УДК 517.958, 517.984.5

© **Л. И. Данилов**

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматривается двумерный оператор Шрёдингера $\widehat{H}_B+V$ с однородным магнитным полем B и периодическим электрическим потенциалом V. Доказано отсутствие в спектре оператора $\widehat{H}_B+V$ собственных значений (бесконечной кратности), если электрический потенциал V — непостоянный тригонометрический многочлен и для магнитного потока выполнено условие $(2\pi)^{-1}Bv(K)=Q^{-1}$, $Q\in\mathbb{N}$, где $v(K)$ — площадь элементарной ячейки K решетки периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ потенциала V. В этом случае отсутствует сингулярная составляющая спектра, поэтому спектр абсолютно непрерывен. В статье используется магнитно-блоховская теория. От решетки периодов Λ перейдем к решетке $\Lambda_Q=\{N_1QE^1+N_2E^2 : N_j\in\mathbb{Z}, j=1,2\}$, где E^1 и E^2 — базисные векторы решетки Λ. Оператор $\widehat{H}_B+V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов $\widehat{H}_B(k)+V$, $k\in 2\pi K^*_Q$, действующих в пространстве магнитно-блоховских функций, где K^*_Q — элементарная ячейка обратной решетки $\Lambda^*_Q\subset\mathbb{R}^2$. Доказательство отсутствия собственных значений в спектре оператора $\widehat{H}_B+V$ основано на следующем утверждении: если λ — собственное значение оператора $\widehat{H}_B+V$, то λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)+V$ при всех k, $\varkappa\in\mathbb{R}^2$ и, более того (при заданных условиях на V и B), существует вектор $k_0\in\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ такой, что собственные функции операторов $\widehat{H}_B(k+\zeta k_0)+V$, $\zeta\in\mathbb{C}$, являются тригонометрическими многочленами $\sum\zeta^j\Phi_j$ от ζ.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, спектр, периодический электрический потенциал, однородное магнитное поле.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-01

Введение

Рассматривается двумерный оператор Шрёдингера

$$\widehat{H}(A)+V=\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1\right)^2+\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-A_2\right)^2+V, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$, где $A_j:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $j=1,2$, — компоненты магнитного (векторного) потенциала и $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ — электрический (скалярный) потенциал. Магнитный потенциал A определяет магнитное поле $B(x)=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$, $x\in\mathbb{R}^2$. Координаты в $\mathbb{R}^2$ задаются в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2.

В настоящей работе исследуется спектр оператора

$$\widehat{H}_B+V=\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2+\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\right)^2+V, \tag{0.2}$$

который получается из (0.1) при $A_1(x)\equiv 0$ и $A_2(x)=Bx_1$. Оператор (0.2) соответствует (в калибровке Ландау) однородному магнитному полю, для которого $B(x)\equiv B\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. В дальнейшем будем считать, что $B>0$ (если $B<0$, то можно сделать замену $x_2\mapsto -x_2$). Электрический потенциал V выбирается периодическим с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$. Пусть E^1, E^2 — базисные векторы решетки Λ: $\Lambda=\{N_1E^1+N_2E^2 : N_1,\,N_2\in\mathbb{Z}\}$; $E^l_j=(E^l,e_j)$, l, $j=1,2$ (через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ обозначаются скалярное произведение и длина векторов из $\mathbb{R}^2$). Не ограничивая общности, можно считать, что $E^1_1>0$, $E^1_2=0$ и $E^2_2>0$. Через $K=\{\xi_1E^1+\xi_2E^2 : 0\leqslant\xi_j<1,\ j=1,2\}$ обозначается элементарная ячейка решетки Λ (имеющая площадь $v(K)=E^1_1E^2_2$). В данной работе будет предполагаться, что поток $\eta=\frac{1}{2\pi}Bv(K)$ магнитного поля через элементарную ячейку K — рациональное число ($\eta\in\mathbb{Q}$).

Оператор Шрёдингера (0.1) с периодическим (в частности, однородным) магнитным полем и периодическим (с той же решеткой периодов) электрическим потенциалом рассматривался в обзорной статье [1]. При $\eta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ о спектре оператора (0.2) известно не так много. Если $\eta \in \mathbb{Q}$, то при исследовании спектра оператора Шрёдингера (0.2) используется магнитно-блоховская теория (подробное изложение которой на языке разложения оператора Шрёдингера в прямой интеграл операторов, имеющих дискретный спектр, приведено в [2]). Спектр оператора

$$\widehat{H}_B = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1 \right)^2$$

(оператора (0.2) при $V \equiv 0$) состоит из собственных значений $\lambda = (2m+1)B$, $m \in \mathbb{Z}_+ \doteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, бесконечной кратности (уровни Ландау). При $\eta \in \mathbb{Q}$ и в пределе малых периодических потенциалов V ветви закона дисперсии и спектр оператора (0.2) (в окрестности уровней Ландау $(2m+1)B$, $m \in \mathbb{Z}_+$) исследовались в [4]. В [2] (см. также [5,6]) доказано, что для периодического точечного потенциала (потенциала нулевого радиуса) V в спектре оператора Шрёдингера (0.2) все уровни Ландау $(2m+1)B$, $m \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями (бесконечной кратности), если, в частности, решетка периодов является одноатомной и $\mathbb{Q} \ni \eta > 1$. Если $\eta \in \mathbb{Q}$, то (в условиях применимости магнитно-блоховской теории) отсутствует сингулярная составляющая спектра оператора (0.2) (что непосредственно следует из результатов работы [3], см. также [2, 7]), поэтому, если нет собственных значений, спектр абсолютно непрерывен. В [8] доказано, что для любой решетки периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и любого однородного магнитного поля с $\eta \in \mathbb{Q}$ в банаховом пространстве $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ периодических с решеткой периодов Λ вещественнозначных непрерывных функций с нормой

$$\|V\|_{C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{R})} = \max_{x \in K} |V(x)|$$

существует плотное G_δ-множество (множество второй категории) такое, что для любого потенциала V из этого множества в спектре оператора (0.2) нет собственных значений (что эквивалентно абсолютной непрерывности спектра). Однако вопрос, для всех ли непостоянных ограниченных периодических потенциалов V при $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора Шрёдингера (0.2) абсолютно непрерывен, остается открытым [8].

В настоящей работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Для любого тригонометрического многочлена $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, не являющегося постоянной функцией, и любого $B > 0$, для которого $\eta \in \{Q^{-1} : Q \in \mathbb{N}\}$, спектр оператора Шрёдингера* (0.2) *абсолютно непрерывен.*

Спектр оператора (0.1) (и его обобщений) для периодических потенциалов A и V с общей решеткой периодов исследовался в [9–21]. В этих статьях доказывается абсолютная непрерывность спектра при разных условиях на A и V. В [20, 21], в частности, доказано, что спектр периодического оператора Шрёдингера (0.1) абсолютно непрерывен, если функции V и $|A|^2$ имеют нулевую грань в смысле квадратичных форм относительно свободного оператора Шрёдингера $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ (в [20, 21] приведены также более общие условия на электрический потенциал V и рассматривалась переменная периодическая метрика). При исследовании периодического оператора (0.1) использовались блоховская теория и подход Томаса [22]. Многие статьи, а также обзоры [23–25], посвящены доказательству абсолютной непрерывности спектра многомерных периодических операторов Шрёдингера (см. также [26–28] и ссылки в этих статьях).

§ 1. Магнитно-блоховская теория

В этом параграфе вводятся используемые в дальнейшем обозначения, а также приведено доказательство унитарной эквивалентности оператора (0.2) прямому интегралу операторов (1.10), что позволяет свести доказательство теоремы 0.1 к доказательству теоремы 1.2. Магнитно-блоховской теории (в калибровке Лоренца) посвящена также первая часть статьи [2].

Пусть $\eta = P/Q$, где $P, Q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа. Тогда, переходя от решетки периодов Λ к решетке (периодов) с базисными векторами QE^1 и E^2 и обозначая вектор QE^1 снова как E^1, можно считать, что $E_1^1 E_2^2 B = 2\pi P \in 2\pi\mathbb{N}$. (В условиях теоремы 0.1 $P = 1$.)

Векторы $E^1_* = (E^1_1E^2_2)^{-1}(E^2_2e_1 - E^2_1e_2)$, $E^2_* = (E^2_2)^{-1}e_2$, для которых $(E^\mu, E^\nu_*) = \delta_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 1,2$ (где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера), образуют базис обратной решетки $\Lambda^* = \{N^*_1E^1_*+$ $+N^*_2E^2_*\colon N^*_1, N^*_2 \in \mathbb{Z}\}$. Пусть K^* — элементарная ячейка решетки Λ^* (имеющая площадь $v(K^*) = (v(K))^{-1} = (E^1_1E^2_2)^{-1}$).

Обозначим через $\mathcal{H}^q_B$ пространство функций $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ из класса Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (порядка $q \geqslant 0$), для которых при почти всех (п. в.) $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x + E^\mu) = e^{iBE^\mu_1x_2}\varphi(x), \quad \mu = 1,2; \tag{1.1}$$

$\mathcal{H}_B \doteq \mathcal{H}^0_B$ — множество (измеримых по Лебегу) функций из $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих условию (1.1), $\mathcal{H}^\infty_B$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций из $\mathcal{H}_B$. На пространстве $\mathcal{H}_B$ определяется скалярное произведение $(\psi,\varphi)_B = \int_K \overline{\psi}\varphi\,dx$, $\psi,\varphi \in \mathcal{H}_B$, и соответствующая ему норма $\|\cdot\|_B$.

Для функций $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ определим функции

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \mathfrak{F}(\Phi)(x) = \sum_{\mu_1,\,\mu_2\,\in\,\mathbb{Z}} e^{-\frac{iB}{2}\,E^2_1E^2_2\mu_2(\mu_2-1)}\,e^{-iB(\mu_1E^1_1+\mu_2E^2_1)x_2}\,\Phi(x + \mu_1E^1 + \mu_2E^2),$$

которые принадлежат $\mathcal{H}^\infty_B$, и пусть

$$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \ni (k,x) \mapsto \widehat{U}(\Phi)(k;x) \doteq \mathfrak{F}(e^{-i(k,\cdot)}\,\Phi(\cdot))(x) =$$

$$= \sum_{\mu_1,\,\mu_2\,\in\,\mathbb{Z}} e^{-\frac{iB}{2}\,E^2_1E^2_2\mu_2(\mu_2-1)}\,e^{-iB(\mu_1E^1_1+\mu_2E^2_1)x_2}\,e^{-i(k,x+\mu_1E^1+\mu_2E^2)}\,\Phi(x + \mu_1E^1 + \mu_2E^2).$$

Функции $\widehat{U}(\Phi)(\cdot;\cdot)$ для всех $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ принадлежат множеству $\mathfrak{D}_B$ бесконечно дифференцируемых функций $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \ni (k,x) \mapsto \Psi(k;x) \in \mathbb{C}$ таких, что $\Psi(k;\cdot) \in \mathcal{H}^\infty_B \subset \mathcal{H}_B$ при всех $k \in \mathbb{R}^2$ и

$$\Psi(k + 2\pi E^\mu_*;x) = e^{-2\pi i\,(E^\mu_*,x)}\,\Psi(k;x) \tag{1.2}$$

при всех $\mu = 1,2$ и $k,x \in \mathbb{R}^2$. При этом для любого $k' \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x) \,=\, \int_{k'\,+\,2\pi K^*} e^{\,i(k,x)}\,\widehat{U}(\Phi)(k;x)\,\frac{dk}{(2\pi)^2v(K^*)}\,, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Если $\Psi(\cdot;\cdot) \in \mathfrak{D}_B$, то из (1.2) следует, что для всех $x \in \mathbb{R}^2$ функция $k \mapsto e^{\,i(k,x)}\,\Psi(k;x)$ является периодической с решеткой периодов $2\pi\Lambda^*$. Поэтому

$$e^{\,i(k,x)}\,\Psi(k;x) \,=\, \sum_{\mu_1,\,\mu_2\,\in\,\mathbb{Z}} \psi_{\mu_1,\,\mu_2}(x)\,e^{-i(k,\mu_1E^1+\mu_2E^2)}, \tag{1.3}$$

где $\psi_{\mu_1,\,\mu_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Из (1.1) получаем, что (для всех $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}^2$)

$$\psi_{\mu_1,\,\mu_2}(x + E^1) = e^{\,iBE^1_1x_2}\,\psi_{\mu_1+1,\,\mu_2}(x), \quad \psi_{\mu_1,\,\mu_2}(x + E^2) = e^{\,iBE^2_1x_2}\,\psi_{\mu_1,\,\mu_2+1}(x).$$

Откуда

$$\psi_{\mu_1,\,\mu_2}(x) \,=\, e^{-iB(\mu_1E^1_1+\mu_2E^2_1)x_2}\,e^{-\frac{iB}{2}\,E^2_1E^2_2\mu_2(\mu_2-1)}\,\psi_{0,0}(x + \mu_1E^1 + \mu_2E^2), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что $\psi_{0,0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и (для любого $k' \in \mathbb{R}^2$)

$$\psi_{0,0}(x) \,=\, \int_{k'\,+\,2\pi K^*} e^{\,i(k,x)}\,\Psi(k;x)\,\frac{dk}{(2\pi)^2v(K^*)}\,, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Более того, из (1.3) и (1.4) вытекает равенство $\Psi(k;x) = \widehat{U}(\psi_{0,0})(k;x)$, $k,x \in \mathbb{R}^2$. Поэтому $\widehat{U}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathfrak{D}_B$ — биективное отображение.

Для всех $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{2\pi K^*} \frac{dk}{(2\pi)^2 v(K^*)} \int_K \overline{\widehat{U}(\Phi_1)(k;x)}\, \widehat{U}(\Phi_2)(k;x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\Phi_1(x)}\, \Phi_2(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Так как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^2)$, а множество $\mathfrak{D}_B$ плотно в гильбертовом пространстве

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus} \mathcal{H}_B\, \frac{dk}{(2\pi)^2 v(K^*)}\,, \tag{1.6}$$

то отображение $\widehat{U}$ (однозначно) продолжается до унитарного отображения гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ на гильбертово пространство (1.6).

Пусть операторы $-i\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $-i\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1$, действующие в $\mathcal{H}_B$, имеют области определения $D(-i\frac{\partial}{\partial x_1}) = D(-i\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1) = \mathcal{H}^1_B$. Через

$$\widehat{H}_B(k) \;=\; \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)^2, \quad k \in \mathbb{R}^2,$$

обозначим самосопряженные операторы, также действующие в $\mathcal{H}_B$, для которых $D(\widehat{H}_B(k)) = \mathcal{H}^2_B$. Будем далее предполагать, что периодический с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ потенциал $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и, следовательно, имеет нулевую грань относительно свободного оператора Шрёдингера $-\Delta$ (см. [29, § X.2; 7, теорема XIII.96]). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C(\varepsilon) = C(V;\varepsilon) \geqslant 0$ такая, что для всех функций $\varphi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ функции $V\varphi$ принадлежат $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\left(\int_K |V\varphi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon \left(\int_K |\Delta\varphi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + C(\varepsilon)\left(\int_K |\varphi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C'(\varepsilon) = C'(\Lambda, V, B;\varepsilon) \geqslant 0$ такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{H}^2_B$ и $k \in 2\pi K^*$ функции $V\varphi$ принадлежат $\mathcal{H}_B$ и

$$\|V\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \varepsilon\, \|\widehat{H}_B(k)\varphi\|_{\mathcal{H}_B} + C'(\varepsilon)\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \tag{1.7}$$

(то есть оператор умножения на потенциал V имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{H}_B(k)$). Поэтому для всех $k \in 2\pi K^*$ оператор $\widehat{H}_B(k) + V$ самосопряжен в $\mathcal{H}_B$ и $D(\widehat{H}_B(k) + V) = \mathcal{H}^2_B$ [29, теорема X.12].

Если $W \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — периодическая функция с решеткой периодов Λ, то для всех $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и $k, x \in \mathbb{R}^2$

$$\widehat{U}(W\Phi)(k;x) \;=\; (W\widehat{U}\Phi)(k;x). \tag{1.8}$$

Приближая потенциал в пространстве $L^2(K)$ периодическими с решеткой периодов Λ бесконечно дифференцируемыми функциями $W_\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$, используя (1.5), (1.8) и выбирая подпоследовательность W_{μ_l}, $l \in \mathbb{N}$, такую, что $W_{\mu_l}(x) \to V(x)$ при $l \to +\infty$ для п. в. $x \in \mathbb{R}^2$, получаем, что для всех $k \in \mathbb{R}^2$

$$\widehat{U}(V\Phi)(k;x) \;=\; (V\widehat{U}\Phi)(k;x)$$

при п. в. $x \in \mathbb{R}^2$. Так как пространство $\mathcal{H}^\infty_B$ инвариантно при действии операторов $-i\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $-i\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1$, то для всех $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и $k, x \in \mathbb{R}^2$

$$\widehat{U}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\Phi\right)(k;x) = \left(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\widehat{U}\Phi(k;x),$$

$$\widehat{U}\left(\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\Phi\right)(k;x) = \left(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)\widehat{U}\Phi(k;x).$$

Откуда (при п. в. $x \in \mathbb{R}^2$)

$$(\widehat{H}_B + V)\Phi(x) \,=\, \widehat{U}^{-1} \int_{2\pi K^*}^{\oplus} (\widehat{H}_B(k) + V)\, \widehat{U}\Phi(k;x)\, \frac{dk}{(2\pi)^2 v(K^*)}\,. \tag{1.9}$$

С другой стороны, множество $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ является существенной областью самосопряженного оператора $\widehat{H}_B$ (так как в подпространствах собственных функций оператора $\widehat{H}_B$, отвечающих собственным значениям $\lambda = (2m+1)B$, $m \in \mathbb{Z}_+$, можно выбрать базисы из функций, принадлежащих $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$). Поэтому множество $\mathfrak{D}_B$ является существенной областью самосопряженного оператора

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus} \widehat{H}_B(k)\, \frac{dk}{(2\pi)^2 v(K^*)}$$

и, следовательно (в силу оценок (1.7)), самосопряженного оператора

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus} (\widehat{H}_B(k) + V)\, \frac{dk}{(2\pi)^2 v(K^*)}\,, \tag{1.10}$$

действующих в гильбертовом пространстве (1.6) (см., например, [29, теорема X.12]). Поэтому из (1.9) следует, что оператор $\widehat{H}_B + V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу (1.10) операторов $\widehat{H}_B(k) + V$. Следовательно, $\widehat{H}_B + V$ — самосопряженный оператор с областью определения $D(\widehat{H}_B + V) = \{\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2) \colon \widehat{U}\Phi(k;\cdot) \in \mathcal{H}^2_B$ для всех $k \in 2\pi K^*\}$ (и для которого $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ — существенная область). При этом потенциал V имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{H}_B$.

Операторы $\widehat{H}_B(k) + V$ имеют компактную резольвенту. Поэтому при всех $k \in \mathbb{R}^2$ спектр операторов $\widehat{H}_B(k) + V$ дискретен. Пусть $\lambda_j(k) \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, — собственные значения операторов $\widehat{H}_B(k) + V$ (с учетом их кратности), упорядоченные по возрастанию. Так как операторы $-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1$ имеют нулевую грань относительно операторов $\widehat{H}_B(k) + V$, $k \in \mathbb{R}^2$, то $\mathbb{R}^2 \ni k \mapsto \lambda_j(k)$ — непрерывные функции и, более того, функции $\lambda_j(\cdot)$ являются аналитическими вне их пересечений (функции $2\pi K^* \ni k \mapsto \lambda_j(k)$ называются ветвями закона дисперсии); (см. [2; 7, § XIII.16]). Из унитарной эквивалентности оператора $\widehat{H}_B + V$ прямому интегралу (1.10) операторов $\widehat{H}_B(k) + V$, $k \in 2\pi K^*$, следует, что спектр оператора $\widehat{H}_B + V$ имеет зонную структуру. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение оператора $\widehat{H}_B + V$, то λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_B(k) + V$ для всех k из некоторого подмножества ячейки $2\pi K^*$ положительной меры Лебега [7, теорема XIII.85]. Тогда из аналитической теоремы Фредгольма (см., например, [30, теорема VI.14]) следует, что λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V$ при всех $k + i\varkappa \in \mathbb{C}^2$ (см. [2; 7, § 13]). Поэтому справедлива

Т е о р е м а 1.1 (см. [2]). *Пусть $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ — периодический электрический потенциал с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $Bv(K) = 2\pi P$ (где $P \in \mathbb{N}$), и $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение оператора $\widehat{H}_B + V$. Тогда λ — собственное значение операторов $\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V$ при всех $k + i\varkappa \in \mathbb{C}^2$.*

Из теоремы 1.1 следует, что для доказательства теоремы 0.1 достаточно (при $Bv(K) = 2\pi P$, $P \in \mathbb{N}$) показать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует комплексный вектор $k + i\varkappa \in \mathbb{C}^2$ такой, что число λ не является собственным значением оператора $\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V$. Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ вместо тригонометрического многочлена $V(\cdot)$, который не является постоянной функцией, всегда можно выбрать тригонометрический многочлен $V(\cdot) - \lambda$, то можно рассматривать только собственное значение $\lambda = 0$. Следовательно, теорема 0.1 вытекает из теоремы 1.2.

Т е о р е м а 1.2. *Для любого тригонометрического многочлена $V \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, не являющегося постоянной функцией, и любого $B > 0$, для которого $Bv(K) = 2\pi$, найдется комплексный вектор $k + i\varkappa \in \mathbb{C}^2$ такой, что оператор $\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V$, имеющий область определения $D(\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V) = \mathcal{H}^2_B$, обратим (то есть у него нет собственного значения $\lambda = 0$).*

Теорема 1.2 следует из теорем 2.1 и 2.2, приведенных в следующем параграфе.

§ 2. Доказательство теоремы 1.2

Зафиксируем какой-либо вектор $k \in 2\pi K^*$. Обозначим через $\mathcal{H}^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, подпространства собственных функций оператора $\widehat{H}_B(k)$ с собственными значениями $\lambda = (2m+1)B$. Подпространства $\mathcal{H}^{(m)}$ имеют размерность P [2] (предполагается, что $\eta = P \in \mathbb{N}$). Пусть

$$F(x) \,=\, e^{-\frac{B}{4}(x_1^2+x_2^2) + \frac{iB}{2}x_1x_2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Для любого вектора $a \in \mathbb{R}^2$ функция $x \mapsto e^{-iBa_1x_2} F(x+a)$ является собственной функцией оператора $\widehat{H}_B$ с собственным значением $\lambda = B$. Определим функции

$$F(\alpha; k, x) \,=\, e^{-ik_1x_1 + i\alpha x_2} F\biggl(x - \frac{k_2+\alpha}{B}\,e_1\biggr), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

для которых при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (и $x \in \mathbb{R}^2$)

$$\mathfrak{F}(F(\alpha + E_1^1B; k, \cdot))(x) \,=\, e^{-ik_1E_1^1}\,\mathfrak{F}(F(\alpha; k, \cdot))(x).$$

Для чисел $\alpha_l = \frac{1}{P}E_1^1Bl$, $l = 0, \dots, P-1$, функции $x \mapsto \mathfrak{F}(F(\alpha_l; k, \cdot))(x)$ линейно независимы в $\mathcal{H}_B$ [2], принадлежат $\mathcal{H}_B^\infty$ и являются собственными функциями оператора $\widehat{H}_B(k)$, отвечающими собственному значению $\lambda = B$. Выберем в $\mathcal{H}^{(0)}$ какой-либо ортонормированный базис $\Psi_1 = \Psi_1^{(0)}, \dots, \Psi_P = \Psi_P^{(0)}$.

