7. Эластичность оборота:

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^2 \xi_j(x) = \xi_1 + \xi_2 = -0,49 + 2,31 = 1,82.$$

8. Фондовооруженность труда (объем фондов, приходящийся на одну единицу труда) при $x_1 = 1367$, $x_2 = 4746$:

$$f = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1367}{4746} = 0,288.$$

Увеличение численности занятых (при неизменных значениях стоимости основных фондов) снижает фондовооруженность, а увеличение оборота организаций ведёт к увеличению фондовооружённости, если объем использования трудовых ресурсов не изменился.

9. Предельная норма замещения производительных фондов численностью, занятых при $x_1 = 1367$, $x_2 = 4746$

$$\gamma = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{a_0 a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}} = -\frac{a_1 x_2}{a_2 x_1} = \frac{-2,3}{3,2} = 0,74.$$

10. Эластичность замещения ресурсов определяется по формуле:

$$\varepsilon_{12} = \frac{MP_1(x) \cdot MP_2(x)}{(1 - q)MP_1(x) \cdot MP_2(x) + qf(x)f(x)''_{12}}.$$

Для функции Кобба-Дугласа при степени однородности $q = a_1 + a_2$ получаем $\varepsilon_{12} = 1,8$.

Таким образом, изменению фондовооруженности труда 1% соответствует предельной норме замещения также на 1,8 %.

III. *Определение прогноза оборота организаций* при $x_1 = 1367$, $x_2 = 4746$

Используя найденные значения параметров функции Кобба-Дугласа и исходные значения затрат, получаем прогнозное значение оборота организаций:

$$q_{\text{прогнозное}} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} = 0,001 \cdot 1367^{-0,49} \cdot 4746^{2,31} = 6517,$$

$$q_{\text{прогнозное}} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} = 0,001 \cdot 684^{-0,49} \cdot 2373^{2,31} = 1848.$$

IV. *Построение изоквант.* Уравнение изокванты имеет следующий вид:

$$x_2 = \left(\frac{q}{a_0 x_1^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2}}.$$

Подставляя в управление изокванты значения параметров производственной функции при различных значениях уровня оборота, строим графики (рис. 1).

Таблица 5

Моделирование объемов оборотов

	$a_0 = 0,001$		$a_1 = -0,49$		$a_2 = 2,31$
	$x_1 = 1367$		$x_2 = 4746$		$q^I = 6567$
x_1	5	10	15	20	25
$x_2 = \left(\frac{q^I}{a_0 x_1^{a_1}}\right)^{1/a_2}$	1434	1662	1813	1927	2021
	$x_1 = 1367$		$x_2 = 4746$		$q^{II} = 1848$
x_1	5	10	15	20	25
$x_2 = \left(\frac{q^{II}}{a_0 x_1^{a_1}}\right)^{1/a_2}$	831	964	1051	1117	1172

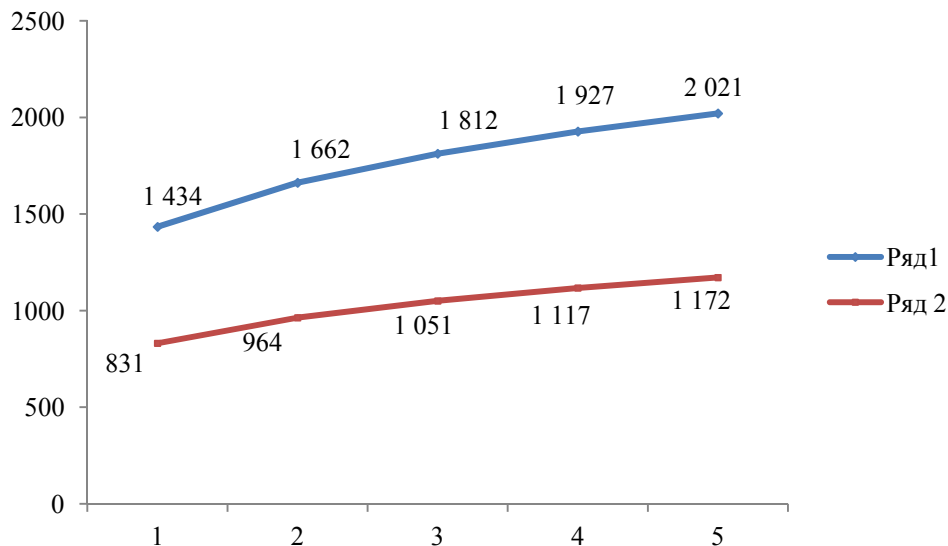


Рис. 1. Изокванты производственной функции Кобба-Дугласа

Выводы

1. Для экономики сельских муниципальных образований Удмуртии зависимость оборота организаций q (как результат производственной деятельности) от стоимости основных фондов x_1 , численности занятых x_2 описывается уравнением производственной функции Кобба-Дугласа

$$q = 0,001x_1^{-0,49}x_2^{2,31}.$$

На основе коэффициентов выявлено, что суммарное влияние двух факторов составляет 1,82 (-0,49+2,31). Это означает, что экономика сельских районов Удмуртии имеет незначительный эффект от масштаба ресурсов, так как при одновременном росте труда и капитала на 1 % оборот организаций увеличивается на 1,82 %.