Определим операторы

$$\widehat{Z}_\mp \,=\, \biggl(k_1 - i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\biggr) \pm i\,\biggl(k_2 - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\biggr),$$

$D(\widehat{Z}_\mp) = \mathcal{H}_B^1$. Тогда $\widehat{Z}_-\Psi_j = 0$, $j = 1, \dots, P$, $\widehat{H}_B(k) = \widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B = \widehat{Z}_-\widehat{Z}_+ - B$ и $\widehat{Z}_\mp^* = \widehat{Z}_\pm$ (знак $*$ используется для обозначения сопряженного оператора). Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ функции

$$\Psi_j^{(m)} \,=\, \frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\,\widehat{Z}_+^m\Psi_j\,, \quad j = 1, \dots, P,$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{(m)}$, при этом

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_+\Psi_j^{(m)} \,&=\, \sqrt{2B(m+1)}\,\Psi_j^{(m+1)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \\ \widehat{Z}_-\Psi_j^{(m)} \,&=\, \sqrt{2Bm}\,\Psi_j^{(m-1)}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для функций $\Phi \in \mathcal{H}_B^{(m+1)}$ справедливы равенства

$$(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-^m - \widehat{Z}_-^m\widehat{Z}_+)\Phi = -2Bm\widehat{Z}_-^{m-1}\Phi, \quad (\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+^m - \widehat{Z}_+^m\widehat{Z}_-)\Phi = 2Bm\widehat{Z}_+^{m-1}\Phi, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\widehat{P}^{(m)}$ ортогональный проектор в $\mathcal{H}_B$ на подпространство $\mathcal{H}^{(m)}$.

Области определения $D(e^{z\widehat{Z}_\mp})$ операторов

$$e^{z\widehat{Z}_\mp} \,\doteq\, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,\widehat{Z}_\mp^n\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

состоят из тех функций $\Phi \in \mathcal{H}_B^\infty$, для которых сходится ряд $e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi \doteq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,\widehat{Z}_\mp^n\Phi$. Будет также использоваться обозначение

$$\widetilde{D}(e^{z\widehat{Z}_\mp}) = \{\Phi \in \mathcal{H}_B^\infty\colon\, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!}\,\|\widehat{Z}_\mp^n\Phi\|_B < +\infty\};$$

$\widetilde{D}(e^{z\widehat{Z}_\mp}) \subset D(e^{z\widehat{Z}_\mp})$.

В дальнейшем важную роль будут играть операторы

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta) = \widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_{\mp} + B + V, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

для которых $D(\widehat{H}_{\mp}(\zeta)) = \mathcal{H}_B^2$ и $\widehat{H}_{\mp}^*(\zeta) = \widehat{H}_{\pm}(\overline{\zeta})$. Для них

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta) \;=\; \widehat{H}_B\biggl(k + \frac{\zeta}{2}\,e_1 \pm \frac{i\zeta}{2}\,e_2\biggr) + V. \tag{2.3}$$

Поэтому если операторы $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)+B$ имеют собственное значение $\lambda = 0$ для всех $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$, то операторы $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)$ также имеют собственное значение $\lambda = 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$.

Операторы $\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_{\mp} + B$ (операторы (2.3) при $V \equiv 0$) имеют собственные значения $\lambda = (2m+1)B$, $m \in \mathbb{Z}_+$, при всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Все собственные значения P-кратно вырождены и функции $e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\mp}}\,\Psi_j^{(m)}$, $j = 1,\dots,P$, являются линейно независимыми собственными функциями операторов $\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_{\mp} + B$, отвечающих собственным значениям $\lambda = (2m+1)B$.

Обозначим $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta) = \operatorname{Ker}\widehat{H}_{\mp}(\zeta) = \{\Phi \in \mathcal{H}_B^2 : \widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi = 0\}$. Операторы $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, замкнуты, $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ — конечномерные подпространства и $\operatorname{Im}\widehat{H}_{\mp}(\zeta) = \{\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi \colon \Phi \in \mathcal{H}_B^2\}$ — (замкнутые) подпространства, для которых $\operatorname{Im}\widehat{H}_{\mp}(\zeta) = (\mathcal{H}_{\pm}(\overline{\zeta}))^{\perp}$ (где $\mathcal{L}^{\perp} = \{\Phi \in \mathcal{H}_B \colon (\psi,\Phi)_B = 0$ для всех $\psi \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_B$, $\mathcal{L} \neq \varnothing\}$).

Пусть $L^{\infty}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $L^2_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — пространства периодических с решеткой периодов Λ функций $V \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, принадлежащих $L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ и $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ соответственно (при этом функции, совпадающие при почти всех $x \in \mathbb{R}^2$, отождествляются). На пространстве $L^{\infty}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ определяется норма

$$\|V\|_{L^{\infty}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})} \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2}|V(x)|, \quad V \;\in\; L^{\infty}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}).$$

Следующая теорема является основным утверждением, на которое опирается доказательство теоремы 1.2.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $V \in L^{\infty}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $Bv(K) = 2\pi$. Предположим, что $\mathcal{H}_-(\zeta) \neq \{0\}$ при всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Тогда существует открытое множество $\mathfrak{M}_- \subseteq \mathbb{C}$, для которого $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{M}_-$ — дискретное множество (без конечных предельных точек), такое, что для любых $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_-$ и $\Phi^-_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0)\backslash\{0\}$ существуют число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ и функции $\Phi_j \in \mathcal{H}_B^2$, $j = 0,1,\dots,m_0$, такие, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$*

$$\Phi^-_{\zeta} \;\doteq\; \sum_{j=0}^{m_0}\zeta^j\Phi_j \;\in\; \mathcal{H}_-(\zeta). \tag{2.4}$$

При этом $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)}\backslash\{0\}$ и функция Φ^-_{ζ} при $\zeta = \zeta_0$ совпадает с заданной функцией $\Phi^-_{\zeta_0}$.

Теорема 2.1 доказывается в § 3.

Так как функция (2.4) при всех $\zeta \in \mathbb{C}$ принадлежит $\mathcal{H}_-(\zeta)$, то выполняются следующие равенства (получаемые при разложении по степеням ζ тождества $\widehat{H}_-(\zeta)\Phi^-_{\zeta} \equiv 0$):

$$\begin{aligned}
(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V)\,\Phi_0 \;&=\; 0,\\
(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V)\,\Phi_1 \;&=\; -\widehat{Z}_-\Phi_0,\\
\dots\;\dots\;\dots \qquad & \qquad \dots\\
(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V)\,\Phi_{m_0} \;&=\; -\widehat{Z}_-\Phi_{m_0-1},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\Phi_j \in \mathcal{H}_B^2$, $j = 0,1,\dots,m_0$, и $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)}\backslash\{0\}$. С другой стороны, если функции $\Phi_j \in \mathcal{H}_B^2$ удовлетворяют равенствам (2.5) и $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)}$, то для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ справедливо включение (2.4).

Т е о р е м а 2.2. *Предположим, что $V \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — тригонометрический многочлен (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$), не являющийся постоянной функцией, и $Bv(K) = 2\pi P$, где $P \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любых функций $\Phi_j \in \mathcal{H}_B^2$, $j = 0,1,\dots m_0$, при условии $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)}\backslash\{0\}$ функция $\sum\limits_{j=0}^{m_0}\zeta^j\Phi_j$ не может при всех $\zeta \in \mathbb{C}$ принадлежать $\mathcal{H}_-(\zeta)$ и, следовательно, для функций Φ_j не могут выполняться (все) равенства (2.5).*

Доказательство теоремы 2.2 приведено в конце этого параграфа. Предварительно доказывается ряд утверждений, которые для этого необходимы.

Теорема 1.2 непосредственно следует из теорем 2.1 и 2.2. Действительно, если предположить, что в условиях теоремы 1.2 у оператора $\widehat{H}_B(k+i\kappa)+V$ при всех $k+i\kappa \in \mathbb{C}^2$ имеется собственное значение $\lambda = 0$, то $\mathcal{H}_-(\zeta) \neq \{0\}$ (и $\mathcal{H}_+(\zeta) \neq \{0\}$) для всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Тогда из теоремы 2.1 следует существование числа $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ и функций $\Phi_j \in \mathcal{H}^2_B$, $j = 0,1,\ldots,m_0$, таких, что $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)} \setminus \{0\}$ и для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ выполняется включение (2.4). Поэтому справедливы также равенства (2.5). Но это противоречит теореме 2.2.

Для функций $\Phi \in \mathcal{H}_B$ имеет место разложение

$$\Phi \, = \, \sum_{m=0}^{+\infty} \widehat{P}^{(m)}\Phi,$$

где $\widehat{P}^{(m)}\Phi \in \mathcal{H}^{(m)}$. Из (2.1) следуют равенства

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+\Phi)\|_B \, = \, \sqrt{2Bm}\,\|\widehat{P}^{(m-1)}\Phi\|_B, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_-\Phi)\|_B \, = \, \sqrt{2B(m+1)}\,\|\widehat{P}^{(m+1)}\Phi\|_B, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.7}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_B(\gamma;C)$, где $\gamma > 0$ и $C > 0$, множество функций $\Phi \in \mathcal{H}_B$, для которых при всех $m \in \mathbb{Z}_+$ выполняется оценка

$$\|\widehat{P}^{(m)}\Phi\|_B \, \leqslant \, Ce^{-\gamma m};$$

$\mathcal{H}_B(\gamma) \doteq \bigcup\limits_{C>0} \mathcal{H}_B(\gamma;C)$. Множество $\mathcal{H}_B(\gamma)$ является линейным многообразием в $\mathcal{H}^\infty_B$. Пусть $\mathcal{H}_B(\infty)$ — множество функций $\Phi \in \mathcal{H}_B$ таких, что для любого $\gamma > 0$ найдется число $C_\gamma = C_\gamma(\Phi) > 0$ такое, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|\widehat{P}^{(m)}\Phi\|_B \, \leqslant \, C_\gamma e^{-\gamma m}.$$

При этом $\mathcal{H}_B(\infty)$ — линейное многообразие в $\mathcal{H}_B(\gamma)$ для любого $\gamma > 0$.

Л е м м а 2.1. *Для любых $\gamma > 0$, $C > 0$ и $\varepsilon \in (0,\gamma)$ существует число $C'_\mp = C'_\mp(B;\gamma,\varepsilon) > 0$ такое, что для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma;C)$ функция $\widehat{Z}_\mp\Phi$ принадлежит $\mathcal{H}_B(\gamma-\varepsilon;CC'_\mp)$.*[1]

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma;C)$. Тогда $\widehat{P}^{(0)}(\widehat{Z}_+\Phi) = 0$ и при $m \in \mathbb{N}$ из (2.6) следует оценка $\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+\Phi)\|_B \leqslant \sqrt{2Bm}\,Ce^{-\gamma(m-1)}$, поэтому $\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+\Phi)\|_B \leqslant CC'_+e^{-(\gamma-\varepsilon)m}$, $m \in Z_+$, где

$$C'_+ \, = \, \max_{m\in\mathbb{N}} \sqrt{2Bm}\,e^{\gamma}e^{-\varepsilon m}.$$

При всех $m \in \mathbb{Z}_+$ (см. (2.7)) также $\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_-\Phi)\|_B \leqslant \sqrt{2B(m+1)}\,Ce^{-\gamma(m+1)} \leqslant CC'_-e^{-(\gamma-\varepsilon)m}$, где

$$C'_- \, = \, \max_{m\in\mathbb{Z}_+} \sqrt{2B(m+1)}\,e^{-\gamma}e^{-\varepsilon m}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Для любых $\Phi \in \mathcal{H}_B$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}^n_+\Phi) = 0$ при $m < n$ и

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}^n_+\Phi)\|_B \, = \, (2B)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sqrt{m!}}{\sqrt{(m-n)!}}\,\|\widehat{P}^{(m-n)}\Phi\|_B$$

при $m \geqslant n$ (см. (2.6)). При $m \in \mathbb{Z}_+$ (и $n \in \mathbb{N}$)

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}^n_-\Phi)\|_B \, = \, (2B)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sqrt{(m+n)!}}{\sqrt{m!}}\,\|\widehat{P}^{(m+n)}\Phi\|_B$$

[1] В этом и в других утверждениях статьи, когда в формулировках присутствуют знаки $\pm$ и $\mp$, параллельно формулируются два утверждения отдельно для верхних и нижних знаков.

(см. (2.7)). Поэтому для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\|\widehat{P}^{(m)}(e^{z\widehat{Z}_+}\Phi)\|_B \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{|z|^n}{n!}\,(2B)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sqrt{m!}}{\sqrt{(m-n)!}}\,\|\widehat{P}^{(m-n)}\Phi\|_B\,, \quad \Phi \in D(e^{z\widehat{Z}_+}),$$

$$\|\widehat{P}^{(m)}(e^{z\widehat{Z}_-}\Phi)\|_B \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!}\,(2B)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sqrt{(m+n)!}}{\sqrt{m!}}\,\|\widehat{P}^{(m+n)}\Phi\|_B\,, \quad \Phi \in D(e^{z\widehat{Z}_-}).$$

Откуда следует, что для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma; C)$, где $\gamma > 0$ и $C > 0$, и для всех $z \in \mathbb{C}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|\widehat{P}^{(m)}(e^{z\widehat{Z}_+}\Phi)\|_B \leqslant Ce^{-\gamma m}\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{(e^{\gamma}\sqrt{2B}\,|z|)^n\sqrt{m!}}{n!\sqrt{(m-n)!}}\right), \tag{2.8}$$

$$\|\widehat{P}^{(m)}(e^{z\widehat{Z}_-}\Phi)\|_B \leqslant Ce^{-\gamma m}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-\gamma}\sqrt{2B}\,|z|)^n\sqrt{(m+n)!}}{n!\sqrt{m!}}\right). \tag{2.9}$$

Л е м м а 2.2. *Для любых $a > 0$ и $b > 1$ существует число $C_+ = C_+(a,b) \geqslant 1$ такое, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$*

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\sqrt{m!}}{n!\sqrt{(m-n)!}}\,a^n \leqslant C_+ b^m. \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Так как для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, то (при $n = 1, \dots, m$) $\sqrt{m!}\,(n!\sqrt{(m-n)!})^{-1} \leqslant (\sqrt{m}\,en^{-1})^n$. С другой стороны, при всех $x \geqslant 1$

$$\left(\frac{a}{x}\right)^x \leqslant \begin{cases} a, & \text{если } a \in (0, e], \\ e^{a/e}, & \text{если } a > e, \end{cases} \tag{2.11}$$

поэтому (при всех $a > 0$ и $m \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\sqrt{m!}}{n!\sqrt{(m-n)!}}\,a^n \leqslant 1 + m \cdot \max_{n=1,\dots,m}\left(\frac{\sqrt{m}\,ae}{n}\right)^n \leqslant \begin{cases} 1 + me, & \text{если } a \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}, \\ 1 + me^{\sqrt{m}\,a}, & \text{если } a > \frac{1}{\sqrt{m}}. \end{cases}$$

Из последнего неравенства теперь следует, что для любого числа $b > 1$ существует число $C_+ = C_+(a,b) \geqslant 1$ такое, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство (2.10). □

Л е м м а 2.3. *Для любых $a > 0$ и $b > 1$ существует число $C_- = C_-(a,b) \geqslant 1$ такое, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{(m+n)!}}{n!\sqrt{m!}}\,a^n \leqslant C_- b^m. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для левой части неравенства (2.12) при $m = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\,a^n < +\infty.$$

Также для любых $a > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ (в силу формулы Стирлинга)

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(m+n)!}}{n!\sqrt{m!}}\,a^n = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(m+1)\dots(m+n)}}{n!}\,a^n < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{(n!)^{3/2}}\,a^n < +\infty.$$

С другой стороны, с помощью (2.11) получаем

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\sqrt{(m+n)!}}{n!\sqrt{m!}}\,a^n = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\sqrt{(m+1)\dots(m+n)}}{n!}\,a^n \leqslant$$

$$\leqslant\ 1\ +\ \sum_{n=1}^{m}\ \frac{(2m)^{\frac{n}{2}}}{n!}\ a^n\ <\ 1+m\cdot\max_{n=1,\ldots,m}\left(\frac{\sqrt{2m}\,ae}{n}\right)^n\ \leqslant\ \begin{cases} 1+me, & \text{если}\ \ a\leqslant\frac{1}{\sqrt{2m}}\,,\\ 1+me^{\sqrt{2m}\,a}, & \text{если}\ \ a>\frac{1}{\sqrt{2m}}\,.\end{cases}$$

Неравенство (2.12) непосредственно следует из полученных оценок. □

Следующая лемма является следствием оценок (2.8), (2.9) и лемм 2.2 и 2.3.

Л е м м а 2.4. *Пусть* $\Phi\in\mathcal{H}_B(\gamma;C)$, *где* $\gamma>0$ *и* $C>0$. *Тогда для любых* $\varepsilon\in(0,\gamma)$ *и* $z\in\mathbb{C}$ *существует константа* $C_\pm=C_\pm(e^{\pm\gamma}\sqrt{2B}\,|z|;\varepsilon)\geqslant 1$ *такая, что для всех* $m\in\mathbb{Z}_+$

$$\|\widehat{P}^{(m)}\big(e^{z\widehat{Z}_\pm}\Phi\big)\|\ \leqslant\ CC_\pm e^{-(\gamma-\varepsilon)m},$$

то есть $e^{z\widehat{Z}_\pm}\Phi\in\mathcal{H}_B(\gamma-\varepsilon;CC_\pm)$.

С л е д с т в и е 2.1. *Если* $\Phi\in\mathcal{H}_B(\gamma)$, *где* $\gamma>0$, *то* $\Phi\in\widetilde{D}(e^{z\widehat{Z}_\pm})\subset D(e^{z\widehat{Z}_\pm})$ *и* $e^{z\widehat{Z}_\pm}\Phi\in\mathcal{H}_B(\gamma')$ *для всех* $z\in\mathbb{C}$ *и* $\gamma'\in(0,\gamma)$. *Если* $\Phi\in\mathcal{H}_B(\infty)$, *то* $e^{z\widehat{Z}_\pm}\Phi\in\mathcal{H}_B(\infty)$ *для всех* $z\in\mathbb{C}$.

С л е д с т в и е 2.2. *Если* $\Phi\in\mathcal{H}_B(\gamma)$, *где* $\gamma>0$, *то для любых* $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$e^{z_1\widehat{Z}_\pm}\,e^{z_2\widehat{Z}_\pm}\,\Phi\ =\ e^{(z_1+z_2)\widehat{Z}_\pm}\,\Phi. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2.4 следует, что для любых $z_1',z_2'\in\mathbb{C}$

$$\Big\|\,e^{z_1'\widehat{Z}_\pm}\,e^{z_2'\widehat{Z}_\pm}\,\sum_{m=\mu}^{+\infty}\widehat{P}^{(m)}\Phi\,\Big\|_B\ \to\ 0$$

при $\mathbb{Z}_+\ni\mu\to+\infty$. Поэтому равенство (2.13) достаточно доказать для функций $\widehat{P}^{(m)}\Phi$, $m\in\mathbb{Z}_+$, а для этого достаточно показать (опять же в силу леммы 2.4), что для любых $n,m\in\mathbb{Z}_+$

$$\widehat{P}^{(n)}\,e^{z_1\widehat{Z}_\pm}\,e^{z_2\widehat{Z}_\pm}\,\widehat{P}^{(m)}\,\Phi\ =\ \widehat{P}^{(n)}\,e^{(z_1+z_2)\widehat{Z}_\pm}\,\widehat{P}^{(m)}\,\Phi.$$

Но последнее равенство непосредственно следует из сравнения разложений по степеням $\alpha\in\mathbb{C}$ левой и правой частей тождества $e^{z_1\alpha}\,e^{z_2\alpha}=e^{(z_1+z_2)\alpha}$. Следствие 2.2 доказано. □

Для $\Psi\in\mathcal{H}^{(0)}$ обозначим через $\mathcal{H}_B[\Psi]$ замыкание в $\mathcal{H}_B$ линейной оболочки функций

$$\Psi^{(m)}\ \doteq\ \frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\,\widehat{Z}_+^m\,\Psi$$

($\|\Psi^{(m)}\|_B=\|\Psi\|_B$), $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathcal{H}_B\ =\ \mathcal{H}_B[\Psi_1]\ \oplus\ \ldots\ \oplus\ \mathcal{H}_B[\Psi_N]$. Для всех $\zeta\in\mathbb{C}$ и $\Psi\in\mathcal{H}^{(0)}$, $\|\Psi\|_B=1$,

$$\big\|e^{-\frac{\zeta}{2B}\,\widehat{Z}_+}\Psi\big\|_B\ =\ \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{|\zeta|}{\sqrt{2B}}\right)^{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\ =\ e^{\frac{|\zeta|^2}{4B}}. \tag{2.14}$$

Далее рассматриваются тригонометрические многочлены

$$V(x)\ =\ \sum_{N^*\in\mathbb{Z}^2}v_{N^*}\,e^{2\pi i\,(N_1^*E_*^1+N_2^*E_*^2,\,x)},\quad x\in\mathbb{R}^2.$$

Пусть $\mathfrak{N}(V)=\{N^*\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}:v_{N^*}\neq 0\}$. Множество $\mathfrak{N}(V)$ конечное, и предполагается, что $\mathfrak{N}(V)\neq\varnothing$. Обозначим

$$Y^{(N^*)}\doteq 2\pi(N_1^*E_*^1+N_2^*E_*^2),\quad Y_j^{(N^*)}=(Y^{(N^*)},e_j),\quad j=1,2,\quad N^*\in\mathbb{Z}^2.$$

Будут также использоваться краткие обозначения $Y=Y^{(N^*)}$ и $Y_j=Y_j^{(N^*)}$, $j=1,2$. (При этом подразумевается, что векторы Y соответствуют векторам $N^*\in\mathfrak{N}(V)$.)

Для функций $\Phi \in D(\widehat{Z}_{\mp}) = \mathcal{H}^1_B$ справедливо равенство

$$\widehat{Z}_{\mp}\, e^{i(Y,x)}\, \Phi \;=\; e^{i(Y,x)}\, (\widehat{Z}_{\mp} + (Y_1 \pm iY_2))\, \Phi. \tag{2.15}$$

Откуда следует, что для любых $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\Phi \in \widetilde{D}\big(e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\mp}}\big)$ функция $e^{i(Y,x)}\,\Phi$ принадлежит $D\big(e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\mp}}\big)$ и

$$e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\mp}}\, e^{i(Y,x)}\, \Phi \;=\; e^{\frac{\zeta}{2B}(Y_1 \pm iY_2)}\, e^{i(Y,x)}\, e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\mp}}\, \Phi. \tag{2.16}$$

Если для некоторых $\zeta \in \mathbb{C}$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняются включения $\widehat{Z}^j_{\mp}\, \Phi \in D\big(e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\pm}}\big)$ (в частности, если $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma)$, $\gamma > 0$), $j = 0, 1, \ldots, m$, то (см. (2.2)) также $e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\pm}}\, \Phi \in D(\widehat{Z}^m_{\mp}) = \mathcal{H}^m_B$ и

$$\widehat{Z}^m_{\mp}\, e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\pm}}\, \Phi \;=\; e^{\frac{\zeta}{2B}\widehat{Z}_{\pm}}\, (\widehat{Z}_{\mp} \pm \zeta)^m\, \Phi. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) получаем, что для всех $\Phi \in D\big(e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\big)$, для которых $\widehat{Z}_{-}\Phi \in D\big(e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\big)$, справедливо включение $e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \Phi \in D(\widehat{Z}_{-}) = \mathcal{H}^1_B$ и

$$\widehat{Z}_{-}\, e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \Phi \;=\; e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \widehat{Z}_{-}\, \Phi. \tag{2.18}$$

Также для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех функций $\Phi \in D\big(e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\big)$, для которых $\widehat{Z}^m_{+}\, \Phi \in D\big(e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\big)$ (в этом случае $\widehat{Z}^j_{+}\, \Phi \in D\big(e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\big)$ при всех $j = 0, 1, \ldots, m$), справедливо включение $e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \Phi \in D(\widehat{Z}^m_{+}) = \mathcal{H}^m_B$ и

$$\widehat{Z}^m_{+}\, e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \Phi \;=\; e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, (\widehat{Z}_{+} + (Y_1 - iY_2))^m\, \Phi. \tag{2.19}$$

Следующая лемма непосредственно вытекает из (2.14) и (2.18).

Л е м м а 2.5. *Для любых* $N^* \in \mathbb{Z}^2$ *и* $\Psi \in \mathcal{H}^{(0)}$ *также*

$$\widehat{U}^{(N^*)}\, \Psi \;\doteq\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}}\, e^{i(Y,x)}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, \Psi \;\in\; \mathcal{H}^{(0)}, \tag{2.20}$$

где $Y_j = (Y^{(N^*)}, e_j)$, $j = 1, 2$. *При этом оператор* $\widehat{U}^{(N^*)}$ *(действующий в* $\mathcal{H}^{(0)}$*) унитарен.*

Из (2.15), (2.16), (2.19) и (2.20) получаем, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\Psi \in \mathcal{H}^{(0)}$

$$e^{-i(Y,x)}\, \widehat{Z}^m_{+}\, \widehat{U}^{(N^*)}\Psi \;=\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}}\, e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, (\widehat{Z}_{+} + (Y_1 - iY_2))^m\, \Psi,$$

$$e^{i(Y,x)}\, \widehat{Z}^m_{+}\, \Psi \;=\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}}\, e^{\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_{+}}\, (\widehat{Z}_{+} - (Y_1 - iY_2))^m\, \widehat{U}^{(N^*)}\Psi. \tag{2.21}$$

Поэтому справедливо

С л е д с т в и е 2.3. *Для любых* $N^* \in \mathbb{Z}^2$ *и* $\Psi \in \mathcal{H}^{(0)}$ *оператор умножения на функцию* $e^{i(Y^{(N^*)},x)}$ *взаимно однозначно отображает подпространство* $\mathcal{H}_B[\Psi]$ *на подпространство* $\mathcal{H}_B[\widehat{U}^{(N^*)}\Psi]$.

Л е м м а 2.6. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma; C)$, *где* $\gamma > 0$ *и* $C > 0$. *Тогда для любых* $N^* \in \mathbb{Z}^2$ *и* $\varepsilon \in (0, \gamma)$ *существует константа* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(B, P, N^*; \gamma, \varepsilon) \geqslant 1$ *такая, что для всех* $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\big\|\widehat{P}^{(m)}\big(e^{i(Y^{(N^*)},x)}\, \Phi\big)\big\|_B \;\leqslant\; C\widetilde{C}e^{-(\gamma-\varepsilon)m}, \tag{2.22}$$

то есть $e^{i(Y^{(N^*)},x)}\, \Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma - \varepsilon; C\widetilde{C})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma; C)$, $\varepsilon \in (0,\gamma)$ и $N^* \in \mathbb{Z}^2$. Справедливо представление $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{P} \Phi_j$, где $\Phi_j = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\Psi_j^{(m)}$, $b_{m,j} \in \mathbb{C}$. При этом функции Φ_j принадлежат попарно ортогональным подпространствам $\mathcal{H}_B[\Psi_j]$ и, следовательно, $\Phi_j \in \mathcal{H}_B(\gamma : C)$, $j = 1,\dots,P$. Для любого $j = 1,\dots,P$ (в силу леммы 2.5) имеет место равенство $e^{\frac{Y_1-iY_2}{2B}\widehat{Z}_-}\,\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j = \widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j$, поэтому из (2.17) и (2.22) получаем

$$\begin{aligned} e^{i(Y,x)}\,\Phi_j \;&=\; \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\,\frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\,e^{i(Y,x)}\,\widehat{Z}_+^m\,\Psi_j \;= \\ =\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}} &\sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\,\frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\,e^{\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_+}\,(\widehat{Z}_+ - (Y_1-iY_2))^m\,\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j \;= \\ =\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}} &\sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\,\frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\,e^{\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_+}\,e^{\frac{Y_1-iY_2}{2B}\widehat{Z}_-}\,\widehat{Z}_+^m\,\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j \;= \\ =\; e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{4B}} &\lim_{\mu\to+\infty} e^{\frac{Y_1+iY_2}{2B}\widehat{Z}_+}\,e^{\frac{Y_1-iY_2}{2B}\widehat{Z}_-}\,\sum_{m=0}^{\mu} b_{m,j}\,\big(\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j\big)^{(m)}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\big(\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j\big)^{(m)} = \frac{(2B)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{m!}}\widehat{Z}_+^m\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j$. Функции $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\big(\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j\big)^{(m)}$ и $\sum\limits_{m=0}^{\mu} b_{m,j}\big(\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j\big)^{(m)}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, (как и функции $\Phi_j = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} b_{m,j}\Psi_j^{(m)}$,) принадлежат $\mathcal{H}_B(\gamma; C)$. Тогда из леммы 2.4 (которая выполняется для всех функций $\sum\limits_{m=0}^{\mu} b_{m,j}\,\big(\widehat{U}^{(N^*)}\Psi_j\big)^{(m)}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$) с помощью предельного перехода в (2.23) получаем, что существует константа $\widetilde{C}' = \widetilde{C}'(B, N^*; \gamma, \varepsilon) \geqslant 1$ такая, что для всех $j = 1,\dots,P$ и $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\big\|\widehat{P}^{(m)}\big(e^{\,i(Y^{(N^*)},\,x)}\,\Phi_j\big)\big\|_B \;\leqslant\; C\widetilde{C}'e^{-(\gamma-\varepsilon)m}$$

и, следовательно, выполняется оценка (2.22) при $\widetilde{C} = P\,\widetilde{C}'$. □

С л е д с т в и е 2.4. *Если* $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma)$, *где* $\gamma > 0$, *то* $e^{\,i(Y^{(N^*)},\,x)}\,\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma')$ *для всех* $\gamma' \in (0,\gamma)$ *и* $N^* \in \mathbb{Z}^2$. *Если* $\Phi \in \mathcal{H}_B(\infty)$, *то* $e^{\,i(Y^{(N^*)},\,x)}\,\Phi \in \mathcal{H}_B(\infty)$ *для всех* $N^* \in \mathbb{Z}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Предположим, что существуют число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ и функции $\Phi_j \in \mathcal{H}_B^2$, $j = 0,1,\dots,m_0$, для которых $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)}\setminus\{0\}$ и справедливы равенства (2.5). Тогда $\Phi_\zeta^- \doteq \sum\limits_{j=0}^{m_0}\zeta^j\Phi_j \in \mathcal{H}_-(\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$. Если $\widehat{Z}_-\Phi \in \mathcal{H}_B(\infty)$ для некоторой функции $\Phi \in \mathcal{H}_B^1$, то $\Phi \in \mathcal{H}_B(\infty)$. Поэтому из включения $\Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)} \subset \mathcal{H}_B(\infty)$, равенств (2.5), леммы 2.1 и следствия 2.4 получаем, что $\Phi_j \in \mathcal{H}_B(\infty)$ при всех $j = 0,1,\dots,m_0$. Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ и

$$\Phi_0^{[\zeta_0]} \;\doteq\; \Phi_{\zeta_0}^-, \quad \Phi_j^{[\zeta_0]} \;\doteq\; \frac{1}{j!}\,\frac{d^j\Phi_\zeta^-}{d\zeta^j}\bigg|_{\zeta=\zeta_0}, \quad j = 1,\dots,m_0.$$

Тогда $\Phi_\zeta^- = \sum\limits_{j=0}^{m_0}(\zeta-\zeta_0)^j\Phi_j^{[\zeta_0]}$ и разложение тождества $\widehat{H}_-(\zeta)\Phi_\zeta^- = 0$ по степеням $\zeta-\zeta_0$ приводит (для любого $\zeta_0 \in \mathbb{C}$) к равенствам

$$\begin{aligned} (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V + \zeta_0\widehat{Z}_-)\,\Phi_0^{[\zeta_0]} \;&=\; 0, \\ (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V + \zeta_0\widehat{Z}_-)\,\Phi_1^{[\zeta_0]} \;&=\; -\widehat{Z}_-\Phi_0^{[\zeta_0]}, \\ \dots\quad\dots\quad\dots \qquad\qquad &\quad\;\; \dots \\ (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V + \zeta_0\widehat{Z}_-)\,\Phi_{m_0}^{[\zeta_0]} \;&=\; -\widehat{Z}_-\Phi_{m_0-1}^{[\zeta_0]}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\Phi_{m_0}^{[\zeta_0]} = \Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)} \backslash \{0\}$. При этом $\Phi_j^{[\zeta_0]} \in \mathcal{H}_B(\infty)$ при всех $j = 0, 1, \dots, m_0$ (и $\zeta_0 \in \mathbb{C}$). В силу следствия 2.1 определены функции

$$\widetilde{\Phi}_j^{[\zeta_0]} \doteq e^{-\frac{\zeta_0}{2B} \widehat{Z}_-} \Phi_j^{[\zeta_0]} \in \mathcal{H}_B(\infty), \quad j = 0, 1, \dots, m_0,$$

и $\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]} = \Phi_{m_0}$. Тогда из (2.24) (см. (2.17) и следствие 2.2) для всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} (\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]}) \, \widetilde{\Phi}_0^{[\zeta_0]} \,&=\, 0, \\ (\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]}) \, \widetilde{\Phi}_1^{[\zeta_0]} \,&=\, -\widehat{Z}_- \widetilde{\Phi}_0^{[\zeta_0]}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad & \qquad \dots \\ (\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]}) \, \widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]} \,&=\, -\widehat{Z}_- \widetilde{\Phi}_{m_0-1}^{[\zeta_0]}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $V^{[\zeta_0]} = e^{-\frac{\zeta_0}{2B} \widehat{Z}_-} \, V \, e^{\frac{\zeta_0}{2B} \widehat{Z}_-}$. Из (2.16) следует, что $V^{[\zeta_0]}$ — комплекснозначный тригонометрический многочлен (при действии оператора $V^{[\zeta_0]}$ на функции из $\mathcal{H}_B(\gamma)$, $\gamma > 0$):

$$V^{[\zeta_0]}(x) \,=\, \sum_{N^* \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\zeta_0}{2B} (Y_1^{(N^*)} + i Y_2^{(N^*)})} v_{N^*} \, e^{i(Y^{(N^*)}, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.26}$$

Через $M^* \in \mathfrak{N}$ обозначим один из векторов, для которых $Y^{(M^*)}$ имеет максимальную длину среди всех векторов $Y^{(N^*)}$, $N^* \in \mathfrak{N}$. Далее будут рассматриваться числа $\zeta_0 \in \mathcal{J}(V; M^*) = \{-(Y_1^{(M^*)} - i Y_2^{(M^*)}) \, t : t \geqslant 0\}$. Для них (если $\zeta_0 = -(Y_1^{(M^*)} - i Y_2^{(M^*)}) \, t$, $t \geqslant 0$)

$$e^{-\frac{\zeta_0}{2B} (Y_1^{(M^*)} + i Y_2^{(M^*)})} \,=\, e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B} t}, \tag{2.27}$$

и существует число $\theta \in [0, 1)$ такое, что

$$\bigl| \, e^{-\frac{\zeta_0}{2B} (Y_1^{(N^*)} + i Y_2^{(N^*)})} \bigr| \,\leqslant\, e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B} \theta t} \tag{2.28}$$

для всех $N^* \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть*

$$(\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]}) \, \Phi \,=\, -\widehat{Z}_- \chi,$$

где $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\Phi \in \mathcal{H}_B^2 \setminus \{0\}$, $\chi \in \mathcal{H}_B^1$ *и*

$$\| \widehat{P}^{(m)} \Phi \|_B \,\leqslant\, C \, \|\Phi\|_B \, e^{-\gamma m}$$

для всех $m \in \mathbb{Z}_+$, *где* $\gamma > 0$ *и* $C \geqslant 1$ *(в этом случае* $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma)$ *и* $\chi \in \mathcal{H}_B(\gamma)$*). Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, \gamma)$ *найдутся числа* $\Xi = \Xi(B, P, V; C; \gamma, \varepsilon) > 0$ *и* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(B, P, V; C; \gamma, \varepsilon) \geqslant 1$ *такие, что при всех* $\zeta_0 \in \mathcal{J}(V; M^*)$, *для которых* $|\zeta_0| \geqslant \Xi$,

(1) *функция* $\widehat{Z}_- \chi$ *не является нулевой (тогда также* $\chi \not\equiv 0$*)*,

(2) *для всех* $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\| \widehat{P}^{(m)} \chi \|_B \,\leqslant\, \widetilde{C} \, \|\chi\|_B \, e^{-(\gamma - \varepsilon) m}. \tag{2.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma; C\|\Phi\|_B)$, то в силу леммы 2.6 для любых $\varepsilon \in (0, \gamma)$ и $N^* \in \mathbb{Z}^2$ найдется константа $\widetilde{C}'(N^*) = \widetilde{C}'(B, P, N^*; \gamma, \varepsilon) \geqslant 1$ такая, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\| \widehat{P}^{(m)} \bigl(e^{i(Y^{(N^*)}, x)} \Phi \bigr) \|_B \,\leqslant\, C \widetilde{C}'(N^*) \, \|\Phi\|_B \, e^{-(\gamma - \varepsilon) m}. \tag{2.30}$$

С другой стороны, так как $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma; C\|\Phi\|_B)$, из леммы 2.1 вытекает существование константы $C' = C'(B; \gamma, \varepsilon) \geqslant 1$ такой, что

$$\| \widehat{P}^{(m)} (\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi) \|_B \,\leqslant\, C C' \, \|\Phi\|_B \, e^{-(\gamma - \varepsilon) m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.31}$$

Обозначим

$$V^{[\zeta_0]}(M^*;x) \;=\; \sum_{N^*\in\,\mathbb{Z}^2\,\setminus\,\{M^*\}} e^{-\frac{\zeta_0}{2B}\,(Y_1^{(N^*)}+iY_2^{(N^*)})} v_{N^*}\, e^{\,i(Y^{(N^*)},\,x)}, \quad x\in\mathbb{R}^2. \tag{2.32}$$

Из (2.28), (2.30), (2.31) и (2.32) при $\zeta_0=-(Y_1^{(M^*)}-iY_2^{(M^*)})\,t$, $t\geqslant 0$, следуют оценки

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-+B+V^{[\zeta_0]}(M^*;\cdot))\Phi\|_B\;\leqslant$$

$$\leqslant\; C\left(C'+B+\sum_{N^*\in\,\mathbb{Z}^2\,\setminus\,\{M^*\}}\widetilde{C}'(N^*)\,|v_{N^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,\theta t}\right)\|\Phi\|_B\,e^{-(\gamma-\varepsilon)m}, \quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Откуда

$$\|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-+B+V^{[\zeta_0]}(M^*;\cdot))\Phi\|_B\;\leqslant$$

$$\leqslant\; C\,(1-e^{-2(\gamma-\varepsilon)})^{-\frac12}\left(C'+B+\sum_{N^*\in\,\mathbb{Z}^2\,\setminus\,\{M^*\}}\widetilde{C}'(N^*)\,|v_{N^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,\theta t}\right)\|\Phi\|_B.$$

Выберем число $\Xi'=\Xi'(B,P,V;\gamma,\varepsilon)>0$ такое, что при всех $t\geqslant\Xi'$

$$(1-e^{-2(\gamma-\varepsilon)})^{-\frac12}\left(C'+B+\sum_{N^*\in\,\mathbb{Z}^2\,\setminus\,\{M^*\}}\widetilde{C}'(N^*)\,|v_{N^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,\theta t}\right)\;\leqslant\;\frac12\,|v_{M^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,t}.$$

Так как (см. (2.27))

$$\|\,e^{-\frac{\zeta_0}{2B}\,(Y_1^{(M^*)}+iY_2^{(M^*)})}\,v_{M^*}\,e^{i(Y^{(M^*)},\,x)}\Phi\,\|_B\;=\;|v_{M^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,t}\,\|\Phi\|_B,$$

то (при $t\geqslant\Xi'$)

$$\|\widehat{Z}_-\chi\|_B\;=\;\|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-+B+V^{[\zeta_0]})\Phi\|_B\;\geqslant\;\frac12\,|v_{M^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,t}\,\|\Phi\|_B$$

(и, следовательно, $\widehat{Z}_-\chi\not\equiv 0$). Тогда (см. (2.26), (2.27), (2.28), (2.30) и (2.31)) для всех $m\in\mathbb{Z}_+$ (и $t\geqslant\Xi'$)

$$\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B\;=\;\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-+B+V^{[\zeta_0]})\Phi\|_B\;\leqslant \tag{2.33}$$

$$\leqslant\; C\left(C'+B+\sum_{N^*\in\,\mathbb{Z}^2\,\setminus\,\{M^*\}}\widetilde{C}'(N^*)\,|v_{N^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,\theta t}+\widetilde{C}'(M^*)\,|v_{M^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,t}\right)\|\Phi\|_B\,e^{-(\gamma-\varepsilon)m}\;\leqslant$$

$$\leqslant\;\frac32\,C\widetilde{C}'(M^*)\,|v_{M^*}|\,e^{\frac{|Y^{(M^*)}|^2}{2B}\,t}\,\|\Phi\|_B\,e^{-(\gamma-\varepsilon)m}\;\leqslant\;3C\widetilde{C}'(M^*)\,\|\widehat{Z}_-\chi\|_B\,e^{-(\gamma-\varepsilon)m}.$$

Теперь выберем число $\widetilde{m}=\widetilde{m}(C\widetilde{C}'(M^*),\gamma-\varepsilon)\in\mathbb{N}$ так, что

$$\bigl(3C\widetilde{C}'(M^*)\bigr)^2\,e^{-2(\gamma-\varepsilon)\widetilde{m}}\,(1-e^{-2(\gamma-\varepsilon)})^{-1}\;<\;\frac34\,.$$

Из (2.33) следует оценка

$$\begin{aligned}\Bigl\|\sum_{m=0}^{\widetilde{m}-1}\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_-\chi)\Bigr\|_B^2\;&=\;\|\widehat{Z}_-\chi\|_B^2\;-\;\sum_{m=\widetilde{m}}^{+\infty}\|\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B^2\;>\\ &>\;\left(1-\frac34\right)\|\widehat{Z}_-\chi\|_B^2\;=\;\frac14\,\|\widehat{Z}_-\chi\|_B^2.\end{aligned} \tag{2.34}$$

С другой стороны, с помощью (2.7) и (2.34) для всех $m\in\mathbb{N}$ получаем

$$\|\chi\|_B^2\;\geqslant\;\sum_{m=1}^{\widetilde{m}}\|\widehat{P}^{(m)}\chi\|_B^2\;=\frac{1}{2B}\,\sum_{m=1}^{\widetilde{m}}\frac1m\,\|\widehat{P}^{(m-1)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B^2\;\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2B\widetilde{m}} \sum_{m=1}^{\widetilde{m}} \|\widehat{P}^{(m-1)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B^2 > \frac{1}{8B\widetilde{m}} \|\widehat{Z}_-\chi\|_B^2 .$$

Поэтому из оценок (2.33) (для всех $t \geqslant \Xi'$) вытекают оценки

$$\|\widehat{P}^{(m)}\chi\|_B \leqslant \frac{1}{\sqrt{2Bm}} \|\widehat{P}^{(m-1)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B \leqslant \frac{1}{\sqrt{2B}} \|\widehat{P}^{(m-1)}(\widehat{Z}_-\chi)\|_B \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{\sqrt{2B}} C\widetilde{C}'(M^*)\, e^{\gamma-\varepsilon} \|\widehat{Z}_-\chi\|_B\, e^{-(\gamma-\varepsilon)m} < 6C\widetilde{C}'(M^*)\, e^{\gamma-\varepsilon} \sqrt{\widetilde{m}}\, \|\chi\|_B\, e^{-(\gamma-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, достаточно в (2.29) положить $\widetilde{C} = 6C\widetilde{C}'(M^*)\, e^{\gamma-\varepsilon} \sqrt{\widetilde{m}} \geqslant 1$ и выбрать число $\Xi = |Y^{(M^*)}|\, \Xi'$. Так как $\|\widehat{P}^{(0)}\chi\| \leqslant \|\chi\|$, то оценка (2.29) при $m = 0$ также выполняется. Теорема 2.3 доказана. □

Воспользуемся теперь теоремой 2.3 для завершения доказательства теоремы 2.2. Как показано выше, из равенств (2.5) следует, что при всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ также выполняются равенства (2.25). Если $m_0 = 0$, то из теоремы 2.3 вытекает существование числа $\Xi_0 > 0$ такого, что $(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]})\widetilde{\Phi}_0^{[\zeta_0]} \not\equiv 0$ при всех $\zeta_0 \in \mathcal{J}(V; M^*)$, для которых $|\zeta_0| \geqslant \Xi_0$. Но это противоречит первому из равенств (2.25). Поэтому можно считать, что $m_0 \geqslant 1$. Так как $\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]} = \Phi_{m_0} \in \mathcal{H}^{(0)} \setminus \{0\}$, то $\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]}\|_B = \|\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]}\|_B$ и $\widehat{P}^{(m)}\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]}$ — нулевые функции при всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_{m_0}$. Учитывая (тривиальные) неравенства

$$\|\widehat{P}^{(m)}\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]}\|_B \leqslant \|\widetilde{\Phi}_{m_0}^{[\zeta_0]}\|_B\, e^{-\gamma_{m_0} m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ ,$$

и последовательно при $j = m_0, m_0 - 1, \ldots, 1$ применяя теорему 2.3, получаем, что для всех $j = m_0, m_0 - 1, \ldots, 1$ существуют числа $\Xi_j = \Xi_j(B, P, V; \widetilde{C}_{m_0-1}, \ldots, \widetilde{C}_j; \gamma_{m_0}, \gamma_{m_0-1}, \ldots, \gamma_{j-1}) > 0$ (для которых $\Xi_\nu \leqslant \Xi_\mu$ при $\nu \geqslant \mu$) и $\widetilde{C}_{j-1} = \widetilde{C}_{j-1}(B, P, V; \widetilde{C}_{m_0-1}, \ldots, \widetilde{C}_j; \gamma_{m_0}, \gamma_{m_0-1}, \ldots, \gamma_{j-1}) \geqslant 1$ такие, что при всех $\zeta_0 \in \mathcal{J}(V; M^*)$, для которых $|\zeta_0| \geqslant \Xi_j$,

$$(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]})\widetilde{\Phi}_j^{[\zeta_0]} \not\equiv 0 \tag{2.35}$$

и

$$\|\widehat{P}^{(m)}\widetilde{\Phi}_{j-1}^{[\zeta_0]}\|_B \leqslant \widetilde{C}_{j-1} \|\widetilde{\Phi}_{j-1}^{[\zeta_0]}\|_B\, e^{-\gamma_{j-1} m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.36}$$

Но тогда из (2.35), (2.36) (при $j = 1$) и теоремы 2.3 также следует, что существует число $\Xi_0 = \Xi_0(B, P, V; \widetilde{C}_{m_0-1}, \ldots, \widetilde{C}_1; \gamma_{m_0}, \gamma_{m_0-1}, \ldots, \gamma_0) \geqslant \Xi_1 > 0$ такое, что при всех $\zeta_0 \in \mathcal{J}(V; M^*)$, для которых $|\zeta_0| \geqslant \Xi_0$, функция $(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V^{[\zeta_0]})\widetilde{\Phi}_0^{[\zeta_0]}$ не может быть нулевой, что противоречит первому из равенств (2.25) (которые по сделанному предположению должны выполняться при всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}$). Полученное противоречие доказывает теорему 2.1. □

§ 3. Доказательство теоремы 2.1

Будем вначале предполагать, что $V \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Компоненты k_1 и k_2 вектора $k \in 2\pi K^*$ (или $k \in \mathbb{R}^2$) из определения операторов $\widehat{H}_\mp(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, можно выбрать любыми (см. (2.3)), но они далее фиксируются и рассматривается зависимость операторов $\widehat{H}_\mp(\zeta) = \widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_\mp + B + V$ только от числа $\zeta \in \mathbb{C}$. Операторы $\widehat{H}_\mp(\zeta)$ (для всех $\zeta \in \mathbb{C}$) имеют область определения $D(\widehat{H}_\mp(\zeta)) = D(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-) = \mathcal{H}^2_B$. Функции $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$ (после изменения их значений на множествах нулевой меры Лебега) непрерывны. Потенциал $V \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{H}_B(k+i\varkappa)$, $k+i\varkappa \in \mathbb{C}^2$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $C(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$

$$\|V\Phi\|_B \leqslant \varepsilon \|\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-\Phi\|_B + C(\varepsilon)\|\Phi\|_B. \tag{3.1}$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}_\mp(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, — множество функций $\Phi^\mp_\zeta \in \mathcal{H}_\mp(\zeta)$ таких, что найдутся числа $\zeta_j \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ и функции $\Phi^\mp_{\zeta_j} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta_j)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\zeta_j \to \zeta$ и $\Phi^\mp_{\zeta_j} \to \Phi^\mp_\zeta$ при $j \to +\infty$.