2. Определена средняя фондоотдача, которая составила 4,8 руб. оборота на 1 руб. основных фондов. Средняя производительность труда составила 1,4 млн руб. на 1 работающего. Соответственно при заданных средних значениях рассчитан прогноз выпуска и реализации продукта (величина оборота), который может составить максимальное значение 6517 млн руб. на 1 район или в масштабах экономики 162,9 млрд руб. При имеющихся ресурсах более этого значения результат пока не достигим.

3. Согласно значению параметра $A=0,001$ выявлено очень низкое влияние технического прогресса в сельской экономике Удмуртии. Принято считать, что возрастание величины A указывает на увели-

чение выпуска продукта при прежних количествах труда и капитала. Низкую эффективность применяемых технологий отражает и действие закона убывающей отдачи факторов, которое показало, что при увеличении затрат по фондам на 1 % оборот организаций предельно уменьшается на 0,49 %.

4. Экономике сельских районов можно назвать трудоемкой. Наиболее значимым фактором выступает численность работающих, и их производительность. Предприятиям следует увеличивать среднюю производительность труда почти в 2,2 раза (до уровня предельной производительности труда 3,2 млн руб. на 1 чел.).

С одной стороны, это обусловлено спецификой сельскохозяйственного производства, в котором затраты труда всегда значительно выше, чем в других отраслях. Но при имеющемся уровне технологий повысить производительность труда не реально. На современных предприятиях очень высокий износ оборудования (более 60 %), поэтому реальная отдача от применяемого оборудования низкая, и конечный продукт в большей степени зависит от людских ресурсов.

Нужен новый качественный скачок в инновационном и инвестиционном развитии сельской экономики, пересмотр реального состояния физического капитала, приобретаемого хозяйствующими субъектами АПК.

5. Полученные результаты рекомендуются для ориентира хозяйственной деятельности самих предприятий муниципальных районов Удмуртии, органам муниципального управления для анализа состояния развития производства и разработки мер по регулированию поддержки экономики, для органов регионального управления при формировании программ инвестиционного развития и оценки эффективности бизнес-проектов, подлежащих субсидированию со стороны государства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hassani Ashkan. Applications of Cobb-Douglas Production Function in Construction Time-Cost Analysis" (2012). Construction Systems. Dissertations & Theses. 13. URL: <https://digitalcommons.unl.edu/constructiondiss/13>.
2. Глебова О.В. Методы принятия управленческих решений: учеб. пособие. Саратов: Вузовское образование, 2017.
3. Баранов С.В. Эконометрические модели производственных функций: история и современность // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 10-2. С. 53–57. URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=5996> (дата обращения: 18.01.2020).
4. Chazova I.Yu., Mukhina I.A. Effectiveness of administration of economic entities in state and municipal ownership // Advances in Economics, Business and Management Research Proceedings of the International Science and Technology Conference "FarEastCon" (ISCFEC 2019). Far Eastern Federal University. 2019. С. 208–211.
5. Социально-экономическое положение городских округов и муниципальных районов Удмуртской Республики: ст. сб. / Удмуртстат. Ижевск, 2019. 188 с.

Поступила в редакцию 18.10.2020

Мухин Алексей Арьевич, кандидат юридических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)

A.A. Mukhin

THE USE OF COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION IN MODELING PRODUCTION PROCESSES

DOI: 10.35634/2412-9593-2020-30-6-822-829

Several alternative economic approaches to the study of organization are discussed in the literature: the neoclassical theory, the theory of transaction costs (the theory of specific assets), the theory of incomplete contracts (the theory of property rights), and the Agency theory (the theory of incentives). Recently, there have been approaches at the intersection of Economics and management: resource theory, knowledge theory, strategic theory, entrepreneurial theory; in the framework of sociology: network theory, the theory of resource dependence, the theory of institutional isomorphism, the theory of situational choice, the theory of strategic choice.

The article deals with the basic model of neoclassical theory. The advantage of the neoclassical theory is that it emphasizes the role of technology in General and economies of scale in particular as factors that influence the size of production, turnover of organizations. Within the framework of the considered approach, a certain macrostructure is determined that carries out the costs of economic resources: fixed assets, the number of employees that affect the turnover of

organizations. The task of rational economic management, which meets the Udmurt Republic, is to determine the forecast of turnover of organizations with the given resources and to calculate the necessary for its value of fixed assets, the number of employees.

Keywords: production function, production systems, efficiency of system functioning and use of separate production factors, influence of scale of production on its efficiency, influence of administrative and technological innovations on production processes, turnover of the organizations, cost of fixed assets, number of employees.

Поступила в редакцию 18.10.2020

Mukhin A.A., Candidate of Law, Associate Professor
Udmurt State University
Universitetskaya st., 1/4, Izhevsk, Russia, 426034