Множества $\widetilde{\mathcal{H}}_\mp(\zeta)$ являются линейными подпространствами конечномерных линейных пространств $\mathcal{H}_\mp(\zeta)$. Через $\mathcal{N}_\mp(\zeta)$ и $\widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta)$ обозначим размерности подпространств $\mathcal{H}_\mp(\zeta)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_\mp(\zeta)$ соответственно, $0 \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_\mp(\zeta)$ (и $\mathcal{N}_\mp(\zeta) \in \mathbb{N}$).

Если $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}$ и $\zeta' \neq \overline{\zeta}$ (где черта означает комплексное сопряжение), то для всех функций $\Phi^+_{\zeta'} \in \mathcal{H}_+(\zeta')$ и $\Phi^-_\zeta \in \mathcal{H}_-(\zeta)$

$$0 \,=\, (\widehat{H}_+(\zeta')\Phi^+_{\zeta'}, \Phi^-_\zeta)_B \,=\, (\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{H}_-(\overline{\zeta}')\Phi^-_\zeta)_B \,=$$

$$= (\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{H}_-(\zeta)\Phi^-_\zeta)_B \,+\, (\overline{\zeta}' - \zeta)\,(\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{Z}_-\Phi^-_\zeta)_B \,=\, (\overline{\zeta}' - \zeta)\,(\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{Z}_-\Phi^-_\zeta)_B,$$

поэтому

$$(\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{Z}_-\Phi^-_\zeta)_B \,=\, 0. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует

Л е м м а 3.1. *Если* $\Phi^+_{\zeta'} \in \mathcal{H}_+(\zeta')$ *и* $\Phi^-_\zeta \in \widetilde{\mathcal{H}}_-(\zeta)$ *(или* $\Phi^+_{\zeta'} \in \widetilde{\mathcal{H}}_+(\zeta')$ *и* $\Phi^-_\zeta \in \mathcal{H}_-(\zeta)$*), где* $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}$*, то* $(\Phi^+_{\zeta'}, \widehat{Z}_-\Phi^-_\zeta)_B \,=\, 0$.

Справедлива простая

Л е м м а 3.2. *Для любых* C_0, $C_1 \geqslant 0$ *существует число* $C \geqslant 0$ *такое, что для всех функций* $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$*, для которых*

$$\|\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-\Phi\|_B \,\leqslant\, C_0\|\Phi\|_B \,+\, C_1\|\widehat{Z}_+\Phi\|_B \,+\, \|V\Phi\|_B,$$

выполняется оценка $\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi\|_B \leqslant C\,\|\Phi\|_B$.

С л е д с т в и е 3.1. *Для любого непустого компакта* $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ *и любого числа* $C \geqslant 0$ *существует число* $C_1 \geqslant 0$ *такое, что для всех* $\zeta \in \mathcal{K}$ *и всех функций* $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$*, для которых* $\|\widehat{H}_\mp(\zeta)\Phi\|_B \leqslant C\,\|\Phi\|_B$*, выполняется неравенство* $\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi\|_B \leqslant C_1\|\Phi\|_B$.

С л е д с т в и е 3.2. *Для любого непустого компакта* $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ *существует константа* $C'_1 > 0$ *такая, что для всех* $\zeta \in \mathcal{K}$ *и всех функций* $\Phi^\mp_\zeta \in \mathcal{H}_\mp(\zeta)$ *выполняется неравенство* $\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^\mp_\zeta\|_B \leqslant C'_1\|\Phi^\mp_\zeta\|_B$ *и, следовательно, множества* $\{\Phi^\mp_\zeta : \zeta \in \mathcal{K},\ \|\Phi^\mp_\zeta\|_B \leqslant 1\}$ *и* $\{\widehat{Z}_\mp\Phi^\mp_\zeta : \zeta \in \mathcal{K},\ \|\Phi^\mp_\zeta\|_B \leqslant 1\}$ *предкомпактны.*

С л е д с т в и е 3.3. *Если* $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ *— непустой компакт,* $\zeta_j \in \mathcal{K}$*,* $\Phi^\mp_{\zeta_j} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta_j)$ *и для некоторой константы* $C \geqslant 0$ *выполняются неравенства* $\|\Phi^\mp_{\zeta_j}\|_B \leqslant C$*,* $j \in \mathbb{N}$*, то существует подпоследовательность* ζ_{j_ν}*,* $\nu \in \mathbb{N}$*, такая, что* $\zeta_{j_\nu} \to \zeta$ *и* $\Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}} \to \Phi^\mp$ *для некоторых числа* $\zeta \in \mathcal{K}$ *и функции* $\Phi^\mp \in \mathcal{H}_B$.

Из следствия 3.3 вытекает

С л е д с т в и е 3.4. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}$*,* $\zeta_j \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, и* $\zeta_j \to \zeta$ *при* $j \to +\infty$*. Предположим, что существует число* $\mathcal{N}'_\mp \in \mathbb{N}$ *такое, что при всех* $j \in \mathbb{N}$ *найдутся функции* $\Phi^\mp_{\zeta_j,\mu} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta_j)$*,* $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$*, образующие ортонормированную систему (в* $\mathcal{H}_B$*). Тогда существуют подпоследовательность* ζ_{j_ν}*,* $\nu \in \mathbb{N}$*, и ортонормированная система функций* $\Phi^\mp_{(\mu)}$*,* $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$*, такие, что* $\Phi^\mp_{\zeta_j,\mu} \to \Phi^\mp_{(\mu)}$ *при* $\nu \to +\infty$ *для всех* $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$.

Л е м м а 3.3. *Пусть* $\zeta_j \in \mathbb{C}$*,* $\Phi^\mp_{\zeta_j} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta_j)$*,* $j \in \mathbb{N}$*, и* $\zeta_j \to \zeta \in \mathbb{C}$*,* $\Phi^\mp_{\zeta_j} \to \Phi^\mp \in \mathcal{H}_B$ *при* $j \to +\infty$*. Тогда* $\Phi^\mp \in \mathcal{H}_\mp(\zeta)$ *и* $\widehat{Z}_\mp\Phi^\mp_{\zeta_j} \to \widehat{Z}_\mp\Phi^\mp$*,* $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^\mp_{\zeta_j} \to \widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^\mp$*,* $V\Phi^\mp_{\zeta_j} \to V\Phi^\mp$ *при* $j \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 3.2 множество $\{\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно (в $\mathcal{H}_B$). Если ζ_{j_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$, — подпоследовательность, для которой подпоследовательность функций $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}$ сходится (а такая подпоследовательность существует в силу предкомпактности множества $\{\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$), то из замкнутости оператора $\widehat{Z}_\mp$ следует, что $\Phi^\mp \in \mathcal{H}^1_B$ и $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}} \to \widehat{Z}_\mp \Phi^\mp$ при $\nu \to +\infty$. Поэтому все сходящиеся подпоследовательности $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}$ сходятся к $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp$ и, следовательно (в силу предкомпактности множества $\{\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$), $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j} \to \widehat{Z}_\mp \Phi^\mp$ при $j \to +\infty$. Теперь докажем предкомпактность множества $\{\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$. Допустим противное. Тогда найдутся числа $C > 0$ и $\widetilde{C} \geqslant C$, а также подпоследовательность ζ_{j_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$, такие, что подпоследовательность функций $\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}$ при $\nu \to +\infty$ слабо сходится к нулевой функции (в $\mathcal{H}_B$) и $C \leqslant \|\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}\|_B \leqslant \widetilde{C}$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$ (существование числа $\widetilde{C}$ вытекает из следствия 3.1). Но тогда $\|\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}\|_B \cdot \|\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}\|^{-1}_B \to 0$ и (см. (3.1)) $\|V \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}\|_B \cdot \|\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}\|^{-1}_B \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Поэтому при всех достаточно больших $\nu \in \mathbb{N}$ равенство

$$(\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + B + V) \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}} \;=\; -\zeta_{j_\nu} \widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}}$$

выполняться не может. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемое множество $\{\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно. Тогда, как и выше (когда рассматривалась последовательность функций $\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j}$), учитывая предкомпактность множества $\{\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$ и замкнутость оператора $\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_-$, получаем, что $\Phi^\mp \in \mathcal{H}^2_B$ и $\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp_{\zeta_j} \to \widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- \Phi^\mp$ при $j \to +\infty$. При этом из полученных утверждений и равенств $(\widehat{Z}_+ \widehat{Z}_- + \zeta_j \widehat{Z}_\mp + B + V) \Phi^\mp_{\zeta_j} = 0$, $j \in \mathbb{N}$, принимая во внимание ограниченность множества $\{\widehat{Z}_\mp \Phi^\mp_{\zeta_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$, также следует, что $V \Phi^\mp_{\zeta_j} \to V \Phi^\mp$ при $j \to +\infty$. $\square$

Л е м м а 3.4. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta_j \in \mathbb{C} \backslash \{\zeta\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\zeta_j \to \zeta$ при $j \to +\infty$. Предположим, что существует число $\mathcal{N}'_\mp \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{N}_\mp(\zeta_j) \geqslant \mathcal{N}'_\mp$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\mathcal{N}'_\mp \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_\mp(\zeta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы 3.4 следует, что для любого $j \in \mathbb{N}$ найдется ортонормированная система функций $\Phi^\mp_{\zeta_j, \mu} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta_j)$, $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$. В силу следствия 3.4 существуют подпоследовательность ζ_{j_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$, и ортонормированная система функций $\Phi^\mp_{(\mu)} \in \mathcal{H}_B$, $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$, такие, что $\Phi^\mp_{\zeta_{j_\nu}, \mu} \to \Phi^\mp_{(\mu)}$ при $\nu \to +\infty$. Но тогда из леммы 3.3 (и следствия 3.1) получаем, что $\Phi^\mp_{(\mu)} \in \mathcal{H}^2_B$ и $\widehat{H}_\mp(\zeta) \Phi^\mp_{(\mu)} = 0$, поэтому $\Phi^\mp_{(\mu)} \in \mathcal{H}_\mp(\zeta)$ и, следовательно, $\Phi^\mp_{(\mu)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\mp(\zeta)$ при всех $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}'_\mp$. Последнее означает, что $\mathcal{N}'_\mp \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_\mp(\zeta)$. $\square$

Из леммы 3.4, в частности, следует, что $\widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta) \geqslant 1$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$.

Обозначим $U_r(\zeta) \doteq \{\zeta' \in \mathbb{C} \colon |\zeta' - \zeta| < r\}$, $\overline{U}_r(\zeta) \doteq \{\zeta' \in \mathbb{C} \colon |\zeta' - \zeta| \leqslant r\}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

С л е д с т в и е 3.5. *Для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ существует число $r > 0$ такое, что $\mathcal{N}_\mp(\zeta') \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}_\mp(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_\mp(\zeta)$ при всех $\zeta' \in U_r(\zeta)$.*

С л е д с т в и е 3.6. *Для любого непустого компакта $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ существует число $\mathcal{N}_\mp[\mathcal{K}] \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{N}_\mp(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_\mp[\mathcal{K}]$ для всех $\zeta \in \mathcal{K}$.*

Л е м м а 3.5. *Для любого числа $\zeta \in \mathbb{C}$ существует константа $C_\mp > 0$ такая, что для всех функций $\Phi \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_\mp(\zeta)\big)^\perp$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{H}_\mp(\zeta) \Phi\|_B \;\geqslant\; C_\mp \|\widehat{Z}_- \widehat{Z}_+ \Phi\|_B .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда найдутся функции $\Phi^\mp_{(j)} \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_\mp(\zeta)\big)^\perp$, $\|\Phi^\mp_{(j)}\|_B = 1$, $j \in \mathbb{N}$, для которых

$$\|\widehat{H}_\mp(\zeta) \Phi^\mp_{(j)}\|_B \;=\; \|(\widehat{Z}_- \widehat{Z}_+ - B + V + \zeta \widehat{Z}_\mp) \Phi^\mp_{(j)}\|_B \;=\; o(1)\, \|\widehat{Z}_- \widehat{Z}_+ \Phi^\mp_{(j)}\|_B \tag{3.3}$$

при $j\to+\infty$, и, следовательно (см. (3.1)), для всех $j\in\mathbb{N}$

$$\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B\leqslant C_0+C_1\|\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B,$$

где константы $C_0>0$ и $C_1>0$ не зависят от j. В силу леммы 3.2 существует константа $C'>0$ такая, что

$$\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B\leqslant C',\quad j\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Поэтому (см. следствие 3.2) $\{\Phi^{\mp}_{(j)}\colon j\in\mathbb{N}\}$ и $\{\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}\colon j\in\mathbb{N}\}$ — предкомпактные множества (в $\mathcal{H}_B$). Можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности $\Phi^{\mp}_{(j_\nu)}$, $\nu\in\mathbb{N}$), что $\Phi^{\mp}_{(j)}\to\Phi^{\mp}\in\mathcal{H}_B$ и сходится последовательность $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}$. Так как оператор $\widehat{Z}_{\mp}$ замкнут, то $\Phi^{\mp}\in\mathcal{H}^1_B$ и $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$. Далее, аналогично доказательству леммы 3.3 из (3.3), (3.4) и замкнутости оператора $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+$ получаем, что множество $\{\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\,:\,j\in\mathbb{N}\}$ предкомпактно в $\mathcal{H}_B$ и, следовательно, $\Phi^{\mp}\in\mathcal{H}^2_B$ и $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$. Тогда также $\|V(\Phi^{\mp}-\Phi^{\mp}_{(j)})\|_B\to 0$ (см. (3.1)) и, значит, $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$. Но из (3.3) и (3.4) вытекает, что $\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B\to 0$ при $j\to+\infty$. Поэтому $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}=0$ (то есть $\Phi^{\mp}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$). С другой стороны, из выбора последовательности $\Phi^{\mp}_{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$, следует, что $\|\Phi^{\mp}\|_B=1$ и $\Phi^{\mp}\in\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\big)^{\perp}$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.5. □

Следствие 3.7. *Пусть $\zeta\in\mathbb{C}$, $\Phi_{\mp}\in\mathcal{H}^2_B\cap\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\big)^{\perp}$ и $\Phi^{\mp}_{(j)}\in\mathcal{H}^2_B\cap\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\big)^{\perp}$, $j\in\mathbb{N}$. Предположим, что $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$. Тогда также $\Phi^{\mp}_{(j)}\to\Phi^{\mp}$, $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}$ и $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$.*

Доказательство. Из леммы 3.5 следует, что

$$C_{\mp}\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+(\Phi^{\mp}-\Phi^{\mp}_{(j)})\|_B\leqslant\|H_{\mp}(\zeta)(\Phi^{\mp}-\Phi^{\mp}_{(j)})\|_B\to 0$$

при $j\to+\infty$. Поэтому $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}$. С другой стороны, из (2.1) для всех $\Phi\in\mathcal{H}^2_B$ вытекают оценки

$$\|\Phi\|_B\leqslant\sqrt{2B}\,\|\widehat{Z}_+\Phi\|_B\leqslant 2B\,\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi\|_B,\quad\|\widehat{Z}_-\Phi\|_B\leqslant\|\widehat{Z}_+\Phi\|_B, \tag{3.5}$$

с помощью которых получаем, что также $\Phi^{\mp}_{(j)}\to\Phi^{\mp}$ и $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}\to\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}$ при $j\to+\infty$. Следствие 3.7 доказано. □

Пусть $\widehat{P}^{\mp}(\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{C}$, — ортогональный проектор в $\mathcal{H}_B$ на подпространство $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. В дальнейшем через $\widehat{I}$ будет обозначаться единичный оператор в $\mathcal{H}_B$.

Если $\Phi\in\mathcal{H}^2_B$, то для всех $\zeta\in\mathbb{C}$ также $\widehat{P}^{\mp}(\zeta)\Phi\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\subset H^2_B$, поэтому $(\widehat{I}-\widehat{P}^{\mp}(\zeta))\Phi\in\mathcal{H}^2_B$.

Лемма 3.6. *Для любых $\zeta_0\in\mathbb{C}$ и $\varepsilon\in(0,1)$ существует число $r>0$ такое, что для всех $\zeta\in U_r(\zeta_0)$ и $\Phi^{\mp}_{\zeta}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ выполняется неравенство*

$$\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B\leqslant\varepsilon\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B. \tag{3.6}$$

Более того, если для какого-либо $\zeta\in U_r(\zeta_0)$ справедливо равенство $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta)=\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$, то для всех $\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$ также выполняется неравенство

$$\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{\mp}(\zeta))\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B.$$

Доказательство. Предположим, что не существует числа $r>0$ такого, что для всех $\zeta\in U_r(\zeta_0)$ и $\Phi^{\mp}_{\zeta}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ выполняется неравенство (3.6). Тогда найдутся последовательность $\zeta_j\to\zeta_0$ и функции $\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_j)$, $\|\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B=1$, $j\in\mathbb{N}$, такие, что (для всех $j\in\mathbb{N}$)

$$\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B>\varepsilon \tag{3.7}$$

(в этом случае $\zeta_j \neq \zeta_0$, $j \in \mathbb{N}$). Из неравенств (3.7), (3.5) и леммы 3.5 следуют оценки

$$\begin{aligned} |\zeta_j - \zeta_0| \cdot \|\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \,=\, \|\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \,=\, \|\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \,\geqslant \\ \geqslant C_{\mp}\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \,\geqslant\, 2BC_{\mp}\|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \,>\, 2BC_{\mp}\varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

С другой стороны, из следствия 3.1 (или следствия 3.2) получаем, что $\|\widehat{Z}_+\widehat{Z}_-\Phi^{\mp}_{\zeta_j}\|_B \leqslant C_1$, $j \in \mathbb{N}$, где число $C_1 > 0$ не зависит от j. Но последние неравенства (при достаточно большом j) противоречат оценкам (3.8). Полученное противоречие доказывает существование требуемого числа $r > 0$. Далее, для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ (так как $\varepsilon \in (0,1)$) из (3.6) следует, что не существует ненулевой функции $\Phi^{\mp}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$. Поэтому если $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ для некоторого $\zeta \in U_r(\zeta_0)$, то для любой функции $\Phi^{\mp}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$ найдется функция $\Phi^{\mp}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ такая, что $\Phi^{\mp}_{\zeta_0} = \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{\zeta}$, при этом

$$\|\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B \,\geqslant\, \|\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B \,-\, \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B \,\geqslant\, (1-\varepsilon)\|\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B.$$

Следовательно,

$$\|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta))\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B \,\leqslant\, \|\Phi^{\mp}_{\zeta_0} - \Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B \,=\, \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B \,\leqslant\, \varepsilon\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta}\|_B \,\leqslant\, \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}\|\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B.$$

Лемма 3.6 доказана. □

Следующая лемма усиливает лемму 3.5.

Л е м м а 3.7. *Для любого $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ существуют число $r > 0$ и константа $C_{\mp} > 0$ такие, что для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$, для которых $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$, и всех функций $\Phi \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\big)^{\perp}$ выполняется неравенство*

$$\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi\|_B \,\geqslant\, C_{\mp}\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi\|_B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда найдутся числа $\zeta_j \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$ и функции $\Phi^{\mp}_{(j)} \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\|\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B = 1$, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ и при этом $\zeta_j \to \zeta_0$ и

$$\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \,=\, \|(\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+ - B + V + \zeta_j\widehat{Z}_{\mp})\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \,=\, o(1)\,\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \tag{3.9}$$

при $j \to +\infty$. Используя лемму 3.2, аналогично доказательству леммы 3.5 получаем, что для некоторой константы $C' > 0$ (не зависящей от j) справедливы оценки $\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \leqslant C'$, $j \in \mathbb{N}$, и существует функция $\Phi^{\mp} \in \mathcal{H}^2_B$ такая, что $\|\Phi^{\mp}\|_B = 1$ и $\Phi^{\mp}_{(j)} \to \Phi^{\mp}$, $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}$, $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}$ и $V\Phi^{\mp}_{(j)} \to V\Phi^{\mp}$ при $j \to +\infty$. Следовательно, $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}$. С другой стороны, из (3.9) вытекает, что $\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \to 0$ при $j \to +\infty$. Поэтому $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp} = 0$ и, значит, $\Phi^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$. Тогда из леммы 3.6 следует, что для любого $\varepsilon' \in (0,1)$ при всех достаточно больших $j \geqslant j_0(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_j))\Phi^{\mp}\|_B \leqslant \varepsilon'$, откуда

$$|(\Phi^{\mp}, \Phi^{\mp}_{(j)})_B| \,=\, |(\Phi^{\mp}, (\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_j))\Phi^{\mp}_{(j)})_B| \,=\, |((\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_j))\Phi^{\mp}, \Phi^{\mp}_{(j)})_B| \,\leqslant\, \varepsilon'. \tag{3.10}$$

Но $|(\Phi^{\mp}, \Phi^{\mp}_{(j)})_B| \to \|\Phi^{\mp}\|^2_B = 1$ при $j \to +\infty$, что противоречит оценке (3.10), которая должна выполняться при всех $j \geqslant j_0(\varepsilon')$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.7. □

Частным случаем следующей леммы является следствие 3.7, которое используется при доказательстве леммы 3.8.

Л е м м а 3.8. *Пусть $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $\Phi^{\mp}_{(j)} \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_j)\big)^{\perp}$, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}\mp(\zeta_0)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и $\zeta_j \to \zeta_0$, $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(0)}$ при $j \to +\infty$. Тогда также $\Phi^{\mp}_{(j)} \to \Phi^{\mp}_{(0)}$, $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(0)}$, $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(0)}$ и $V\Phi^{\mp}_{(j)} \to V\Phi^{\mp}_{(0)}$ при $j \to +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 3.7 можно ограничиться только случаем, когда $\zeta_j \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\}$, $j \in \mathbb{N}$. Из леммы 3.7 следует, что

$$\|\widehat{Z}_- \widehat{Z}_+ \Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \leqslant C'_{\mp}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.11}$$

где константа $C'_{\mp} > 0$ не зависит от j. Поэтому (см. (3.5)) множества $\{\Phi^{\mp}_{(j)} \colon j \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \colon j \in \mathbb{Z}_+\}$ ограничены и, более того, предкомпактны в $\mathcal{H}_B$. Так как

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\big(\Phi^{\mp}_{(0)} - (\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{(j)}\big) = \widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\big(\Phi^{\mp}_{(0)} - \Phi^{\mp}_{(j)}\big) =$$

$$= \big(\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(0)} - \widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)}\big) + (\zeta_j - \zeta_0)\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)}$$

и правая часть последнего равенства стремится в $\mathcal{H}_B$ к нулевой функции при $j \to +\infty$, то из следствия 3.7, в частности, получаем, что $(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{(j)} \to \Phi^{\mp}_{(0)}$ при $j \to +\infty$. С другой стороны, справедливы оценки

$$\|\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \leqslant \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_0))\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B + \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_j))\widehat{P}^{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B, \quad j \in \mathbb{N},$$

и при этом (в силу леммы (3.6)) $\|(\widehat{I} - \widehat{P}^{\mp}(\zeta_j))\widehat{P}^{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \to 0$. Поэтому $\|\widehat{P}^{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(j)}\|_B \to 0$ и, следовательно, $\Phi^{\mp}_{(j)} \to \Phi^{\mp}_{(0)}$ при $j \to +\infty$. Тогда также $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(0)}$. Действительно, если $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j_\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, — какая-либо сходящаяся подпоследовательность (а такие подпоследовательности существуют в силу предкомпактности множества $\{\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \colon j \in \mathbb{Z}_+\}$), то из замкнутости оператора $\widehat{Z}_{\mp}$ следует, что ее предел совпадает с $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(0)}$; а так как это справедливо для всех сходящихся подпоследовательностей (и множество $\{\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \colon j \in \mathbb{Z}_+\}$ предкомпактно), то $\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{(0)}$. Теперь из (3.1) и (3.11) следует, что $V\Phi^{\mp}_{(j)} \to V\Phi^{\mp}_{(0)}$; а так как $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\Phi^{\mp}_{(0)}$, то также $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(j)} \to \widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\Phi^{\mp}_{(0)}$ при $j \to +\infty$. Лемма 3.8 доказана. □

Обозначим $\mathcal{H}_{\pm} \doteq \bigcup\limits_{\zeta \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_{\pm}(\zeta)$. Справедливо равенство $\mathcal{H}_{\pm}^{\perp} = \bigcap\limits_{\zeta \in \mathbb{C}} \operatorname{Im} \widehat{H}_{\mp}(\zeta)$.

Л е м м а 3.9. *Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta_j \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\zeta_j \to \zeta_0$ при $j \to +\infty$. Тогда для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}_{\pm}^{\perp}$ существует функция $\chi \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$ такая, что $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\chi = \Phi$, и для нее $\widehat{Z}_{\mp}\chi \in \mathcal{H}_{\pm}^{\perp}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Phi \in \operatorname{Im} \widehat{H}_{\mp}(\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$, то найдутся функции $\chi_j \in \mathcal{H}^2_B \cap \Big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_j)\Big)^{\perp}$, для которых $\widehat{H}_{\mp}(\zeta_j)\chi_j = (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + B + V + \zeta_j\widehat{Z}_{\mp})\chi_j = \Phi$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\chi \doteq \chi_0$. Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}} \in \mathcal{H}_{\pm}(\overline{\zeta})$

$$0 = (\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \Phi)_B = (\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \widehat{H}_{\mp}(\zeta)\chi_j)_B + (\zeta_j - \zeta)(\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \widehat{Z}_{\mp}\chi_j)_B = (\zeta_j - \zeta)(\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \widehat{Z}_{\mp}\chi_j)_B$$

и, следовательно, при всех достаточно больших j (при $\zeta_j \neq \zeta$)

$$(\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \widehat{Z}_{\mp}\chi_j)_B = 0. \tag{3.12}$$

Из леммы 3.8 следует, что $\widehat{Z}_{\mp}\chi_j \to \widehat{Z}_{\mp}\chi$ при $j \to +\infty$, поэтому из (3.12) также получаем, что $(\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}}, \widehat{Z}_{\mp}\chi)_B = 0$ (для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и всех $\Phi^{\pm}_{\overline{\zeta}} \in \mathcal{H}_{\pm}(\overline{\zeta})$). □

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta_j \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$, $j \in \mathbb{N}$, и $\zeta_j \to \zeta_0$ при $j \to +\infty$. Тогда для любой функции $\Phi^{\mp}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_{\pm}(\zeta_0)$ существуют функции $\chi^{\mp,(j)}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$, для которых*

$$\|\widehat{Z}_{\mp}\chi^{\mp,(j)}_{\zeta_0}\|_B \leqslant (\sqrt{2B}\,C_{\mp})^{-j}\,\|\widehat{Z}_{\mp}\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B, \tag{3.13}$$

$$\|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant (2B)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2B}\,C_\mp)^{-j}\,\|\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta_0}^\mp\|_B, \tag{3.14}$$

где $C_\mp = C_\mp(\zeta_0) > 0$ *— константа из леммы* (3.5), *и, обозначая* $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(0)} \doteq \Phi_{\zeta_0}^\mp$,

$$\widehat{H}_\mp(\zeta_0)\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} = -\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

При этом ряд

$$\Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp = \Phi_{\zeta_0}^\mp + \sum_{j=1}^{+\infty}(\zeta-\zeta_0)^j\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \tag{3.15}$$

сходится в $\mathcal{H}_B$ *абсолютно и равномерно при* $\zeta \in U_{C'_\mp}(\zeta_0)$ *для любого числа* $C'_\mp \in (0, \sqrt{2B}\,C_\mp)$ *и определяет аналитическую функцию*

$$U_{\sqrt{2B}\,C_\mp}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp \in \mathcal{H}_B,$$

для которой $\Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp \in \mathcal{H}_\mp(\zeta)$ *и* $\Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp - \Phi_{\zeta_0}^\mp \in \big(\mathcal{H}_\mp(\zeta_0)\big)^\perp$, $\zeta \in U_{\sqrt{2B}\,C_\mp}(\zeta_0)$.

Доказательство. Из лемм 3.1 и 3.6 следует, что $(\Phi_{\overline{\zeta}}^\pm, \widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta_0}^\mp)_B = 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\Phi_{\overline{\zeta}}^\pm \in \mathcal{H}_\pm(\overline{\zeta})$, поэтому $\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta_0}^\mp \in \mathcal{H}_\pm^\perp$. Обозначив $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(0)} \doteq \Phi_{\zeta_0}^\mp$, с помощью леммы 3.9 последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ определим функции $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \in \mathcal{H}_B^2 \cap \big(\mathcal{H}_\mp(\zeta_0)\big)^\perp$, для которых $\widehat{H}_\mp(\zeta_0)\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} = -\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}$ и $\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \in \mathcal{H}_\pm^\perp$. Так как $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \in \big(\mathcal{H}_\mp(\zeta_0)\big)^\perp$, то из леммы 3.5 вытекают неравенства

$$\|\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\|_B = \|\widehat{H}_\mp(\zeta_0)\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \geqslant C_\mp\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Используя (3.5), из (3.16) получаем

$$\|\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\|_B \geqslant \sqrt{2B}\,C_\mp\|\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B, \quad j \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, справедливы оценки (3.13). Из (3.5), (3.13) и (3.16) также следуют оценки (3.14):

$$\|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant (2B)^{-1}\,\|\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant (2BC_\mp)^{-1}\,\|\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\|_B \leqslant$$
$$\leqslant (2B)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2B}\,C_\mp)^{-j}\,\|\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta_0}^\mp\|_B, \quad j \in \mathbb{N}.$$

При всех $N \in \mathbb{N}$ определим функции

$$U_{\sqrt{2B}\,C_\mp}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}} \doteq \Phi_{\zeta_0}^\mp + \sum_{j=1}^{N}(\zeta-\zeta_0)^j\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)},$$

и пусть $\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{0\}} = \Phi_{\zeta_0}^\mp$ для всех $\zeta \in U_{\sqrt{2B}C_\mp}(\zeta_0)$. Из (3.14) следует, что функции $U_{\sqrt{2B}C_\mp}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto$ $\mapsto \Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}} \in \mathcal{H}_B$ сходятся при $N \to +\infty$ к функции $U_{\sqrt{2B}\,C_\mp}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp$, при этом ряд (3.15) сходится в $\mathcal{H}_B$ абсолютно и равномерно при $\zeta \in U_{C'_\mp}(\zeta_0)$ для любого числа $C'_\mp \in (0, \sqrt{2B}C_\mp)$. Поэтому функция $U_{\sqrt{2B}\,C_\mp}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \Phi_{\zeta,\zeta_0}^\mp \in \mathcal{H}_B$ является аналитической. Для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\widehat{H}_\mp(\zeta_0)\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}} = -(\zeta-\zeta_0)\,\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N-1\}},$$

откуда

$$\widehat{H}_\mp(\zeta)\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}} = (\zeta-\zeta_0)\,\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}} - (\zeta-\zeta_0)\,\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N-1\}} = (\zeta-\zeta_0)^{N+1}\,\widehat{Z}_\mp\chi_{\zeta_0}^{\mp,\{N\}}.$$

Следовательно (см. (3.13)), при всех $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\|\widehat{H}_\mp(\zeta)\Phi_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}}\|_B \leqslant |\zeta-\zeta_0|^{N+1}\,(\sqrt{2B}\,C_\mp)^{-N}\,\|\widehat{Z}_\mp\Phi_{\zeta_0}^\mp\|_B.$$

Последние неравенства означают, что $\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi^{\mp,\{N\}}_{\zeta,\zeta_0}\|_B \to 0$ при $N \to +\infty$. Тогда из замкнутости оператора $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)$ получаем, что $\Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta_0} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ (для всех $\zeta \in U_{\sqrt{2B}\,C_{\mp}}(\zeta_0)$). Условие $\Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta_0} - \Phi^{\mp}_{\zeta_0} \in \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$ является следствием выбора функций $\chi^{\mp,(j)}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}^2_B \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$, $j \in \mathbb{N}$. Теорема 3.1 доказана. □

Следствие 3.8. *Если $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}\setminus\{\zeta_0\}$, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$, $j \in \mathbb{N}$, и $\zeta_j \to \zeta_0$ при $j \to +\infty$, то существует число $r > 0$ такое, что $\widetilde{\mathcal{N}}_{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta) = \widetilde{\mathcal{N}}_{\mp}(\zeta_0) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$.*

Обозначим $\mathfrak{M}_{\mp}(N) = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon \mathcal{N}_{\mp}(\zeta) = N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.10. *Существует число $\mathcal{N}_{\mp} \in \mathbb{N}$ такое, что*
(1) $\mathfrak{M}_{\mp} \doteq \mathfrak{M}_{\mp}(\mathcal{N}_{\mp})$ *— открытое линейно связное множество (область) в $\mathbb{C}$,*
(2) $\mathfrak{M}_{\mp}(N) = \varnothing$ *при $N < \mathcal{N}_{\mp}$,*
(3) *при $N > \mathcal{N}_{\mp}$ множество $\mathfrak{M}_{\mp}(N)$ либо конечное (или пустое), либо счетное.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(N) = \mathfrak{M}_{\mp}(N) \cap U_a(0)$, где $a > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Для каждого $a > 0$ при всех достаточно больших N множество $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(N)$ пустое (см. следствие 3.6). Пусть (при заданном $a > 0$) $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ — наибольшее число $N \in \mathbb{N}$, для которого множество $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(N)$ несчетное. Так как, возможно, за исключением конечного или счетного множества чисел из $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(\mathcal{N}^{(a)}_{\mp})$, каждое оставшееся число множества $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(\mathcal{N}^{(a)}_{\mp})$ является для него предельным, то существуют числа $\zeta_0 \in U_a(0)$ и $\zeta_j \in U_a(0)\setminus\{\zeta_0\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta_j) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0) = \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ и $\zeta_j \to \zeta_0$ при $j \to +\infty$. Тогда из следствия 3.8 получаем, что существует число $r > 0$ такое, что $U_r(\zeta_0) \subseteq U_a(0)$ и для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ также $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$. Покажем, что $\mathfrak{M}^{(a)}_{\mp}(N) = \varnothing$ при всех $N < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$. Допустим противное. Предположим, что существует число $\widetilde{\zeta}_0 \in U_a(0)$, для которого $\mathcal{N}_{\mp}(\widetilde{\zeta}_0) < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$. Из определения числа $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ следует, что можно выбрать число $\zeta_0' \in U_r(\zeta_0)$ такое, что $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t)) \leqslant \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для всех $t \in [0,1]$, где $\zeta(t) \doteq (1-t)\zeta_0' + t\widetilde{\zeta}_0$. Пусть

$$t_0 \,=\, \inf\{t \in [0,1] : \mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t)) < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}\}.$$

Так как $\zeta_0' \in U_r(\zeta_0)$, то $t_0 \in (0,1]$. Если $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t_0)) = \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$, то $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t)) = \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для всех $t \in [0,t_0]$ и, следовательно (см. следствие 3.8), существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t)) = \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для всех $t \in [t_0, t_0{+}\varepsilon]$, что противоречит выбору числа t_0. С другой стороны, если $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t_0)) < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$, то существует число $\varepsilon > 0$ (см. следствие 3.5) такое, что $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta(t)) < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для всех $t \in [t_0-\varepsilon, t_0]$, что также противоречит выбору числа t_0. Поэтому нет чисел $\widetilde{\zeta}_0 \in U_a(0)$, для которых $\mathcal{N}_{\mp}(\widetilde{\zeta}_0) < \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ и, следовательно, $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) \geqslant \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для всех $\zeta \in U_a(0)$. Если $b > a$, то из определения чисел $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ и $\mathcal{N}^{(b)}_{\mp}$ следует неравенство $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp} \leqslant \mathcal{N}^{(b)}_{\mp}$. Но тогда (как доказано выше) $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) \geqslant \mathcal{N}^{(b)}_{\mp}$ для всех $\zeta \in U_b(0)$. Поэтому $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp} \geqslant \mathcal{N}^{(b)}_{\mp}$ и, следовательно, $\mathcal{N}^{(a)}_{\mp} = \mathcal{N}^{(b)}_{\mp}$. Пусть $\mathcal{N}_{\mp} \doteq \mathcal{N}^{(a)}_{\mp}$ для некоторого (и, значит, для всех) $a > 0$. Тогда $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) \geqslant \mathcal{N}_{\mp}$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и, кроме того, при $N > \mathcal{N}_{\mp}$ множества $\mathfrak{M}_{\mp}(N) = \bigcup\limits_{m\,\in,\mathbb{N}} \mathfrak{M}^{(m)}_{\mp}(N)$ либо конечные (или пустые), либо счетные. Осталось доказать, что множество $\mathfrak{M}_{\mp}$ открыто (его линейная связность вытекает из того, что его дополнение (в $\mathbb{C}$) не более чем счетно). Если $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_{\mp}(\mathcal{N}_{\mp})$, то $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) \geqslant \mathcal{N}_{\mp} = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$. С другой стороны, из следствия 3.5 получаем, что существует число $r > 0$ такое, что $\mathcal{N}_{\mp}(\zeta) \leqslant \mathcal{N}_{\mp}(\zeta_0)$ для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$. Следовательно, $U_r(\zeta_0) \subseteq \mathfrak{M}_{\mp}(\mathcal{N}_{\mp})$, что и доказывает открытость множества $\mathfrak{M}_{\mp}$. □

Из теоремы 3.1 и леммы 3.10 вытекает

Следствие 3.9. *Для всех $\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp}$ справедливо равенство $\widetilde{\mathcal{N}}_{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}_{\mp}(\zeta)$ (и, следовательно, $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta) = \widetilde{\mathcal{H}}_{\mp}(\zeta)$).*

Обозначим через $\mathcal{R}_\mp(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, резольвентное множество оператора $\widehat{H}_\mp(\zeta)$, то есть такое множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых резольвента $(\widehat{H}_\mp(\zeta) - \lambda\widehat{I})^{-1}$ является ограниченным оператором, определенным на всем пространстве $\mathcal{H}_B$. Так как резольвента — компактный оператор (что следует из (3.1)), то операторы $\widehat{H}_\mp(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, имеют дискретный спектр, состоящий из как-то перенумерованных (вообще говоря, независимо для разных ζ) собственных значений $\lambda^\mp_\nu(\zeta) \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}$, с учетом их (геометрической) кратности (и можно считать, что $\lambda^\mp_\nu(\zeta) = 0$ для всех $\nu = 1, \ldots, \mathcal{N}_\mp$ и $\zeta \in \mathbb{C}$). Резольвентное множество $\mathcal{R}_\mp(\zeta)$ совпадает с дополнением в $\mathbb{C}$ множества собственных значений $\lambda^\mp_\nu(\zeta)$, $\nu \in \mathbb{N}$, оператора $\widehat{H}_\mp(\zeta)$.

Если $\lambda^\mp \in \mathcal{R}_\mp(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ (в этом случае $\lambda^\mp \neq 0$), и $-(\lambda^\mp)^{-1}$ — собственное значение резольвенты $(\widehat{H}_\mp(\zeta) - \lambda^\mp\widehat{I})^{-1}$, то из теоремы Фредгольма следует, что $\overline{\lambda^\mp} \in \mathcal{R}_\pm(\overline{\zeta})$ и $-\overline{(\lambda^\mp)^{-1}}$ — собственное значение резольвенты $(\widehat{H}_\pm(\overline{\zeta}) - \overline{\lambda^\mp}\widehat{I})^{-1}$, при этом (геометрические) кратности собственных значений совпадают (и резольвента $(\widehat{H}_\pm(\overline{\zeta}) - \overline{\lambda^\mp}\widehat{I})^{-1}$ является сопряженным оператором к резольвенте $(\widehat{H}_\mp(\zeta) - \lambda^\mp\widehat{I})^{-1}$). Поэтому $\mathcal{N}_+(\overline{\zeta}) = \mathcal{N}_-(\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и (см. также лемму 3.10) справедлива

Л е м м а 3.11. *$\mathfrak{M}_\pm = \{\overline{\zeta} \colon \zeta \in \mathfrak{M}_\mp\}$ и $\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_-$.*

В дальнейшем предполагается, что число $\mathcal{N} = \mathcal{N}_- = \mathcal{N}_+$ и множества $\mathfrak{M}_\mp = \mathfrak{M}_\mp(\mathcal{N})$ выбираются в соответствии с леммой 3.10.

Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_\mp$ и γ — простой гладкий замкнутый контур в $\mathbb{C}$ (ориентированный против часовой стрелки), лежащий в резольвентном множестве $\mathcal{R}_\mp(\zeta_0)$ и охватывающий единственное собственное значение $\lambda = 0$ ($\lambda^\mp_1(\zeta_0) = \ldots = \lambda^\mp_{\mathcal{N}}(\zeta_0) = 0$) оператора $\widehat{H}_\mp(\zeta_0)$. Так как резольвента $(\widehat{H}_\mp(\zeta) - \lambda\widehat{I})^{-1}$, $\lambda \in \gamma$, непрерывно (в операторной норме) зависит от ζ из некоторой достаточно малой окрестности числа ζ_0 и непрерывная зависимость равномерна по всем $\lambda \in \gamma$, то существует число $r > 0$ такое, что для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ имеет место вложение $\gamma \subset \mathcal{R}_\mp(\zeta)$, и тогда для чисел $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ определен проектор Рисса:

$$\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (\widehat{H}_\mp(\zeta) - \lambda\widehat{I})^{-1}\, d\lambda.$$

Область значений $R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0})$ проектора $\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}$ — конечномерное линейное подпространство собственных и присоединенных функций оператора $\widehat{H}_\mp(\zeta)$, отвечающих собственным значениям $\lambda^\mp_\nu(\zeta)$, находящимся внутри контура γ. Пусть $M^\mp = M^\mp(\zeta_0)$ — размерность подпространства $R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}) \subset \mathcal{H}_B$ (не зависящая от $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ и равная алгебраической кратности собственного значения $\lambda = 0$ оператора $\widehat{H}_\mp(\zeta_0)$); $M^\mp(\zeta_0) \geqslant \mathcal{N}_\mp(\zeta_0) > \mathcal{N}$. Выберем некоторый ортонормированный базис $\widetilde{\Psi}^\mp_\mu$, $\mu = 1, \ldots, M^\mp$, в $R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta_0,\zeta_0})$. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ при достаточно малом $r = r(\varepsilon) > 0$ функции $\widetilde{\Psi}^\mp_\mu(\zeta) \doteq \widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}\widetilde{\Psi}^\mp_\mu$, $\mu = 1, \ldots, M^\mp$, $\zeta \in U_r(\zeta_0)$, образуют некоторый базис в $R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0})$, и при этом

$$\Big|\, 1 - \det\big((\widetilde{\Psi}^\mp_{\mu_1}, \widetilde{\Psi}^\mp_\mu(\zeta))_B\big)^{M^\mp}_{\mu_1,\mu=1} \Big| \leqslant \varepsilon, \tag{3.17}$$

где $\big((\widetilde{\Psi}^\mp_{\mu_1}, \widetilde{\Psi}^\mp_\mu(\zeta))_B\big)^{M^\mp}_{\mu_1,\mu=1}$ — $(M^\mp \times M^\mp)$-матрица, на пересечении μ_1-й строки и μ-го столбца которой стоит скалярное произведение $(\widetilde{\Psi}^\mp_{\mu_1}, \widetilde{\Psi}^\mp_\mu(\zeta))_B$. Пусть $r = r(1/2)$ и $\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta_0}$ — ортогональный проектор (в $\mathcal{H}_B$) на подпространство $R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta_0,\zeta_0})$. Отображение

$$U_r(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \widehat{\mathcal{Q}}^\mp_{\zeta,\zeta_0} \doteq \widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta_0}\,\widehat{H}_\mp(\zeta)\,\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}$$

является аналитической операторнозначной функцией, для которой (в силу (3.17) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$) $R(\widehat{\mathcal{Q}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}) = R(\widehat{\mathcal{P}}^\mp_{\zeta_0,\zeta_0})$ при всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$. Аналитическими функциями являются также матричные элементы:

$$U_r(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto d^\mp_{\mu_1\mu}(\zeta,\zeta_0) \doteq (\widetilde{\Psi}^\mp_{\mu_1}, \widehat{\mathcal{Q}}^\mp_{\zeta,\zeta_0}\,\widetilde{\Psi}^\mp_\mu)_B \in \mathbb{C}, \quad \mu_1, \mu = 1, \ldots, M^\mp.$$

Тогда, учитывая (3.17) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, для всех $\zeta \in U_r(\zeta_0)$, $r = r(1/2)$, получаем, что включение

$$\widetilde{\Psi}^{\mp}(\zeta) \,=\, \sum_{\mu=1}^{M^{\mp}} c_{\mu}^{\mp}(\zeta)\, \widetilde{\Psi}_{\mu}^{\mp}(\zeta) \,\in\, \mathcal{H}_{\mp}(\zeta), \tag{3.18}$$

где $c_{\mu}^{\mp}(\zeta) \in \mathbb{C}$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\mu=1}^{M^{\mp}} d_{\mu_1\mu}^{\mp}(\zeta,\zeta_0)\, c_{\mu}^{\mp}(\zeta) \,=\, \Big(\widetilde{\Psi}_{\mu_1}^{\mp}\,,\, \widehat{\mathcal{Q}}_{\zeta,\zeta_0}^{\mp} \sum_{\mu=1}^{M^{\mp}} c_{\mu}^{\mp}(\zeta) \widetilde{\Psi}_{\mu}^{\mp}\Big)_B \,=\, 0, \quad \mu_1 = 1,\ldots,M^{\mp}. \tag{3.19}$$

Матрица $\big(d_{\mu_1\mu}^{\mp}(\zeta,\zeta_0)\big)_{\mu_1,\,\mu=1}^{M^{\mp}}$ при всех $\zeta \in U_r(\zeta_0) \cap \mathfrak{M}_{\mp}$ имеет ранг $M^{\mp} - \mathcal{N} \in \mathbb{N}$.

Справедлива простая

Л е м м а 3.12. *Пусть $U_r(0) \ni z \mapsto D(z)$ — аналитическая $(M \times M)$-матричнозначная функция (с матричными элементами $D_{\mu_1\mu}(z) \in \mathbb{C}$), $r > 0$, $M \in \mathbb{N}$. Тогда для некоторого (достаточно малого) числа $r_0 \in (0,r]$ все матрицы $D(z)$, $z \in U_{r_0}(0) \setminus \{0\}$, имеют одинаковый ранг M'. Более того, при $M' < M$ существуют аналитические вектор-функции*

$$U_{r_0}(0) \,\ni\, z \,\mapsto\, C^{(l)}(z) \,=\, (C_1^{(l)}(z),\ldots,C_M^{(l)}(z)) \,\in\, \mathbb{C}^M, \quad l \,=\, 1,\ldots,M-M',$$

такие, что при всех $z \in U_{r_0}(0) \setminus \{0\}$ векторы $C^{(l)}(z)$, $l = 1,\ldots,M-M'$, линейно независимы в $\mathbb{C}^M$ и для всех $z \in U_{r_0}(0)$ и всех $l \,=\, 1,\ldots,M-M'$

$$\sum_{\mu=1}^{M} D_{\mu_1\mu}(z)\, C_{\mu}^{(l)} \,=\, 0, \quad \mu_1 = 1,\ldots,M.$$

Так как (при $\zeta \in U_r(\zeta_0)$ и $r = r(1/2)$) функции $\Phi \in \mathcal{H}_B$ принадлежат $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ тогда и только тогда, когда они представимы в виде (3.18) и для коэффициентов $c_{\mu}^{\mp}(\zeta)$, $\mu = 1,\ldots,M^{\mp}$, выполняются равенства (3.19), то из леммы 3.12 следует, что $\mathcal{N}^{\mp}(\zeta)$ — одно и то же число для всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$ (при выборе некоторого $r_0 \in (0,r]$). Но (см. лемму 3.10) $U_{r_0}(\zeta_0) \cap \mathfrak{M}_{\mp} \neq \varnothing$ (для всех $r_0 > 0$). Поэтому $\mathcal{N}^{\mp}(\zeta) = \mathcal{N}^{\mp} = \mathcal{N}$ для всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$ и, значит, $U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\} \subset \mathfrak{M}_{\mp}$. Так как число $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ выбирается любым, то из полученного утверждения и леммы 3.10 вытекает

С л е д с т в и е 3.10. *$\mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ — дискретное (или пустое) множество (без конечных предельных точек).*

Следствие 3.10 дополняет лемму 3.10.

С л е д с т в и е 3.11. *Для любого $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ существуют число $r_0 > 0$ (для которого $U_{r_0} \setminus \{\zeta_0\} \subset \mathfrak{M}_{\mp}$) и аналитические функции*

$$U_{r_0}(\zeta_0) \,\ni\, \zeta \,\mapsto\, \Phi_{\zeta}^{\mp,(l)} \,\in\, \mathcal{H}_{\mp}(\zeta), \quad l = 1,\ldots,\mathcal{N},$$

такие, что при всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$ функции $\Phi_{\zeta}^{\mp,(l)}$ образуют базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$.

З а м е ч а н и е 1. Следствие 3.11 справедливо для всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}$. Но в случае $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_{\mp}$ более сильным утверждением является теорема 3.1.

Для всех $\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp}$ выберем в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ какие-либо ортонормированные базисы функций $E_{\zeta}^{\mp,(l)}$, $l = 1,\ldots,\mathcal{N}$. Для $\zeta,\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ обозначим

$$\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp} \,=\, \Big|\det\big((E_{\zeta}^{\mp,(l)},\, E_{\zeta'}^{\mp,(l')})_B\big)_{l,l'=1}^{\mathcal{N}}\Big|.$$

При этом $\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp}$ не зависит от выбора ортонормированных базисов в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ и $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$, функция $\mathfrak{M}_{\mp} \times \mathfrak{M}_{\mp} \ni (\zeta,\zeta') \mapsto \Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp}$ непрерывна, $\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp} = \Delta_{\zeta',\zeta}^{\mp} \in [0,1]$ для всех $\zeta,\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ и $\Delta_{\zeta,\zeta}^{\mp} = 1$

для всех $\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp}$. Равенство $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $\Phi^{\mp}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$.

Для чисел $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ обозначим

$$\mathcal{M}_{\mp}(\zeta') \doteq \{\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp} \colon \Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} = 0\}.$$

Л е м м а 3.13. *Множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$, не имеют предельных точек в $\mathfrak{M}_{\mp}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть $\zeta_1 \in \mathfrak{M}_{\mp}$ — предельная точка какого-либо множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$. Выберем некоторые ортонормированные базисы $E^{\mp,(l_1)}_{\zeta_1}$ и $E^{\mp,(l')}_{\zeta'}$, $l_1, l' = 1,\ldots,\mathcal{N}$, в подпространствах $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_1)$ и $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$ соответственно. Из теоремы 3.1 следует существование числа $r > 0$ такого, что $U_r(\zeta_1) \subset \mathfrak{M}_{\mp}$, и аналитических функций $U_r(\zeta_1) \ni \zeta \mapsto \Phi^{\mp,(l_1)}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \subset \mathcal{H}_B$, для которых $\Phi^{\mp,(l_1)}_{\zeta_1} = E^{\mp,(l_1)}_{\zeta_1}$, $l_1 = 1,\ldots,\mathcal{N}$, и при этом $\Phi^{\mp,(l_1)}_{\zeta} - E^{\mp,(l_1)}_{\zeta_1} \in \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_1)\big)^{\perp}$ для всех $\zeta \in U_r(\zeta_1)$ (и $l_1 = 1,\ldots,\mathcal{N}$). Следовательно, для всех $\zeta \in U_r(\zeta_1)$ функции $\Phi^{\mp,(l_1)}_{\zeta}$, $l_1 = 1,\ldots,\mathcal{N}$, образуют некоторый базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. Функции

$$U_r(\zeta_1) \ni \zeta \mapsto \mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) \doteq \det\big((E^{\mp,(l')}_{\zeta'}, \Phi^{\mp,(l_1)}_{\zeta})_B\big)^{\mathcal{N}}_{l',l_1=1} \in \mathbb{C}$$

являются аналитическими, и из определения чисел $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'}$ получаем, что $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} = \Delta^{\mp}_{\zeta',\zeta} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) = 0$, $\zeta \in U_r(\zeta_1)$. Так как ζ_1 — предельная точка множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, то $F^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) = 0$ и, следовательно, $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} = 0$ для всех $\zeta \in U_r(\zeta_1)$. Поэтому множество $\mathfrak{M}_{\mp}$ вместе с каждой предельной точкой ζ_1 множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ должно содержать некоторый открытый круг $U_r(\zeta_1) \subseteq \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, $r > 0$. Откуда следует, что $\mathfrak{M}_{\mp} = \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ и, в частности, $\zeta' \in \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$. Но последнее включение противоречит равенству $\Delta^{\mp}_{\zeta',\zeta'} = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.13.

Л е м м а 3.14. *Для любого $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ точки $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ не являются предельными точками множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E^{\mp,(l')}_{\zeta'}$, $l' = 1,\ldots,\mathcal{N}$, — некоторый ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$, $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$. Для любой точки $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ в соответствии со следствием 3.11 можно выбрать число $r_0 = r_0(\zeta_0) > 0$, для которого $U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\} \subset \mathfrak{M}_{\mp}$, и аналитические функции $U_{r_0}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \Phi^{\mp,(l)}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$, $l = 1,\ldots,\mathcal{N}$, такие, что при всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$ функции $\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}$ образуют базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. Для всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$ равенство $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'}$ $(= \Delta^{\mp}_{\zeta',\zeta}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) = 0$, где

$$U_r(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) \doteq \det\big((E^{\mp,(l')}_{\zeta'}, \Phi^{\mp,(l)}_{\zeta})_B\big)^{\mathcal{N}}_{l',l=1} \in \mathbb{C}$$

— аналитическая функция[2]. Если точка $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ является предельной точкой множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, то $\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) = 0$ при всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0)$. В этом случае $U_{r_0}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\} \subseteq \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, что противоречит лемме 3.13. Поэтому все точки $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_{\mp}$ не являются предельными точками множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$. Лемма 3.14 доказана. $\square$

Из лемм 3.13 и 3.14 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е 3.12. *Множества $\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$, не имеют (конечных) предельных точек в $\mathbb{C}$.*

Л е м м а 3.15. *Пусть $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ и $\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$. Тогда для любой функции $\chi \in \mathcal{H}_B$ найдется (единственная) функция $\chi' \in \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$ такая, что $\chi' - \chi \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. При этом*

$$\|\chi'\|_B \leqslant (\mathcal{N}+1)(\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'})^{-1}\|\chi\|_B.$$

[2]Для этой функции, как и для функций $\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}$, выбраны такие же обозначения, как и в доказательстве леммы 3.13 для других функций. Но использование таких обозначений делает доказательство леммы 3.14 аналогичным доказательству леммы 3.13.

Доказательство. Пусть $E_{\zeta}^{\mp,(l)}$ и $E_{\zeta'}^{\mp,(l')}$, $l, l' = 1, \ldots, \mathcal{N}$, — некоторые ортонормированные базисы в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ и $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$ соответственно. Тогда условие $\chi' - \chi \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ эквивалентно выполнению равенства $\chi' = \chi + \sum\limits_{l=1}^{\mathcal{N}} c_l^{\mp} E_{\zeta}^{\mp,(l)}$, где $c_l^{\mp} \in \mathbb{C}$, и условие $\chi' \in \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$ означает, что для всех $l' = 1, \ldots, \mathcal{N}$

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} c_l^{\mp}\, (E_{\zeta'}^{\mp,(l')}, E_{\zeta}^{\mp,(l)})_B \,=\, -(E_{\zeta'}^{\mp,(l')}, \chi)_B. \tag{3.20}$$

Так как $\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp} > 0$, то из уравнений (3.20) однозначно определяются коэффициенты $c_l^{\mp}$ и, следовательно, однозначно определяется функция χ'. Модули всех алгебраических дополнений элементов матрицы $\big((E_{\zeta'}^{\mp,(l')}, E_{\zeta}^{\mp,(l)})_B\big)_{l',l=1}^{\mathcal{N}}$ не превосходят 1, поэтому модули всех элементов обратной к ней матрицы не превосходят $(\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp})^{-1}$, откуда

$$\Big\| \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} c_l^{\mp}\, E_{\zeta}^{\mp,(l)} \Big\|_B \,\leqslant\, \mathcal{N}\, (\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp})^{-1}\, \|\widehat{P}^{\mp}(\zeta')\chi\|_B \,\leqslant\, \mathcal{N}\, (\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp})^{-1}\, \|\chi\|_B,$$

$$\|\chi'\|_B \,\leqslant\, \|\chi\|_B \,+\, \Big\| \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} c_l^{\mp}\, E_{\zeta}^{\mp,(l)} \Big\|_B \,\leqslant\, (\mathcal{N}+1)\, (\Delta_{\zeta,\zeta'}^{\mp})^{-1}\, \|\chi\|_B.$$

Лемма 3.15 доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$. Тогда для любой функции $\Phi_{\zeta'}^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$ существует аналитическая функция $\mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta') \ni \zeta \mapsto \Phi_{\zeta,\zeta'}^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \subset \mathcal{H}_B$ такая, что $\Phi_{\zeta',\zeta'}^{\mp} = \Phi_{\zeta'}^{\mp}$ и $\Phi_{\zeta,\zeta'}^{\mp} - \Phi_{\zeta'}^{\mp} \in \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$ при всех $\zeta \in \mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$.*

Доказательство. Зафиксируем (ненулевую) функцию $\Phi_{\zeta'}^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$, $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$, и пусть $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$. Для каждой функции $\Phi_{\zeta_0}^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$ в соответствии с теоремой 3.1 выберем функции $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \in \mathcal{H}_B^2 \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)\big)^{\perp}$, $j \in \mathbb{N}$, для которых

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \,=\, -\widehat{Z}_{\mp}\, \chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}, \quad j \in \mathbb{N}$$

(где $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(0)} \doteq \Phi_{\zeta_0}^{\mp}$). При этом справедливы оценки (3.13) и (3.14), в которых фигурирует константа $C_{\mp} = C_{\mp}(\zeta_0)$ из леммы 3.5[3]. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, для каких функций $\Phi_{\zeta_0}^{\mp}$ определяются функции $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}$, будет также использоваться обозначение $\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} = \chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Для всех $\Phi_{\zeta_0}^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$

$$\|\widehat{Z}_{\mp}\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\|_B \,\leqslant\, \widetilde{C}\, \|\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\|_B, \tag{3.21}$$

где $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\zeta_0) > 0$. (И из следствия 3.1 (и (3.5)), в частности, вытекает, что для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ константу $\widetilde{C} > 0$ можно выбрать независимо от $\zeta \in \mathcal{K}$.) Из (3.14) и (3.21) получаем

$$\|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \,\leqslant \widetilde{c}\, c_{\mp}^{-j}\, \|\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\|_B, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

где $\widetilde{c} = \max\{1, (2B)^{-\frac{1}{2}}\, \widetilde{C}\}$ и $c_{\mp} = \min\{1, \sqrt{2B}\, C_{\mp}\}$. Обозначим $\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(0)} \doteq \Phi_{\zeta_0}^{\mp}$ $(= \chi_{\zeta_0}^{\mp,(0)})$ и в соответствии с леммой 3.15 последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ определим функции $\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$ так, что (при всех $j \in \mathbb{N}$)

$$\begin{gathered} \widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \,\doteq \\ \doteq\, \chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(0)}\} \,+\, \chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\} \,+\, \ldots \,+\, \chi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\} \,+\, \Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j)} \,\in\, \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}. \end{gathered} \tag{3.23}$$

[3]Из леммы 3.7 следует, что для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathfrak{M}_{\mp} \setminus \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ найдется константа $C_{\mp} = C_{\mp}[\mathcal{K}] > 0$, для которой при всех $\zeta \in \mathcal{K}$ и $\Phi \in \mathcal{H}_B^2 \cap \big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\big)^{\perp}$ имеет место оценка $\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\Phi\|_B \geqslant C_{\mp}\, \|\widehat{Z}_{-}\widehat{Z}_{+}\Phi\|_B$ (то есть в условиях леммы 3.5 можно выбрать одну и ту же константу $C_{\mp}$ для всех $\zeta \in \mathcal{K}$).

Из леммы 3.15 и (3.22) следуют оценки

$$\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant (\mathcal{N}+1)\,(\Delta_{\zeta_0,\zeta'}^{\mp})^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big(\,\|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(0)}\}\|_B + \|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\}\|_B + \ldots + \|\chi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\{\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\}\|_B\big) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{c}\,(\mathcal{N}+1)\,(\Delta_{\zeta_0,\zeta'}^{\mp})^{-1}\,\big(\,c_{\mp}^{-j}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(0)}\|_B + c_{\mp}^{-j+1}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\|_B + \ldots + c_{\mp}^{-1}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\|_B\big), \quad j\in\mathbb{N}. \tag{3.24}$$

Воспользуемся следующей простой леммой.

Л е м м а 3.16. *Пусть $a\geqslant 1$, $c>0$ и для чисел $x_j>0$, $j\in\mathbb{Z}_+$, выполняются неравенства*

$$x_1\leqslant \frac{a}{c}\,x_0,\quad x_2\leqslant a\biggl(\frac{x_0}{c^2}+\frac{x_1}{c}\biggr),\quad \ldots,\quad x_j\leqslant a\left(\frac{x_0}{c^j}+\ldots+\frac{x_{j-1}}{c}\right),\quad \ldots.$$

Тогда $x_j\leqslant 2^{\,j-1}\left(\frac{a}{c}\right)^j x_0$ для всех $j\in\mathbb{N}$.

Из (3.24) и леммы 3.16 вытекают неравенства

$$\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant 2^{\,j-1}\left(\widetilde{c}\,(\mathcal{N}+1)\,c_{\mp}^{-1}\,(\Delta_{\zeta_0,\zeta'}^{\mp})^{-1}\right)^j\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\|_B, \quad j\in\mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Следовательно (см. (3.23)),

$$\|\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant \widetilde{c}\,c_{\mp}^{-j}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(0)}\|_B + \widetilde{c}\,c_{\mp}^{-j+1}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(1)}\|_B + \ldots + \widetilde{c}\,c_{\mp}^{-1}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}\|_B + \|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant$$
$$\leqslant 2\widetilde{c}\,\big(2(\mathcal{N}+1)\,\widetilde{c}\,c_{\mp}^{-1}\,(\Delta_{\zeta_0,\zeta'}^{\mp})^{-1}\big)^j\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\|_B, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Из этих оценок, обозначив $r_0^{\mp}=r_0^{\mp}(\zeta',\zeta_0)\doteq\big(2(\mathcal{N}+1)\,\widetilde{c}\,\big)^{-1}c_{\mp}\,\Delta_{\zeta_0,\zeta'}^{\mp}>0$ и выбрав число $r^{\mp}=r^{\mp}(\zeta',\zeta_0)\in(0,r_0^{\mp}]$ так, чтобы выполнялось вложение $U_{r^{\mp}}(\zeta_0)\subset\mathfrak{M}_{\mp}$, следует, что для любого $r\in(0,r^{\mp})$ ряд

$$\Phi_{\zeta_0}^{\mp}+\sum_{j=1}^{+\infty}(\zeta-\zeta_0)^j\,\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}$$

абсолютно и равномерно при всех $\zeta\in U_r(\zeta_0)$ сходится к аналитической функции $U_{r^{\mp}}(\zeta_0)\ni\zeta\mapsto\widetilde{\Phi}_{\zeta,\zeta_0}^{\mp}\in\mathcal{H}_B$. При этом (учитывая выбор функций $\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}$)

$$\widetilde{\Phi}_{\zeta,\zeta_0}^{\mp}-\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\in\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}, \quad \zeta\in U_{r^{\mp}}(\zeta_0). \tag{3.26}$$

(Так как функцию $\Phi_{\zeta_0}^{\mp}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$ можно выбирать любой, то из (3.26) вытекает вложение $U_{r^{\mp}}(\zeta_0)\subset\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$.) Рассмотрим также функции

$$\mathbb{C}\ni\zeta\mapsto\widetilde{\Phi}_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}}\doteq\Phi_{\zeta_0}^{\mp}+\sum_{j=1}^{N}(\zeta-\zeta_0)^j\,\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}, \quad N\in\mathbb{N}.$$

Из определения функций $\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}$ следует, что

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta_0)\,\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}=-\widehat{Z}_{\mp}\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j-1)}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Откуда

$$\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\,\widetilde{\Phi}_{\zeta,\zeta_0}^{\mp,\{N\}}=(\zeta-\zeta_0)^{N+1}\,\widehat{Z}_{\mp}\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(N)}, \quad \zeta\in\mathbb{C}, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Из (3.13), (3.21) и (3.23) вытекают оценки

$$\|\widehat{Z}_{\mp}\widetilde{\chi}_{\zeta_0}^{\mp,(j)}\|_B \leqslant \sum_{\mu=0}^{j}c_{\mp}^{-j+\mu}\,\|\widehat{Z}_{\mp}\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(\mu)}\|_B \leqslant \widetilde{C}\sum_{\mu=0}^{j}c_{\mp}^{-j+\mu}\,\|\Phi_{\zeta_0}^{\mp,(\mu)}\|_B, \quad j\in\mathbb{Z}_+,$$

и, следовательно (см. (3.25)),

$$\|\widehat{Z}_{\mp}\widetilde{\chi}^{\mp,(j)}_{\zeta_0}\|_B \leqslant \widetilde{C}c_{\mp}^{-j}\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{j}\big(2\widetilde{c}\,(\mathcal{N}+1)\,(\Delta^{\mp}_{\zeta_0,\,\zeta'})^{-1}\big)^{\mu}\Big)\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B \leqslant$$

$$\leqslant 2\widetilde{C}\,\big(2\widetilde{c}\,(\mathcal{N}+1)\,c_{\mp}^{-1}\,(\Delta^{\mp}_{\zeta_0,\,\zeta'})^{-1}\big)^{j}\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\|_B, \quad j\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда из (3.27) получаем, что (для всех $\zeta\in U_{r^{\mp}}(\zeta_0)$) $\|\widehat{H}_{\mp}(\zeta)\widetilde{\Phi}^{\mp,\{N\}}_{\zeta,\,\zeta_0}\|_B\to 0$ при $N\to+\infty$, и поэтому (в силу замкнутости оператора $\widehat{H}_{\mp}(\zeta)$) $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ для всех $\zeta\in U_{r^{\mp}}(\zeta_0)$.

Теперь для каждого числа $\zeta_0\in\mathfrak{M}_{\mp}\backslash\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ (однозначно) выберем функцию $\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta_0)$, для которой $\Phi^{\mp}_{\zeta_0}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}\in\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$. Выше определены числа $r^{\mp}(\zeta',\zeta_0)>0$, для которых $U_{r^{\mp}(\zeta',\zeta_0)}(\zeta_0)\subset\mathfrak{M}_{\mp}\backslash\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, и аналитические функции $U_{r^{\mp}(\zeta',\zeta_0)}(\zeta_0)\ni\zeta\mapsto\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\zeta_0}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\subset\mathcal{H}_B$ такие, что $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta_0,\,\zeta_0}=\Phi^{\mp}_{\zeta_0}$ и $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0}-\Phi^{\mp}_{\zeta_0}\in\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$ при всех $\zeta\in U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0)}(\zeta_0)$. Покажем, что существует аналитическая функция $\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')\ni\zeta\mapsto\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\subset\mathcal{H}_B$, совпадающая с каждой функцией $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0}$, $\zeta_0\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, при всех $\zeta\in U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0)}(\zeta_0)$. Так как

$$\bigcup_{\zeta_0\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')} U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0)}(\zeta_0) = \mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta'),$$

то для этого достаточно показать, что для всех $\zeta_0',\,\zeta_0''\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ и $\zeta\in U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0')}(\zeta_0')\cap\cap U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0'')}(\zeta_0'')$ выполняется равенство $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0'}=\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0''}$. Но в этом случае $\zeta\notin\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ и все функции $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0'}-\Phi^{\mp}_{\zeta_0'}$, $\Phi^{\mp}_{\zeta_0'}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}$, $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0''}-\Phi^{\mp}_{\zeta_0''}$ и $\Phi^{\mp}_{\zeta_0''}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}$ принадлежат $\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$, поэтому $\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0'}-\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0''}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)\cap\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}=\{0\}$, что означает, что $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0'}=\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0''}$ и, следовательно, существует аналитическая функция $\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')\ni\zeta\mapsto\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}$, совпадающая с функциями $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta,\,\zeta_0}$, $\zeta_0\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, при всех $\zeta\in U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0)}(\zeta_0)$. Если $\zeta'\in U_{r^{\mp}(\zeta',\,\zeta_0)}(\zeta_0)$ для некоторого $\zeta_0\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, то функции $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta',\,\zeta_0}-\Phi^{\mp}_{\zeta_0}$ и $\Phi^{\mp}_{\zeta_0}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}$ принадлежат $\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$. Откуда $\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta',\,\zeta_0}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\cap\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}=\{0\}$ и, следовательно, $\Phi^{\mp}_{\zeta',\,\zeta'}=\widetilde{\Phi}^{\mp}_{\zeta',\,\zeta_0}=\Phi^{\mp}_{\zeta'}$. Функция $\zeta\mapsto\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}$ обладает всеми нужными свойствами. Теорема 3.2 доказана. □

Л е м м а 3.17. *Пусть* $\zeta'\in\mathfrak{M}_{\mp}$, $\Phi^{\mp}_{\zeta'}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$ *и* $\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')\ni\zeta\mapsto\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}\in\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ — *аналитическая функция, для которой* $\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}-\Phi^{\mp}_{\zeta'}\in\big(\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')\big)^{\perp}$ *при всех* $\zeta\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ (*существование такой функции утверждается в теореме* 3.2). *Тогда для всех* $\zeta\in\mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ *справедлива оценка*

$$\|\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}\|_B \leqslant \mathcal{N}\,(\Delta^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'})^{-1}\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta'}\|_B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $\zeta\in\mathfrak{M}_{\mp}\backslash\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ выполняется равенство $\Phi^{\mp}_{\zeta'}=\widehat{P}_{\mp}(\zeta')\Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta'}$ (и, в частности, $\Phi^{\mp}_{\zeta',\,\zeta'}=\Phi^{\mp}_{\zeta'}$). Пусть $E^{\mp,(l)}_{\zeta}$ и $E^{\mp,(l')}_{\zeta'}$, $l,l'=1,\ldots,\mathcal{N}$, — некоторые ортонормированные базисы в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$ и $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$ соответственно. Тогда $\Phi^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'}=\sum\limits_{l=1}^{\mathcal{N}}c^{\mp}_l\,E^{\mp,(l)}_{\zeta}$, где $c^{\mp}_l\in\mathbb{C}$, и для всех $l'=1,\ldots,\mathcal{N}$

$$(E^{\mp,(l')}_{\zeta'},\Phi^{\mp}_{\zeta'})_B = \sum_{l=1}^{\mathcal{N}}c^{\mp}_l\,(E^{\mp,(l')}_{\zeta'},\,E^{\mp,(l)}_{\zeta})_B.$$

Так как модули элементов обратной матрицы к матрице $\big((E^{\mp,(l')}_{\zeta'},\,E^{\mp,(l)}_{\zeta})_B\big)^{\mathcal{N}}_{l',l=1}$ не превосходят $(\Delta^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'})^{-1}$ (см. также доказательство леммы 3.15), то

$$|c^{\mp}_l| \leqslant (\Delta^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'})^{-1}\sum_{l'=1}^{\mathcal{N}}\big|(E^{\mp,(l')}_{\zeta'},\Phi^{\mp}_{\zeta'})_B\big| \leqslant \sqrt{\mathcal{N}}\,(\Delta^{\mp}_{\zeta,\,\zeta'})^{-1}\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta'}\|_B, \quad l=1,\ldots,\mathcal{N},$$

и, следовательно,

$$\|\Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta'}\|_B = \left(\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} |c_l^{\mp}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathcal{N}\,(\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'})^{-1}\,\|\Phi^{\mp}_{\zeta'}\|_B.$$

Лемма 3.17 доказана. □

Л е м м а 3.18. *Пусть* $\zeta' \in \mathfrak{M}_{\mp}$ *и* $\Phi^{\mp} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$. *Тогда для любого* $\zeta_0 \in (\mathbb{C}\backslash\mathfrak{M}_{\mp}) \cup \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$ *найдется число* $r_0 > 0$ *такое, что* $U_{r_0}(\zeta_0)\backslash\{\zeta_0\} \subset \mathfrak{M}_{\mp}\backslash\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, *и функция* $\mathfrak{M}_{\mp}\backslash\mathcal{M}_{\mp}(\zeta') \ni \zeta \mapsto$ $\mapsto \Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta'} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \subset \mathcal{H}_B$, *определяемая (для функции* $\Phi^{\mp}_{\zeta'}$*) в теореме 3.2, либо имеет в точке* ζ_0 *полюс (конечного порядка) и определена при всех* $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\}$, *либо аналитически продолжается на весь открытый круг* $U_{r_0}(\zeta_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\zeta_0 \in (\mathbb{C}\setminus\mathfrak{M}_{\mp}) \cup \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$. Существование числа $r_0' > 0$, для которого $U_{2r_0'}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\} \subset \mathfrak{M}_{\mp}\setminus\mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, вытекает из следствия 3.12. Для числа $r_0' > 0$ можно найти число $r_0 \in (0, r_0']$ и аналитические функции

$$U_{2r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\} \ni \zeta \mapsto \Phi^{\mp,(l)}_{\zeta} \in \mathcal{H}_{\mp}(\zeta) \subset \mathcal{H}_B, \quad l = 1,\dots,\mathcal{N},$$

такие, что для всех $\zeta \in U_{2r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\}$ функции $\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}$, $l = 1,\dots,\mathcal{N}$, образуют некоторый базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. Если $\zeta_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathfrak{M}_{\mp}$, то существование таких функций утверждается в следствии 3.11. Если $\zeta_0 \in \mathcal{M}_{\mp}(\zeta')$, то существование числа $r_0 \in (0, r_0']$ и функций $\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}$ следует также из теоремы 3.1 (см. доказательство леммы 3.13). Пусть $E^{\mp,(l')}_{\zeta'}$, $l' = 1,\dots,\mathcal{N}$, — какой-либо ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta')$. Определим (как и при доказательстве лемм 3.13 и 3.14) аналитическую функцию

$$U_{2r_0}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto \mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) \doteq \det\big((E^{\mp,(l')}_{\zeta'}, \Phi^{\mp,(l)}_{\zeta})_B\big)_{l',l=1}^{\mathcal{N}} \in \mathbb{C}.$$

Так как при каждом $\zeta \in U_{2r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\}$ функции $\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}$, $l = 1,\dots,\mathcal{N}$, образуют базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$, то можно последовательно выбрать функции

$$\widetilde{\Phi}^{\mp,(1)}_{\zeta} = \Phi^{\mp,(1)}_{\zeta}, \quad \widetilde{\Phi}^{\mp,(2)}_{\zeta} = \Phi^{\mp,(2)}_{\zeta} - c_{2,1}\,\Phi^{\mp,(1)}_{\zeta}, \quad \dots,$$

$$\widetilde{\Phi}^{\mp,(\mathcal{N})}_{\zeta} = \Phi^{\mp,(\mathcal{N})}_{\zeta} - c_{\mathcal{N},\mathcal{N}-1}\,\Phi^{\mp,(\mathcal{N}-1)}_{\zeta} - \dots - c_{\mathcal{N},1}\,\Phi^{\mp,(1)}_{\zeta},$$

где $c_{l',l} = c_{l',l}(\zeta) \in \mathbb{C}$ ($l' = 2,\dots,\mathcal{N}$; $l = 1,\dots,l'-1$), которые образуют ортогональный (но, вообще говоря, не нормированный) базис в $\mathcal{H}_{\mp}(\zeta)$. При этом $\|\widetilde{\Phi}^{\mp,(l)}_{\zeta}\|_B \leqslant \|\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}\|_B$ для всех $l = 1,\dots,\mathcal{N}$. Справедливо равенство

$$\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) = \det\big((E^{\mp,(l')}_{\zeta'}, \widetilde{\Phi}^{\mp,(l)}_{\zeta})_B\big)_{l',l=1}^{\mathcal{N}},$$

откуда (при всех $\zeta \in U_{2r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\}$)

$$|\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta)| = \Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} \cdot \prod_{l=1}^{\mathcal{N}} \|\widetilde{\Phi}^{\mp,(l)}_{\zeta}\|_B. \tag{3.28}$$

Из (3.28) (так как $\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} > 0$), в частности, следует, что $\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) \neq 0$. Так как $U_{2r_0}(\zeta_0) \ni \zeta \mapsto$ $\mapsto \mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta) \in \mathbb{C}$ — аналитическая функция, то найдутся числа $C > 0$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что при всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0)$

$$|\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta)| \geqslant C\,|\zeta - \zeta_0|^m. \tag{3.29}$$

Обозначим

$$C_1 = \max_{\zeta \in \overline{U}_{r_0}(\zeta_0)} \prod_{l=1}^{\mathcal{N}} \|\Phi^{\mp,(l)}_{\zeta}\|_B \in (0, +\infty).$$

Из (3.28) также следует, что

$$|\mathcal{F}^{\mp}_{\zeta'}(\zeta)| \leqslant C_1\, \Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'}, \quad \zeta \in U_{r_0}(\zeta_0). \tag{3.30}$$

Тогда из (3.29) и (3.30) вытекает неравенство

$$\Delta^{\mp}_{\zeta,\zeta'} \geqslant CC_1^{-1}\, |\zeta-\zeta_0|^m, \quad \zeta \in U_{r_0}(\zeta_0),$$

и в силу леммы 3.17 для всех $\zeta \in U_{r_0}(\zeta_0)\setminus\{\zeta_0\}$

$$\|\Phi^{\mp}_{\zeta,\zeta'}\|_B \leqslant \mathcal{N} C_1 C^{-1}\, |\zeta-\zeta_0|^{-m}\, \|\Phi^{\mp}_{\zeta'}\|_B,$$

что доказывает лемму 3.23. □

Л е м м а 3.19. *Для любого $R \geqslant 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\zeta \in \overline{U}_R(0)$ и всех $\Phi \in \mathcal{H}^1_B$ справедлива оценка*

$$\|(\widehat{Z}_+ + \zeta\widehat{I})\Phi\|_B \geqslant \varepsilon\, \|\Phi\|_B\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда для некоторого $R > 0$ найдутся последовательность $\zeta_j \in \overline{U}_R(0)$ и функции $\Phi_j \in \mathcal{H}^1_B$, $\|\Phi_j\|_B = 1$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\|(\widehat{Z}_+ + \zeta_j\widehat{I})\Phi_j\|_B \to 0$ при $j \to +\infty$. Так как последовательность $\|\widehat{Z}_+\Phi_j\|_B$, $j \in \mathbb{N}$, ограничена, то $\{\Phi_j\colon j \in \mathbb{N}\}$ — предкомпактное множество в $\mathcal{H}_B$. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательностям, можно считать, что $\zeta_j \to \zeta_0 \in \overline{U}_R(0)$ и $\Phi_j \to \Phi_0 \in \mathcal{H}_B$ при $j \to +\infty$, причем $\|\Phi_0\|_B = 1$. Тогда также $\widehat{Z}_+\Phi_j \to -\zeta_0\Phi_0$ при $j \to +\infty$, и в силу замкнутости оператора $\widehat{Z}_+$ получаем, что $\Phi_0 \in \mathcal{H}^1_B$ и

$$(\widehat{Z}_+ + \zeta_0\widehat{I})\Phi_0 = 0. \tag{3.31}$$

Если $\zeta_0 = 0$, то $\widehat{Z}_+\Phi_0 = 0$ и, следовательно (см. (3.5)), $\Phi_0 = 0$, что противоречит условию $\|\Phi_0\|_B = 1$. Если $\zeta_0 \neq 0$, то, обозначив через m наименьшее число из $\mathbb{Z}_+$, для которого $\widehat{P}^{(m)}\Phi_0 \neq 0$ (а такое число существует в силу условия $\|\Phi_0\| = 1$), получаем, что $\widehat{P}^{(m)}(\widehat{Z}_+ + \zeta_0\widehat{I})\Phi_0 = \zeta_0\widehat{P}^{(m)}\Phi_0 \neq 0$, что противоречит равенству (3.31). Полученное противоречие доказывает лемму. □

Т е о р е м а 3.3. *Существует константа $C > 0$ такая, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и всех функций $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$, для которых $\widehat{P}^{(0)}\Phi = 0$, справедлива оценка*

$$\|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)\Phi\|_B \geqslant C\,|\zeta|\,\|\Phi\|_B. \tag{3.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы не использовать при доказательстве громоздких обозначений, положим $\zeta' = (2B)^{-\frac{1}{2}}\,\zeta$ и введем операторы $\widehat{Z}'_{\mp} = (2B)^{-\frac{1}{2}}\,\widehat{Z}_{\mp}$, для которых (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \widehat{Z}'_+\Psi_j^{(m)} &= \sqrt{m+1}\,\Psi_j^{(m+1)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,\\ \widehat{Z}'_-\Psi_j^{(m)} &= \sqrt{m}\,\Psi_j^{(m-1)}, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

при этом $\widehat{Z}'_-\Psi_j^{(0)} = 0$, $j = 1,\ldots,P$. Доказываемое неравенство (3.32) записывается в виде

$$\|(\widehat{Z}'_+\widehat{Z}'_- + \zeta'\widehat{Z}'_-)\Phi\|_B \geqslant C'\,|\zeta'|\,\|\Phi\|_B, \tag{3.34}$$

где $C' = \sqrt{2B}\,C$.

Так как $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B[\Psi_1]\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_B[\Psi_P]$ и подпространства $\mathcal{H}_B[\Psi_j]$, $j = 1,\ldots,P$, инвариантны при действии операторов $\widehat{Z}_+$ и $\widehat{Z}_-$, то оценку (3.34) можно доказывать только для функций $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$, принадлежащих одному из подпространств $\mathcal{H}_B[\Psi_j]$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Phi \in \mathcal{H}^2_B \cap \mathcal{H}_B[\Psi_1]$. Из леммы 3.19 (и равенств (3.33)) также следует, что оценку (3.34) (или, что то же самое, оценку (3.32)) можно доказывать только при всех достаточно больших $|\zeta'|$ (это может привести только к изменению константы C')[4].

[4]Действительно, пусть $R > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(R) > 0$ — число, определяемое в лемме 3.19. Тогда для всех $\zeta \in \overline{U}_R(0)$ и всех функций $\Phi \in \mathcal{H}^2_B$, для которых $\widehat{P}^{(0)}\Phi = 0$, имеют место неравенства $\|(\widehat{Z}'_+\widehat{Z}'_- + \zeta'\widehat{Z}'_-)\Phi\|_B = \|(\widehat{Z}'_+ + \zeta')\widehat{Z}'_-\Phi\|_B \geqslant (2B)^{-1/2}\varepsilon\,\|\widehat{Z}'_-\Phi\|_B \geqslant (2B)^{-1/2}\varepsilon\,\|\Phi\|_B \geqslant (2B)^{-1/2}\varepsilon R^{-1}|\zeta|\,\|\Phi\|_B = \varepsilon R^{-1}|\zeta'|\,\|\Phi\|_B$.

Пусть $\Phi \in \mathcal{H}_B^2 \cap \mathcal{H}_B[\Psi_1]$. Тогда $\Phi = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} c_j \Psi_1^{(j)}$, где $c_j \in \mathbb{C}$. Условие $\widehat{P}^{(0)}\Phi = 0$ означает, что $c_0 = 0$. С помощью (3.33) получаем

$$\|(\widehat{Z}_+'\widehat{Z}_-' + \zeta'\widehat{Z}_-')\Phi\|_B^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |d_j|^2,$$

где $d_j = jc_j + \zeta'\sqrt{j+1}\,c_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Выберем какое-либо число $\delta \in (0, \frac{1}{4})$. Будем далее предполагать, что $|\zeta'| \geqslant 2\delta^{-1} > 8$. Пусть $a \geqslant 2$ — натуральное число, представимое в виде $a = \delta'|\zeta'|$, где $\delta' \in (\frac{1}{2}\delta, \delta]$.

Положим $j_o = [|\zeta'|^2] + 1$ (где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$), тогда $\sqrt{j_0 - 1} \leqslant |\zeta'| < \sqrt{j_0}$. Определим также натуральные числа $j_2' = j_0 - 2a$, $j_1' = j_0 - a$, $j_1'' = j_0 + a$ и $j_2'' = j_0 + 2a$.

Оценим вначале снизу сумму $\sum\limits_{j=0}^{N_-} |d_j|^2$, если $N_- \in \{j_2', \ldots, j_1'\}$ (в дальнейшем эта оценка будет использоваться при $N_- = j_2'$ и $N_- = j_1' - 1$). Обозначим $N_* = [\frac{1}{2}|\zeta'|^2] + 1$. Справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}|\zeta'|^2 < N_* \leqslant \frac{1}{2}|\zeta'|^2 + 1 < |\zeta'|^2 - 2\delta|\zeta'| < j_0 - 2a \leqslant N_- \leqslant j_0 - a < j_0 - 1 \leqslant |\zeta'|^2.$$

Положим $\varepsilon_{N_-} \doteq \frac{1}{2}(j_0 - N_- - 1)|\zeta'|^{-2}$. Тогда

$$\varepsilon_{N_-} < \frac{|\zeta'|^2 - N_-}{|\zeta'|(|\zeta'| + \sqrt{N_-})} = \frac{|\zeta'| - \sqrt{N_-}}{|\zeta'|}, \qquad \sqrt{N_-} < (1 - \varepsilon_{N_-})|\zeta'|$$

и, следовательно, $j < (1 - \varepsilon_{N_-})|\zeta'|\sqrt{j}$ для всех $j = N_* + 1, \ldots, N_-$. Поэтому

$$\Big(\sum_{j=N_*}^{N_-} |d_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant |\zeta'|\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1} j|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\sum_{j=N_*}^{N_-} j^2|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant |\zeta'|\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1} j|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-} j^2|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - N_*|c_{N_*}| \geqslant \varepsilon_{N_-}|\zeta'|\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1} j|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - N_*|c_{N_*}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,\frac{a-1}{|\zeta'|}\sqrt{N_*+1}\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - N_*|c_{N_*}| \geqslant \frac{a}{4\sqrt{2}}\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - N_*|c_{N_*}|.$$

С другой стороны, так как $\sqrt{N_* - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|\zeta'|$, то $j \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|\zeta'|\sqrt{j}$ для всех $j = 1, \ldots, N_* - 1$, и, следовательно,

$$\Big(\sum_{j=0}^{N_*-1} |d_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant |\zeta'|\Big(\sum_{j=1}^{N_*} j|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\sum_{j=1}^{N_*-1} j^2|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}|\zeta'|\Big(\sum_{j=1}^{N_*} j|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant (2-\sqrt{2})\,a\Big(\sum_{j=1}^{N_*} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}|\zeta'|\sqrt{N_*}|c_{N_*}| \geqslant (2-\sqrt{2})\,a\Big(\sum_{j=1}^{N_*} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}N_*|c_{N_*}|.$$

В результате получаем

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=0}^{N_-}|d_j|^2\Big)^{\frac12} &\geqslant \frac{1}{\sqrt2}\Big(\sum_{j=0}^{N_*-1}|d_j|^2\Big)^{\frac12} + \frac{1}{\sqrt2}\Big(\sum_{j=N_*}^{N_-}|d_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt2}\Big(\sum_{j=0}^{N_*-1}|d_j|^2\Big)^{\frac12} + \frac{1}{\sqrt2}\Big(\frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2}\Big)\Big(\sum_{j=N_*}^{N_-}|d_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \\
&\geqslant (\sqrt2-1)\,a\Big(\sum_{j=1}^{N_*}|c_j|^2\Big)^{\frac12} + \frac{\sqrt2-1}{16\sqrt2}\,a\Big(\sum_{j=N_*+1}^{N_-+1}|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \\
&\geqslant \frac{\sqrt2-1}{16\sqrt2}\,a\Big(\sum_{j=1}^{N_-+1}|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \frac{a}{55}\Big(\sum_{j=1}^{N_-+1}|c_j|^2\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Теперь получим оценку снизу для суммы $\sum\limits_{j=N_+}^{+\infty}|d_j|^2$ при $N_+\in\{j_1'',\dots,j_2''\}$ (эта оценка будет использоваться при $N_+=j_1''$ и $N_+=j_2''$). Имеют место неравенства $|\zeta'|^2+a<j_0+a\leqslant N_+\leqslant \leqslant j_0+2a$. Если $\widetilde\varepsilon_{N_+}\doteq \frac13\,a\,|\zeta'|^{-2}$, то

$$
N_+ > |\zeta'|^2+a = |\zeta'|^2(1+3\,\widetilde\varepsilon_{N_+}) > |\zeta'|^2(1+\widetilde\varepsilon_{N_+})^2,
$$

и, следовательно, для всех $j\geqslant N_+$ выполняется неравенство $j>(1+\widetilde\varepsilon_{N_+})\,|\zeta'|\sqrt{j}$, откуда

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}|d_j|^2\Big)^{\frac12} &\geqslant \Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}j^2|c_j|^2\Big)^{\frac12} - |\zeta'|\Big(\sum_{j=N_++1}^{+\infty}j|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \\
&\geqslant \widetilde\varepsilon_{N_+}\,|\zeta'|\Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}j|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \frac{a}{3|\zeta'|}\sqrt{N_+}\Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \\
&\geqslant \frac{a}{3}\Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}|c_j|^2\Big)^{\frac12} \geqslant \frac{a}{55}\Big(\sum_{j=N_+}^{+\infty}|c_j|^2\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Далее, обозначим

$$
D_1 = \Big(\sum_{j=j_1'+1}^{j_1''-1}|c_j|^2\Big)^{\frac12},\quad D_2 = \Big(\Big(\sum_{j=j_2'+1}^{j_1'} + \sum_{j=j_1''}^{j_2''-1}\Big)|c_j|^2\Big)^{\frac12}.
$$

Выберем число $\varepsilon\in(0,1)$ так, что

$$
C_*\doteq \frac14\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt2\,\varepsilon - 4\delta^2 > 0.
$$

Рассмотрим два случая: $D_2>\varepsilon D$ и $D_2\leqslant\varepsilon D$, где

$$
D = \sqrt{D_1^2+D_2^2} = \Big(\sum_{j=j_2'+1}^{j_2''-1}|c_j|^2\Big)^{\frac12}.
$$

1. Предположим, что $D_2>\varepsilon D$. Тогда из (3.35) (при $N_-=j_1'-1$) и (3.36) (при $N_+=j_1''$) получаем

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|^2 &\geqslant \Big(\sum_{j=1}^{j_1'-1}+\sum_{j=j_1''}^{+\infty}\Big)|d_j|^2 \geqslant \Big(\frac{a}{55}\Big)^2\Big(\sum_{j=1}^{j_1'}+\sum_{j=j_1''}^{+\infty}\Big)|c_j|^2 = \\
&= \Big(\frac{a}{55}\Big)^2\Big(\Big(\sum_{j=1}^{j_2'}+\sum_{j=j_2''}^{+\infty}\Big)|c_j|^2 + D_2^2\Big) \geqslant \varepsilon^2\Big(\frac{a}{55}\Big)^2\sum_{j=1}^{+\infty}|c_j|^2.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

2. Предположим, что $D_2 \leqslant \varepsilon D$ (в этом случае $D_1 \geqslant \sqrt{1-\varepsilon^2}\,D$). Тогда найдутся индексы $l_1 \in \{j_1'+1,\dots,j_1''-1\}$ и $l_2 \in \{j_2'+1,\dots,j_1'\} \cup \{j_1'',\dots,j_2''-1\}$ такие, что

$$|c_{l_1}|^2 \;\geqslant\; \frac{D_1^2}{2a-1} \;\geqslant\; \frac{1}{2a}\,(1-\varepsilon^2)\,D^2, \quad |c_{l_2}|^2 \;\leqslant\; \frac{D_2^2}{2a} \;\leqslant\; \frac{\varepsilon^2 D_2^2}{2a}\,.$$

Пусть l_1^* — меньшее из чисел l_1 и l_2, а l_2^* — большее из них. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}\Bigl(-\frac{\zeta'}{|\zeta'|}\Bigr)^{j-l_1^*} d_j \;=\; \sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}\Bigl(-\frac{\zeta'}{|\zeta'|}\Bigr)^{j-l_1^*}(jc_j \,+\, \zeta'\sqrt{j+1}\,c_{j+1}) \;=\\ =\; l_1^*\,c_{l_1^*} \,+\, \sum_{j=l_1^*+1}^{l_2^*}\Bigl(-\frac{\zeta'}{|\zeta'|}\Bigr)^{j-l_1^*}(j \,-\, |\zeta'|\,\sqrt{j}\,)\,c_j \,+\, \Bigl(-\frac{\zeta'}{|\zeta'|}\Bigr)^{l_2^*-l_1^*}\zeta'\sqrt{l_2^*+1}\,c_{l_2^*+1}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

При этом

$$\bigl|l_1^* - |\zeta'|^2\bigr| \;\leqslant\; |l_1^* - j_0| \,+\, j_0 \,-\, |\zeta'|^2 \;\leqslant\; (a-1) \,+\, 1 \;=\; a,$$

$$\bigl|\,|\zeta'|\,\sqrt{l_2^*+1} \,-\, |\zeta'|^2\bigr| \;=\; |\zeta'|\,\frac{\bigl|l_2^*+1-|\zeta'|^2\bigr|}{\sqrt{l_2^*+1}+|\zeta'|} \;\leqslant\; 2a \,+\, 1 \;<\; 3a$$

и для всех $j = l_1^*+1,\dots,l_2^*$

$$\bigl|j - |\zeta'|\,\sqrt{j}\,\bigr| \;=\; \sqrt{j}\,\frac{\bigl|j-|\zeta'|^2\bigr|}{\sqrt{j}+|\zeta'|} \;<\; \bigl|j-|\zeta'|^2\bigr| \;<\; 2a.$$

Поэтому из (3.38) следует оценка

$$\begin{aligned}\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j| \;\geqslant\; \Bigl|\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}\Bigl(-\frac{\zeta'}{|\zeta'|}\Bigr)^{j-l_1^*} d_j\Bigr| \;\geqslant\; \bigl|\,l_1^*\,|c_{l_1^*}| \,-\, |\zeta'|\,\sqrt{l_2^*+1}\,|c_{l_2^*+1}|\,\bigr| \,-\, 2a\sum_{j=l_1^*+1}^{l_2^*}|c_j| \;\geqslant\\ \geqslant\; (|\zeta'|^2 \,-\, 3a)\,|c_{l_1}| \,-\, (|\zeta'|^2 \,+\, 3a)\,|c_{l_2}| \,-\, 2a\sum_{j=l_1^*+1}^{l_2^*}|c_j|.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Так как $l_2^* - l_1^* \leqslant 4a-2 < 4a$, $\sum\limits_{j=l_1^*+1}^{l_2^*}|c_j| \leqslant 2\sqrt{a}\,D$ и

$$|\zeta'|^2 - 3a \;>\; |\zeta'|^2 \,-\, \Bigl(\frac{3}{4|\zeta'|}\Bigr)|\zeta'|^2 \;>\; \frac{|\zeta'|^2}{2} \;>\; \frac{|\zeta'|^2}{2\sqrt{2}}\,, \quad |\zeta'|^2 \,+\, 3a \;<\; 2|\zeta'|^2,$$

то из (3.39) получаем

$$\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j| \;\geqslant\; \frac{1}{4}\,|\zeta'|^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{D}{\sqrt{a}} \,-\, 2|\zeta'|^2\,\frac{\varepsilon D}{\sqrt{2a}} \,-\, 4a\sqrt{a}\,D \;\geqslant\; C_*\,\frac{|\zeta'|^2}{\sqrt{a}}\,D.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j| \;\leqslant\; 2\sqrt{a}\,\Bigl(\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j|^2\Bigr)^{\frac12}.$$

Следовательно,

$$\Bigl(\sum_{j=j_2'+1}^{j_2''-1}|d_j|^2\Bigr)^{\frac12} \;\geqslant\; \Bigl(\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j|^2\Bigr)^{\frac12} \;\geqslant\; \frac{1}{2\sqrt{a}}\sum_{j=l_1^*}^{l_2^*}|d_j| \;\geqslant\; \frac12\,C_*\,\frac{|\zeta'|^2}{a}\,D.$$

Последняя оценка вместе с оценками (3.35) (при $N_- = j_2'$) и (3.36) (при $N_+ = j_2''$) приводит к неравенству

$$\sum_{j=0}^{+\infty}|d_j|^2 = \left(\sum_{j=0}^{j_2'} + \sum_{j=j_2'+1}^{j_2''-1} + \sum_{j=j_2''}^{+\infty}\right)|d_j|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{a}{55}\right)\left(\sum_{j=1}^{j_2'+1} + \sum_{j=j_2''}^{+\infty}\right)|c_j|^2 + \left(\frac{1}{2}\,C_*\,\frac{|\zeta'|^2}{a}\right)^2 \sum_{j=j_2'+1}^{j_2''-1}|c_j|^2 \geqslant \tag{3.40}$$

$$\geqslant a^2\left(\min\left\{\frac{1}{55}\,,\,\frac{1}{2}\,C_*\,\delta^{-2}\right\}\right)^2\sum_{j=1}^{+\infty}|c_j|^2.$$

Оценки (3.37) и (3.40) получены в двух рассматриваемых случаях. Поэтому из них при $|\zeta'| \geqslant 2\delta^{-1}$ (принимая во внимание, что $a > \frac{1}{2}\,\delta\,|\zeta'|$) следует доказываемое неравенство (3.34), где $C' = \frac{1}{2}\,\delta\,\min\{\frac{\varepsilon}{55}\,,\,\frac{1}{2}\,C_*\,\delta^{-2}\}$. Теорема 3.3 доказана. □

Для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ (см. (2.17))

$$\operatorname{Ker}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+) = \operatorname{Ker}(\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{I}) = \left\{e^{-\frac{\overline{\zeta}}{2B}\,\widehat{Z}_+}\,\Psi : \Psi \in \mathcal{H}^{(0)}\right\}$$

и $\left(\operatorname{Ker}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\right)^{\perp} = \operatorname{Im}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)$.

С л е д с т в и е 3.13. *Для всех* $\zeta \in \mathbb{C}$ *и всех функций* $\Phi \in \mathcal{H}^2_B \cap \left(\operatorname{Ker}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\right)^{\perp}$ *справедлива оценка*

$$\|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\Phi\|_B \geqslant C\,|\zeta|\,\|\Phi\|_B, \tag{3.41}$$

где $C > 0$ *— константа из теоремы* 3.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Φ — ненулевая функция из $\mathcal{H}^2_B \cap \left(\operatorname{Ker}(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\right)^{\perp}$. Тогда существует ненулевая функция $\Phi' \in \mathcal{H}^2_B$ такая, что $\widehat{P}^{(0)}\Phi' = 0$ и $\Phi = (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)\Phi'$. Из теоремы 3.3 вытекает неравенство $\|\Phi\|_B \geqslant C\,|\zeta|\,\|\Phi'\|_B$. Поэтому

$$\|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\Phi\|_B \cdot \|\Phi'\|_B \geqslant \left|\left((\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \overline{\zeta}\widehat{Z}_+)\Phi, \Phi'\right)_B\right| = \left|\left(\Phi, (\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)\Phi'\right)_B\right| =$$

$$= \|\Phi\|_B^2 \geqslant C\,|\zeta|\,\|\Phi\|_B \cdot \|\Phi'\|_B,$$

окуда следует оценка (3.41). □

Далее будет предполагаться, что $V \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

С л е д с т в и е 3.14. *Если* $V \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, *то для всех* $\zeta \in \mathbb{C}$ *и всех функций* $\Phi^-_\zeta \in \mathcal{H}_-(\zeta)$

$$|\zeta| \cdot \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{(0)})\Phi^-_\zeta\|_B \leqslant C^{-1}\,\|B + V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2)}\,\|\Phi^-_\zeta\|_B,$$

где $C > 0$ *— константа из теоремы* 3.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как (для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и всех функций $\Phi^-_\zeta \in \mathcal{H}_-(\zeta)$) выполняется равенство $\widehat{P}^{(0)}(\widehat{I} - \widehat{P}^{(0)})\Phi^-_\zeta = 0$, то из теоремы 3.3 получаем

$$C\,|\zeta| \cdot \|(\widehat{I} - \widehat{P}^{(0)})\Phi^-_\zeta\|_B \leqslant \|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)(\widehat{I} - \widehat{P}^{(0)})\Phi^-_\zeta\|_B = \|(\widehat{Z}_+\widehat{Z}_- + \zeta\widehat{Z}_-)\Phi^-_\zeta\|_B =$$

$$= \|(B + V)\Phi^-_\zeta\|_B \leqslant \|B + V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2)}\,\|\Phi^-_\zeta\|_B.$$

Следствие 3.14 доказано. □

С л е д с т в и е 3.15. *Пусть* $V \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *и* $Bv(K) = 2\pi P \in 2\pi\mathbb{N}$. *Тогда* $\mathcal{N} \leqslant P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $R > 0$ так, что

$$(CR)^{-1}\,\|B+V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{R})}\bigl(2\,+\,(CR)^{-1}\,\|B+V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{R})}\bigr)\,<\,\mathcal{N}^{-1},$$

где $C>0$ — константа из теоремы 3.3 (и следствия 3.14), и пусть $\zeta\in\mathfrak{M}_-\setminus U_R(0)$ и $\Phi^{-,(1)}_\zeta$, $\dots$, $\Phi^{-,(\mathcal{N})}_\zeta$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_-(\zeta)$. Тогда в силу следствия 3.14 для любых $j,l=1,\dots,\mathcal{N}$

$$\bigl|\,\delta_{jl}\,-\,(\widehat{P}^{(0)}\Phi^{-,(j)}_\zeta,\widehat{P}^{(0)}\Phi^{-,(l)}_\zeta)_B\,\bigr|\,\leqslant$$

$$\leqslant\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^{-,(j)}_\zeta\|_B\,+\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^{-,(l)}_\zeta\|_B\,+\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^{-,(j)}_\zeta\|_B\,\cdot\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^{-,(l)}_\zeta\|_B\,\leqslant$$

$$\leqslant\,2\,(C|\zeta|)^{-1}\,\|B+V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{R})}\,+\,2\,(CR)^{-2}\,\|B+V\|^2_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\,\mathbb{R})}\,<\,\mathcal{N}^{-1}.$$

Откуда получаем, что функции $\widehat{P}^{(0)}\Phi^{-,(j)}_\zeta$, $j=1,\dots,\mathcal{N}$, линейно независимы в $\mathcal{H}^{(0)}\subset\mathcal{H}_B$ и, следовательно, $\mathcal{N}\leqslant P$. Следствие 3.15 доказано. □

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $V\in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ *и* $Bv(K)=2\pi P\in 2\pi\mathbb{N}$. *Предположим, что* $(\mathcal{H}_-(\zeta)\neq\{0\}$ *при всех* $\zeta\in\mathbb{C}$ *и)* $\mathcal{N}=P$. *Тогда для любых* $\zeta_0\in\mathfrak{M}_-$ *и* $\Phi^-_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_-(\zeta_0)\setminus\{0\}$ *существуют число* $m_0\in\mathbb{Z}_+$ *и функции* $\Phi_j\in\mathcal{H}^2_B$, $j=0,1,\dots,m_0$, *такие, что для всех* $\zeta\in\mathbb{C}$ *функция* $\Phi^-_\zeta\doteq\sum\limits_{j=0}^{m_0}\zeta^j\Phi_j$ *принадлежит* $\mathcal{H}_-(\zeta)$, $\Phi_{m_0}\in\mathcal{H}^{(0)}\setminus\{0\}$ *и функция* Φ^-_ζ *при* $\zeta=\zeta_0$ *совпадает с функцией* $\Phi^-_{\zeta_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R>3C\|B+V\|_{L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})}$, где $C>0$ — константа из теоремы 3.3. Предположим вначале, что $\zeta_0\in\mathfrak{M}_-\setminus U_R(0)$, и пусть $\Phi^-_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_-(\zeta_0)\setminus\{0\}$. Из теоремы 3.2 следует существование функции $\mathfrak{M}_-\setminus\mathcal{M}_-(\zeta_0)\ni\zeta\mapsto\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\in\mathcal{H}_-(\zeta)$ такой, что $\Phi^-_{\zeta_0,\zeta_0}=\Phi^-_{\zeta_0}$ и $\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}-\Phi^-_{\zeta_0}\in\bigl(\mathcal{H}_-(\zeta_0)\bigr)^\perp$. В силу следствий 3.10 и 3.12 множество $(\mathbb{C}\setminus\mathfrak{M}_-)\cup\mathcal{M}_-(\zeta_0)$ дискретное. Из леммы 3.18 получаем, что либо каждая точка $\zeta'\in(\mathbb{C}\setminus\mathfrak{M}_-)\cup\mathcal{M}_-(\zeta_0)$ является полюсом функции $\zeta\mapsto\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}$, либо функция $\zeta\mapsto\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}$ аналитически продолжается в некоторую окрестность точки ζ'. Пусть $\zeta\in\mathfrak{M}_-\setminus\mathcal{M}_-(\zeta_0)$ и $|\zeta|\geqslant R$. Так как в силу следствия 3.14 и выбора числа R для всех функций $\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_-(\zeta_0)$ выполняется оценка $\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\geqslant\frac{2}{3}\|\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B$, то найдется функция $\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\in\mathcal{H}_-(\zeta_0)$ такая, что $\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}=\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}$, и при этом $\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\leqslant\frac{1}{2}\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B$. Тогда, учитывая оценки $\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\geqslant\frac{2}{3}\|\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B$, $\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\leqslant\frac{1}{2}\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B$ и то, что $\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}-\Phi^-_{\zeta_0}\in\bigl(\mathcal{H}_-(\zeta_0)\bigr)^\perp$, получаем

$$\frac{3}{4}\,\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|^2_B\,=\,\frac{3}{4}\,\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\,\leqslant$$

$$\leqslant\,\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\,-\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|(\widehat{I}-\widehat{P}^{(0)})\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\,\leqslant$$

$$\leqslant\,\bigl|(\Phi^-_{\zeta,\zeta_0},\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0})_B\bigr|\,=\,\bigl|(\Phi^-_{\zeta_0},\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0})_B\bigr|\,\leqslant\,\|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\,\leqslant$$

$$\leqslant\,\frac{3}{2}\,\|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|\widehat{P}^{(0)}\widetilde{\Phi}^-_{\zeta_0}\|_B\,=\,\frac{3}{2}\,\|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B\,\cdot\,\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B.$$

Откуда $\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\leqslant 2\,\|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B$ и, следовательно, $\|\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\leqslant\frac{3}{2}\,\|\widehat{P}^{(0)}\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B\leqslant 3\,\|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B$. Поэтому функция $\zeta\mapsto\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}$ не имеет полюсов и, более того, ограничена в $\mathbb{C}\setminus U_R(0)$. Последнее означает, что функцию $\zeta\mapsto\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}$ можно представить в виде

$$\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\,=\,\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\,\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\,\frac{\chi_{\nu,\mu}}{(\zeta-\zeta_\nu)^\mu}\,+\,\widetilde{\Phi}_{\zeta_0}(\zeta),\quad\zeta\,\in\,\mathbb{C}\setminus\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0}\{\zeta_\nu\},\tag{3.42}$$

где $\nu_0\in\mathbb{Z}_+$, $m_\nu\in\mathbb{N}$, $\nu=1,\dots,\nu_0$ (сумм в правой части равенства (3.42) может не быть при $\nu_0=0$), $\zeta_{\nu'}\neq\zeta_{\nu''}$ при $\nu'\neq\nu''$, $\zeta_\nu\in U_R(0)$, $\chi_{\nu,\mu}\in\mathcal{H}_B$ и $\mathbb{C}\ni\zeta\mapsto\widetilde{\Phi}_{\zeta_0}(\zeta)\in\mathcal{H}_B$ —

ограниченная аналитическая функция. Но тогда функция $\zeta \mapsto \widetilde{\Phi}_{\zeta_0}(\zeta)$ является постоянной: $\widetilde{\Phi}_{\zeta_0}(\zeta) \equiv \widetilde{\Phi}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_B$. Так как $\|\Phi^-_{\zeta,\zeta_0}\|_B \geqslant \|\Phi^-_{\zeta_0}\|_B > 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{C}\setminus U_R(0)$, то $\widetilde{\Phi}_{\zeta_0} \neq 0$. Из следствия 3.14 получаем, что $\widetilde{\Phi}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}^{(0)}$ (и, следовательно, $\chi_{\nu,\mu} \in \mathcal{H}^2_B$). Осталось умножить обе части равенства (3.42) на $\prod\limits_{\nu=1}^{\nu_0}(\zeta-\zeta_\nu)^{m_\nu}$. Тогда правая часть полученного равенства примет вид (2.4) и при всех $\zeta \in \mathbb{C}$ принадлежит $\mathcal{H}_-(\zeta)$ (см. также лемму 3.3), при этом $\Phi_j \in \mathcal{H}^2_B$, $j = 0, 1, \ldots, m_0$, где $m_0 = m_1 + \ldots + m_\nu$, и $\Phi_{m_0} = \widetilde{\Phi}_{\zeta_0} \in \mathcal{H}^{(0)} \setminus \{0\}$. (Функции χ_{ν,m_ν}, $\nu = 1, \ldots, \nu_0$, принадлежат $\mathcal{H}_-(\zeta_\nu)$ в силу леммы 3.3.)

Покажем теперь, что при $\zeta_0' \in \mathfrak{M}_- \cap U_R(0)$ и $\Phi^-_{\zeta_0'} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0')\setminus\{0\}$ существует функция $\Phi^-_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0)$ для некоторого $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_- \setminus U_R(0)$ такая, что функция (2.4), определяемая для ζ_0 и функции $\Phi^-_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0)$, совпадает с $\Phi^-_{\zeta_0'}$ при $\zeta = \zeta_0'$. Действительно, если предположить, что $\zeta_0' \in \mathcal{M}_-(\zeta_0)$ для всех $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_- \setminus U_R(0)$, то для всех $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_- \setminus U_R(0)$ выполнялось бы равенство $\Delta^-_{\zeta_0,\zeta_0'} = \Delta^-_{\zeta_0',\zeta_0} = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_- \setminus U_R(0) \subseteq \mathcal{M}_-(\zeta_0')$, что противоречит лемме 3.13. Поэтому для некоторого $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_- \setminus U_R(0)$ число ζ_0' не принадлежит $\mathcal{M}_-(\zeta_0)$. Последнее означает, что $\Delta^-_{\zeta_0',\zeta_0} \neq 0$ и $\{\Phi^-_{\zeta_0',\zeta_0} : \Phi^-_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0)\} = \mathcal{H}_-(\zeta_0')$. В этом случае также $\prod\limits_{\nu=1}^{\nu_0}(\zeta_0'-\zeta_\nu)^{m_\nu} \neq 0$. Следовательно, найдется функция $\Phi^-_{\zeta_0} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0)$ такая, что функция (2.4), которая определяется для $\zeta_0 \in \mathfrak{M}_- \setminus U_R(0)$ и функции $\Phi^-_{\zeta_0}$ совпадает при $\zeta = \zeta_0'$ с функцией $\Phi^-_{\zeta_0'} \in \mathcal{H}_-(\zeta_0')$. Теорема 3.4 доказана. $\square$

Теорема 2.1 непосредственно вытекает из следствия 3.15 и теоремы 3.4. Действительно, если $P = 1$, то в силу следствия 3.15 $\mathcal{N} = P = 1$. Поэтому требуемые число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ и функции $\Phi_j \in \mathcal{H}^2_B$, $j = 0, 1, \ldots, m_0$, существуют в силу теоремы 3.4.

Список литературы

1. Новиков С.П. Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 23. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1983. С. 3–32.
2. Гейлер В.А. Двумерный оператор Шрёдингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1–48.
3. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-3-0348-8573-7
4. Лыскова А.С. Топологические характеристики спектра оператора Шрёдингера в магнитном поле и слабом потенциале // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т. 65. № 3. С. 368–378.
5. Гейлер В.А., Маргулис В.А. Спектр магнитно-блоховского электрона в двумерной решетке // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 58. № 3. С. 461–472.
6. Гейлер В.А., Маргулис В.А. Структура спектра магнитно-блоховского электрона в двумерной решетке // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 61. № 1. С. 140–149.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
8. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential // Mathematische Annalen. 2010. Vol. 347. No. 3. P. 675–687. DOI: 10.1007/s00208-009-0452-3
9. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 1. С. 32–48.
10. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
11. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electromagnetic potential // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1998. Vol. 31. No. 37. P. 7593–7601. DOI: 10.1088/0305-4470/31/37/017
12. Бирман М.Ш., Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 140–177.
13. Лапин И.С. Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шрёдингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда // Проблемы математического анализа. 2001. Вып. 22. С. 77–105.
14. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class // Illinois Journal of Mathematics. 2001. Vol. 45. No. 3. P. 873–893. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1258138157

15. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с электрическим потенциалом типа производной от меры // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 276–312.
16. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 4. С. 196–228.
17. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. об-ва. 2001. Т. 9. С. 199–233.
18. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98.
19. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шрёдингера // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459. DOI: 10.4213/tmf160
20. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320.
21. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шрёдингера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84.
22. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Communications in Mathematical Physics. 1973. Vol. 33. No. 4. P. 335–343.
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103859334
23. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
24. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. No. 2. P. 537–569. DOI: 10.1090/s0002-9947-01-02878-1
25. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bulletin of the American Mathematical Society. 2016. Vol. 53. No. 3. P. 343–414. DOI: 10.1090/bull/1528
26. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. No. 27. 275204. 20 p.
DOI: 10.1088/1751-8113/42/27/275204
27. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010. Vol. 43. No. 21. 215201. 13 p. DOI: 10.1088/1751-8113/43/21/215201
28. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Шрёдингера с потенциалом из пространства Морри // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 25–47. DOI: 10.20537/vm120304
29. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
30. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.

Поступила в редакцию 18.04.2018

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov

On the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and a periodic electric potential

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 51, pp. 3–41 (in Russian).

Keywords: Schrödinger operator, spectrum, periodic electric potential, homogeneous magnetic field.

MSC2010: 35P05

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-01

We consider the two-dimensional Schrödinger operator $\widehat{H}_B + V$ with a uniform magnetic field B and a periodic electric potential V. The absence of eigenvalues (of infinite multiplicity) in the spectrum of the operator $\widehat{H}_B + V$ is

proved if the electric potential V is a nonconstant trigonometric polynomial and the condition $(2\pi)^{-1}\,Bv(K) = Q^{-1}$ for the magnetic flux is fulfilled where $Q \in \mathbb{N}$ and the $v(K)$ is the area of the elementary cell K of the period lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ of the potential V. In this case the singular component of the spectrum is absent so the spectrum is absolutely continuous. In this paper, we use the magnetic Bloch theory. Instead of the lattice Λ we choose the lattice $\Lambda_Q = \{N_1QE^1 + N_2E^2 : N_j \in \mathbb{Z}, j = 1,2\}$ where E^1 and E^2 are basis vectors of the lattice Λ. The operator $\widehat{H}_B + V$ is unitarily equivalent to the direct integral of the operators $\widehat{H}_B(k) + V$ with $k \in 2\pi K^*_Q$ acting on the space of magnetic Bloch functions where K^*_Q is an elementary cell of the reciprocal lattice $\Lambda^*_Q \subset \mathbb{R}^2$. The proof of the absence of eigenvalues in the spectrum of the operator $\widehat{H}_B + V$ is based on the following assertion: if λ is an eigenvalue of the operator $\widehat{H}_B + V$, then the λ is an eigenvalue of the operators $\widehat{H}_B(k + i\varkappa) + V$ for all k, $\varkappa \in \mathbb{R}^2$ and, moreover, (under the assumed conditions on the V and the B) there is a vector $k_0 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ such that the eigenfunctions of the operators $\widehat{H}_B(k + \zeta k_0) + V$ with $\zeta \in \mathbb{C}$ are trigonometric polynomials $\sum \zeta^j \Phi_j$ in ζ.

REFERENCES

1. Novikov S.P. Two-dimensional Schrödinger operators in periodic fields, *Journal of Soviet Mathematics*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 1–20. DOI: 10.1007/bf02104894
2. Geiler V.A. The two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and its perturbations by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Math. J.*, 1992, vol. 3, no. 3, pp. 489–532.
3. Kuchment P. *Floquet theory for partial differential equations*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-3-0348-8573-7
4. Lyskova A.S. Topological characteristics of the spectrum of the Schrödinger operator in a magnetic field and in a weak potential, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1985, vol. 65, no. 3, pp. 1218–1225. DOI: 10.1007/bf01036130
5. Geiler V.A., Margulis V.A. Spectrum of the bloch electron in a magnetic field in a two-dimensional lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1984, vol. 58, no. 3, pp. 302–310. DOI: 10.1007/bf01018053
6. Geiler V.A., Margulis V.A. Structure of the spectrum of a bloch electron in a magnetic field in a two-dimensional lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1984, vol. 61, no. 1, pp. 1049–1056. DOI: 10.1007/bf01038554
7. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. IV. Analysis of operators*, New York–London: Academic Press, 1978. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom IV. Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982, 428 p.
8. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential, *Mathematische Annalen*, 2010, vol. 347, no. 3, pp. 675–687. DOI: 10.1007/s00208-009-0452-3
9. Birman M.Sh., Suslina T.A. The two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian is absolutely continuous, *St. Petersburg Math. J.*, 1998, vol. 9, no. 1, pp. 21–32.
10. Birman M.Sh., Suslina T.A. Absolute continuity of a two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector potential, *St. Petersburg Math. J.*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601.
11. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electromagnetic potential, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1998, vol. 31, no. 37, pp. 7593–7601. DOI: 10.1088/0305-4470/31/37/017
12. Birman M.Sh., Shterenberg R.G., Suslina T.A. Absolute continuity of the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with potential supported on a periodic system of curves, *St. Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 12, no. 6, pp. 983–1012.
13. Lapin I.S. Absolute continuity of the spectra of two-dimensional periodic magnetic Schrödinger operator and Dirac operator with potentials in the Zygmund class, *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 106, no. 3, pp. 2952–2974. DOI: 10.1023/A:1011315420866
14. Shen Z. Absolute continuity of periodic Schrödinger operators with potentials in the Kato class, *Illinois Journal of Mathematics*, 2001, vol. 45, no. 3, pp. 873–893. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1258138157
15. Shterenberg R.G. Absolute continuity of a two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with potentials of the type of measure derivative, *Journal of Mathematical Science*, 2003, vol. 115, no. 6, pp. 2862–2882. DOI: 10.1023/A:1023334206109
16. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger operators with positive electric potential, *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 4, pp. 659–683.
17. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 2003, vol. 209, pp. 191–221. DOI: 10.1090/trans2/209/09
18. Danilov L.I. On the spectra of two-dimensional periodic Schrodinger and Dirac operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2002, issue 3 (26), pp. 3–98 (in Russian).
19. Danilov L.I. The spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403. DOI: 10.1023/A:1022605623235

20. Shterenberg R.G. Absolute continuity of spectra of two-dimensional periodic Schrödinger operators with strongly subordinate magnetic potentials, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 129, no. 4, pp. 4087–4109. DOI: 10.1007/s10958-005-0344-3
21. Danilov L.I. On the absence of eigenvalues in the spectra of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, issue 1 (29), pp. 49–84 (in Russian).
22. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Communications in Mathematical Physics*, 1973, vol. 33, no. 4, pp. 335–343. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103859334
23. Birman M.Sh., Suslina T.A. Periodic magnetic Hamiltonian with variable metric. The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232.
24. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569. DOI: 10.1090/s0002-9947-01-02878-1
25. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 343–414. DOI: 10.1090/bull/1528
26. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 27, 275204, 20 p. DOI: 10.1088/1751-8113/42/27/275204
27. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, vol. 43, no. 21, 215201, 13 p. DOI: 10.1088/1751-8113/43/21/215201
28. Danilov L.I. On the spectrum of a periodic Schrödinger operator with potential in the Morrey space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 3, pp. 25–47 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120304
29. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. II. Fourier analysis, self-adjointness*, New York: Academic Press, 1975, 361 p. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom II. Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978, 400 p.
30. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. I. Functional analysis*, New York: Academic Press, 1972. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom I. Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Mir, 1977, 360 p.

Received 18.04.2018

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru