

УДК 517.929

© М. В. Мулюков

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹

Рассматривается система линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием в случае, когда ее характеристическая функция линейно зависит от двух скалярных параметров. Осуществлено развитие метода D-разбиения применительно к задаче построения области устойчивости этой системы. Во-первых, проведена полная классификация точек и линий D-разбиения. Во-вторых, проведена полная классификация двухпараметрических характеристических уравнений по типу и структуре областей D-разбиения. Все уравнения разделены на четыре типа: области D-разбиения уравнения первого рода имеют криволинейные границы, области D-разбиения для уравнений второго и третьего рода имеют только прямолинейные границы, уравнение четвертого рода либо устойчиво, либо неустойчиво независимо от значений параметров. В-третьих, для каждого типа уравнений разработаны новые приемы выделения области устойчивости среди областей D-разбиения. На основании полученных результатов построены области устойчивости для некоторых дифференциальных уравнений и систем уравнений с сосредоточенным и распределенным запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, системы дифференциальных уравнений, автономные уравнения, асимптотическая устойчивость, метод D-разбиения, область устойчивости.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-04

Введение

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^{N \times N}$ — алгебра вещественных $N \times N$ -матриц. Через I и Θ будем обозначать единичную и нулевую матрицу. Нормы в \mathbb{R}^N и $\mathbb{R}^{N \times N}$ согласованы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \int_0^h dR(s)x(t-s) = f(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \psi(\xi), & \xi \in [-h, 0), \end{cases} \quad (0.1)$$

в следующих предположениях и обозначениях:

- $h > 0$;
- при каждом $t \in [0, h]$ определена $R(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$;
- компонентами матричной функции R являются функции R_{ij} ограниченной вариации, $R_{ij}: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что $R_{ij}(0) = 0$;
- интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса;
- функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ суммируема на каждом конечном отрезке, принадлежащем \mathbb{R}_+ ;
- функция $f_\psi(t) = \int_t^h dR(s)\psi(t-s)$ суммируема на $[0, h]$.

Систему (0.1) принято называть *автономной* [1, с. 95]. Частными случаями системы (0.1) являются система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), система с постоянным сосредоточенным и распределенным запаздыванием.

¹Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

Следуя подходу, разработанному в научной школе Н. В. Азбелева, перенесем начальную функцию в правую часть, тогда система (0.1) примет вид

$$\dot{x}(t) + \int_0^{\min\{t,h\}} dR(s)x(t-s) = \hat{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (0.2)$$

где $\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) + f_\psi(t), & \text{если } t \leq h, \\ f(t), & \text{если } t > h. \end{cases}$

О п р е д е л е н и е 0.1 (см. [2, с. 9–10; 3, с. 23]). *Решением* системы (0.2) называется локально абсолютно непрерывная функция $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, удовлетворяющая системе (0.2) при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Функция x , будучи решением системы (0.2) и доопределенная при отрицательных значениях t функцией ψ , удовлетворяет системе (0.1) при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, поэтому x будем называть решением системы (0.1).

Отметим, что существует иной подход к пониманию решения системы (0.1), согласно которому начальная функция ψ предполагается непрерывной, а под решением системы понимается непрерывная функция $x : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$, при положительных t удовлетворяющая системе (0.2), а при неположительных — равенству $\psi(t) = x(t)$ [1, 4–6]. Такой подход не противоречит определению 0.1, но требует условия непрерывной стыковки $x(0) = \psi(0)$.

Таким образом, не нарушая общности, можно полагать $\psi(\xi) \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 0.2 (см. [2, с. 34; 7]). *Фундаментальной матрицей* назовем матричную функцию $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$, удовлетворяющую матричному уравнению

$$\dot{X}(t) + \int_0^h dR(s)X(t-s) = \Theta$$

при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и условиям $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

У т в е р ж д е н и е 0.1 (см. [2, с. 34; 3, с. 23; 7]). *Решение задачи Коши для системы (0.1) существует, единственно и представимо в виде*

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)\hat{f}(s) ds. \quad (0.3)$$

Из формулы (0.3) вытекает, что асимптотические свойства любого решения системы (0.1) определяются свойствами фундаментальной матрицы.

О п р е д е л е н и е 0.3. Систему (0.1) будем называть

- *асимптотически устойчивой*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$,
- *экспоненциально устойчивой*, если $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \|X(t)\|/t < 0$.

Определения асимптотической и экспоненциальной устойчивости, приведенные, например, в монографиях [6, с. 130, 197; 5, с. 112–113], эквивалентны определению 0.3.

Из определения 0.2 вытекает, что X непрерывна на \mathbb{R}_+ . Кроме того, известно [1, с. 23], что $\sup_{t \in [1, +\infty)} \ln \|X(t)\|/t < \infty$. Следовательно, к фундаментальной матрице применимо преобразова-

ние Лапласа, а ее Лаплас-образ имеет вид $(\mathcal{L}X)(z) = \left(Iz + \int_0^h e^{-zs} dR(s) \right)^{-1}$.

О п р е д е л е н и е 0.4. Назовем функцию

$$\Phi(z) = \det \left(Iz + \int_0^h e^{-zs} dR(s) \right) \quad (0.4)$$

характеристической функцией системы (0.1).

Утверждение 0.2 (см. [8]). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$X(t) = \sum_{\operatorname{Re} z_n \geq \alpha} \operatorname{res}_{z=z_n} [(\mathcal{L}X)(z)e^{zt}] + o(e^{-\alpha t}),$$

где сумма распространена на все корни z_n характеристической функции, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \alpha$, причем множество таких корней конечно.

Определение 0.5. Будем говорить, что функция комплексного аргумента *устойчива*, если все ее корни лежат слева от мнимой оси.

Из утверждения 0.2 вытекает, что асимптотическая устойчивость системы (0.1) совпадает с экспоненциальной и эквивалентна тому, что характеристическая функция (0.4) устойчива. Очевидно, экспоненциальная устойчивость системы (0.1) эквивалентна тому, что при любой непрерывной начальной функции имеем $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \|x(t)\|/t < 0$. Более того [3, с. 103–107], экспоненциальная устойчивость системы (0.1) эквивалентна ограниченности любого решения системы (0.2) при $\hat{f} \in L_p^N[0, +\infty)$, где $p > 1$.

Определить, лежат ли все нули функции (0.4) слева от мнимой оси, можно различными методами. Для полиномов такими методами являются критерий Рауса–Гурвица и теорема Эрмита–Билера [9, с. 46]; для квазиполиномов — теорема Л. С. Понтрягина [10] и метод, разработанный Н. Г. Чеботаревым и Н. Н. Мейманом [11]; для произвольных целых функций подходят методы, основанные на принципе аргумента (например, метод годографа, предложенный Г. Найквистом и усовершенствованный А. В. Михайловым [12]).

Если компоненты матрицы R — заданные функции и запаздывание h фиксировано, то вопрос об устойчивости функции (0.4) решается одним из вышеперечисленных методов. Если h и параметры матрицы R не фиксированы, то возникает задача построения *области устойчивости*, то есть определения всех значений параметров, при которых система (0.1) асимптотически устойчива. Сделать это указанными методами затруднительно, поскольку каждый из них приводит к изучению некоторой сторонней задачи: построению годографа, решению системы неравенств (в случае критерия Рауса–Гурвица и Чеботарева–Меймана) или анализа взаимного расположения корней тригонометрических многочленов (теорема Эрмита–Билера и Понтрягина). Попытка построения области устойчивости таким образом приводит к сложной параметрической задаче, эффективный алгоритм решения которой удастся найти лишь в простейших случаях.

Иной подход к построению областей устойчивости предложил Ю. И. Неймарк [13–15], разбив прием, использованный И. А. Вышнеградским [16]. Предложенная им идея разбиения пространства параметров на области, внутри которых количество корней характеристической функции постоянно, получила название *метод D-разбиения*. В 40–60-е годы XX века был найден ряд плоских и трехмерных областей устойчивости для уравнений с сосредоточенным запаздыванием и систем ОДУ, что подтверждало эффективность метода D-разбиения. Может создаться впечатление, что схема дальнейшего исследования ясна: построив любое плоское сечение области устойчивости, можно построить трехмерную, а затем и любую n -мерную область устойчивости. В действительности же получение новых областей устойчивости замедлилось и впоследствии почти прекратилось. И это не было результатом отсутствия мотивации исследователей. Напротив, за прошедшие десятилетия накопилось множество новых моделей, использующих дифференциальные уравнения с запаздыванием, вопрос об асимптотическом поведении решения которых открыт.

Можно выделить три трудности, возникающие при использовании метода D-разбиения для исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ).

Во-первых, характеристическая функция системы ФДУ, в отличие от полинома, в общем случае не представима в виде произведения конечного множества функций того же класса. Это лишает нас хотя бы теоретической возможности свести задачу к задаче меньшей размерности, поэтому увеличение количества параметров приводит к качественному росту сложности

задачи. Количество исследованных трехпараметрических систем невелико, четырехпараметрические изучаются редко, а успешные исследования пятипараметрических систем автору статьи неизвестны.

Во-вторых, применение метода D-разбиения к системам ФДУ приводит к перебору бесконечного множества областей, причем универсального способа указать среди них область устойчивости не существует. Она может иметь любое конечное или даже бесконечное множество компонент связности, которые могут быть сколь угодно малыми и удаленными друг от друга.

В-третьих, сама область устойчивости может быть весьма сложно устроена. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t-1) + bx(t-\tau) = 0, \quad (0.5)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. При $\tau = 0$ область устойчивости уравнения (0.5) известна [17]: это бесконечный криволинейный угол, обе границы которого имеют простое аналитическое описание. При $\tau > 0$ уравнение (0.5) изучалось в работах [18–20]. Оказалось, что при каждом фиксированном τ метод D-разбиения позволяет найти область устойчивости в плоскости вещественных параметров a и b , однако точная область устойчивости уравнения в пространстве трех параметров (a, b, τ) до сих пор неизвестна. Причина этого заключается в том, что с ростом τ растет количество точек самопересечения кривой, которая образует границы областей D-разбиения, поэтому увеличивается количество звеньев границ областей D-разбиения. Зависимость количества и структуры этих звеньев от τ не выяснена и, по-видимому, очень сложна.

Осознавая серьезность перечисленных трудностей, мы не считаем их непреодолимыми, а возможности метода D-разбиения в исследовании устойчивости ФДУ исчерпанными.

О п р е д е л е н и е 0.6. Назовем систему (0.1) *n-параметрической*, если ее характеристическая функция линейно зависит от n вещественных параметров.

Развитие метода D-разбиения целесообразно начинать с рассмотрения одно- и двухпараметрических систем. Настоящая статья продолжает цикл работ [21–23], посвященных развитию метода D-разбиения применительно к исследованию устойчивости двухпараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. В указанных работах рассматривались различные частные вопросы, а цель настоящей статьи — систематизация и наиболее полное изложение полученных результатов.

§ 1. Характеристическая функция системы с запаздыванием

В настоящем параграфе устанавливаются некоторые важные свойства характеристической функции системы (0.1).

Обозначим через E алгебру целых функций, определенных на \mathbb{C} . Обозначим через $E_{\mathbb{R}}$ алгебру функций из E с вещественными коэффициентами ряда Маклорена.

Л е м м а 1.1. Если $f \in E$, то следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $f \in E_{\mathbb{R}}$;
- (2) f отображает вещественную ось в себя;
- (3) $\forall z \in \mathbb{C}: \overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Лемма 1.1 доказывается элементарными методами [22].

Т е о р е м а 1.1. Характеристическая функция (0.4) имеет вид

$$\Phi(z) = z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \phi_n(z), \quad (1.1)$$

где $\phi_n \in E_{\mathbb{R}}$ и $\sup_{\operatorname{Re} z \geq 0} |\phi_n(z)| < \infty$.

Доказательство. Обозначим $P(z) = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$. Для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$P_{ij}(z) = \int_0^h e^{-zs} dR_{ij}(s) = \int_0^h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k s^k}{k!} dR_{ij}(s) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k z^k}{k!} \int_0^h s^k dR_{ij}(s) + T_m(z),$$

где $T_m(z) = \int_0^h \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k z^k s^k / k! dR_{ij}(s)$. Далее,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |T_m(z)| \leq \int_0^h |dR_{ij}(s)| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} |z|^k h^k / k! = 0,$$

следовательно,

$$P_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k z^k}{k!}, \quad (1.2)$$

где $a_k = \int_0^h s^k dR_{ij}(s)$. Из оценки $|a_k| \leq h^k \int_0^h |dR_{ij}(s)|$ вытекает, что ряд (1.2) абсолютно сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то есть P_{ij} — целая функция.

При $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеем $|P_{ij}(z)| \leq \int_0^h |dR_{ij}(s)| < \infty$, следовательно, все миноры, составленные из матрицы P , представляют собой ограниченные на полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции из $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$.

Известно [24, с. 55], что для любой $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ справедливо равенство

$$\det(Iz + A) = z^N + \sum_{n=1}^N (-1)^n c_n z^{N-n}, \quad (1.3)$$

где c_n — это сумма всех главных миноров порядка n матрицы A . Утверждение доказываемой теоремы непосредственно вытекает из сравнения (1.1) и (1.3), если положить $A = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$ и $\phi_n(z) = c_n (-1)^n$. \square

Рассмотрим замкнутый контур C_r на комплексной плоскости, состоящий из полуокружности $z = re^{i\varphi}$, где $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, и отрезка мнимой оси $z = iy$, где $y \in [-r, r]$. Для функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим $M_f(r) = \max_{z \in C_r} |f(z)|$ и $\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \log_r M_f(r)$.

Заметим, что если f — полином степени n , то $\sigma(f) = n$.

Символом \mathbb{N} обозначено множество натуральных чисел, а $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

С л е д с т в и е 1.1 (из теоремы 1.1). *Обозначим $G(z) = z^N - \Phi(z)$. Справедливы следующие утверждения:*

- $\Phi, G \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$,
- $\sigma(G) \in \mathbb{N}_0$ и $\sigma(G) < \sigma(\Phi) = N$.

Символом \mathbf{p} будем обозначать n -мерную вещественную вектор-строку $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Пусть характеристическая функция зависит от \mathbf{p} (быть может, нелинейно), то есть $\Phi(z) = \Phi(z, \mathbf{p})$. Согласно теореме 1.1 функции ϕ_n тоже зависят от \mathbf{p} , то есть

$$\Phi(z, \mathbf{p}) = z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \phi_n(z, \mathbf{p}).$$

Как известно [14, с. 62], для полиномов при непрерывном изменении параметров корни с положительной вещественной частью могут появляться благодаря либо переходу через мнимую ось, либо появлению из «бесконечно удаленной точки». Второй способ имеет место, если коэффициент при главном члене обращается в ноль.

Если в выражении (1.1) вместо функций ϕ_n подставить произвольные аналитические функции, то при непрерывном изменении параметров возможно появление корней из «бесконечно удаленной точки», несмотря на то что коэффициент при главном члене z^N не обращается в ноль. В качестве примера рассмотрим уравнение $z + e^{az} = 0$, где $a \in \mathbb{R}_+$. При любом $a > 0$ это уравнение имеет корни со сколь угодно большой положительной вещественной частью, а при $a = 0$ не имеет корней справа от мнимой оси.

Следующая теорема дает достаточные условия того, что при непрерывном изменении параметров корни характеристического уравнения системы (0.1) с положительной вещественной частью появляются только благодаря переходу через мнимую ось.

Теорема 1.2. Пусть при каждом $n = \overline{0, N-1}$ функция ϕ_n непрерывно зависит от \mathbf{p} равномерно по z в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Рассмотрим связную область D в пространстве параметров. Если ни для какой точки области D характеристическая функция (0.4) не имеет корней на мнимой оси, то она имеет одинаковое (с учетом кратности) количество корней с неотрицательной вещественной частью в любой точке области D .

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in D$. Соединим их простой непрерывной кривой, параметризованной следующим образом: выберем непрерывную вектор-функцию $\mathbf{k}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что $\mathbf{k}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{k}(1) = \mathbf{p}_1$, а при любом $t \in [0, 1]$ точка $\mathbf{k}(t)$ принадлежит данной кривой. При любом $t \in [0, 1]$ функция $\Phi(z, \mathbf{k}(t))$ не имеет корней с нулевой вещественной частью.

Согласно предположению теоремы существует $A > 0$ такое, что $|\phi_n(z, \mathbf{k}(t))| \leq A$ при любых $n = \overline{0, N-1}$, $t \in [0, 1]$ и $z \in \mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Re} z > 0$. Из (1.1) вытекает, что при $|z| > A + 1$ имеем

$$|z|^N = \left| \sum_{n=0}^{N-1} z^n \phi_n(z, \mathbf{k}(t)) \right| \leq A \sum_{n=0}^{N-1} |z|^n = A \frac{|z|^N - 1}{|z| - 1} < |z|^N - 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что при любом $t \in [0, 1]$ все корни функции $\Phi(\cdot, \mathbf{k}(t))$ с неотрицательной вещественной частью расположены внутри контура C_{A+1} .

При каждом $t \in [0, 1]$ трансформируем контур C_{A+1} в контур $\Gamma(t)$ с помощью непрерывного отображения $\Phi(\cdot, \mathbf{k}(t)): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

По теореме о логарифмическом вычете [26, с. 205] имеем

$$N(\mathbf{p}_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{A+1}} \frac{1}{\Phi(z, \mathbf{p}_0)} \frac{\partial \Phi(z, \mathbf{p}_0)}{\partial z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0)} \frac{d\xi}{\xi},$$

$$N(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{A+1}} \frac{1}{\Phi(z, \mathbf{p}_1)} \frac{\partial \Phi(z, \mathbf{p}_1)}{\partial z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(1)} \frac{d\xi}{\xi},$$

где $N(\mathbf{p})$ — число корней функции $\Phi(z, \mathbf{p})$ внутри контура C_{A+1} , то есть число корней с положительной вещественной частью. Так как при непрерывном изменении t контур $\Gamma(t)$ непрерывно деформируется, «не задевая» единственную особую точку подынтегральной функции $\frac{1}{\xi}$, то

$$\int_{\Gamma(0)} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{\Gamma(1)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Следовательно, функции $\Phi(z, \mathbf{p}_0)$, $\Phi(z, \mathbf{p}_1)$ имеют одинаковое количество корней в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. \square

Заметим, что условия теоремы 1.2 выполняются, если $\Phi(z, \cdot)$ есть целая функция от \mathbf{p} .

§ 2. Развитие метода D-разбиения для систем с запаздыванием

Цель настоящего параграфа заключается в том, чтобы определить основные понятия и получить общие утверждения для n -параметрических систем при произвольном натуральном n . В следующих параграфах будет рассматриваться случай $n = 2$.

По определению n -параметрической системы ее характеристическая функция линейно зависит от n -мерного вещественного вектора $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Согласно теореме 1.1 имеем

$$\Phi(z, \mathbf{p}) = z^N + g_0(z) + \sum_{k=1}^n p_k g_k(z),$$

где при любом $k = \overline{0, n}$ имеем $g_k \in E_{\mathbb{R}}, \sigma(g_k) < N$.

Вместо функции Φ можно выбрать любую функцию F , имеющую те же нули. Известен общий вид такой функции: $F(z, \mathbf{p}) = e^{w(z)}\Phi(z, \mathbf{p})$, где w — произвольная функция из $E_{\mathbb{R}}$ [25, с. 21].

О п р е д е л е н и е 2.1. Уравнение $F(z, \mathbf{p}) = 0$ назовем n -параметрическим характеристическим уравнением системы (0.1).

Далее,

$$F(z, \mathbf{p}) = e^{w(z)}\Phi(z, \mathbf{p}) = f_0(z) + \sum_{k=1}^n p_k f_k(z),$$

где $f_0(z) = e^{w(z)}(z^N + g_0(z))$ и $f_k(z) = e^{w(z)}g_k(z), k \in \overline{1, n}$.

Установим взаимно однозначное соответствие между функциями $F(\cdot, \mathbf{p})$ и точками \mathbf{p} из \mathbb{R}^n .

О п р е д е л е н и е 2.2. *Область устойчивости* — это совокупность всех точек плоскости, которым соответствует устойчивая функция $F(\cdot, \mathbf{p})$.

Как правило, границы области устойчивости задаются параметрически, поэтому для ее описания удобно воспользоваться другими координатами. Обозначим $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ и будем исследовать в комплексной плоскости уравнение

$$f_0(z) + \sum_{k=1}^n r_k f_k(z) = 0. \quad (2.1)$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Любой точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие число $\rho(\mathbf{r})$, равное количеству корней (с учетом кратности) с неотрицательной вещественной частью функции $F(\cdot, \mathbf{r})$, и будем называть его *абсолютным индексом точки \mathbf{r}* .

Отметим, что $\rho(\mathbf{r})$ всегда конечно.

Будем искать все точки пространства \mathbb{R}^n с нулевым абсолютным индексом. Принадлежность точки \mathbf{p} этому множеству эквивалентна тому, что функция $F(\cdot, \mathbf{p})$ устойчива.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^{n+1} , точки которого будем обозначать символом (\mathbf{r}, φ) , где $\varphi \in \mathbb{R}$. Значение φ будем называть *частотой* этой точки, а вектор \mathbf{r} — *проекцией* точки (\mathbf{r}, φ) .

О п р е д е л е н и е 2.4. Точку (\mathbf{r}, φ) назовем *точкой D-разбиения*, если $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$.

В n -мерном пространстве проекции двух различных точек D-разбиения могут совпадать, а определение 2.4 позволяет исследовать все точки D-разбиения по отдельности, поскольку они никогда не совпадают в $(n + 1)$ -мерном пространстве.

Согласно лемме 1.1 уравнения $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$ и $F(-i\varphi, \mathbf{r}) = 0$ эквивалентны, следовательно, достаточно рассмотреть только неотрицательные значения φ .

О п р е д е л е н и е 2.5. *Областью D-разбиения* будем называть линейно связное открытое множество $V \in \mathbb{R}^n$ такое, что

- V не содержит проекции ни одной точки D-разбиения,
- любое линейно связное открытое множество, собственным подмножеством которого является V , содержит проекцию хотя бы одной точки D-разбиения.

Согласно теореме 1.2 все точки области D-разбиения V имеют один и тот же абсолютный индекс, который будем называть *абсолютным индексом области V* и обозначать $\rho(V)$.

Описание областей D-разбиения является лишь первым этапом метода D-разбиения. Следующий этап заключается в том, чтобы расставить абсолютные индексы областей. Если множество областей конечно, то область с нулевым абсолютным индексом можно найти перебором.

Если областей бесконечно много, то требуется сравнить абсолютные индексы соседних областей, то есть определить направление возрастания вещественной части корня на границе областей D-разбиения. Наиболее общий прием для этого заключается в нахождении производной по направлению функциональной зависимости вещественной части корня характеристической функции от параметра. Однако это можно сделать не для любой точки D-разбиения.

Символом $F'(z, \mathbf{r})$ будем обозначать производную по первому аргументу.

О п р е д е л е н и е 2.6. Назовем точку D-разбиения (\mathbf{r}, φ) *регулярной*, если $F'(i\varphi, \mathbf{r}) \neq 0$, и *нерегулярной*, если $F'(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$.

Приведем следствие из теоремы о неявном операторе в аналитическом случае [28, с. 415]. Рассмотрим регулярную точку D-разбиения (\mathbf{a}, φ) . В окрестности точки \mathbf{a} существует единственная аналитическая функция $Z_\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $Z_\varphi(\mathbf{a}) = i\varphi$ и $F(Z_\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r}) \equiv 0$.

Вычислим полный дифференциал функции F в точке (\mathbf{a}, φ) :

$$dF(i\varphi, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \left(F'(i\varphi, \mathbf{a}) \frac{\partial Z_\varphi(\mathbf{a})}{\partial r_k} + f_k(i\varphi) \right) dr_k.$$

В любой точке \mathbf{r} , такой, что $F(Z_\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = 0$, полный дифференциал функции F равен нулю, следовательно, имеет место равенство

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{a}) = -\frac{1}{|F'(i\varphi, \mathbf{a})|^2} \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} F'(i\varphi, \mathbf{a}) f_1(-i\varphi) \\ \operatorname{Re} F'(i\varphi, \mathbf{a}) f_2(-i\varphi) \\ \dots \\ \operatorname{Re} F'(i\varphi, \mathbf{a}) f_n(-i\varphi) \end{Bmatrix}^T. \quad (2.2)$$

При выводе формулы (2.2) используется вытекающее из леммы 1.1 равенство

$$\operatorname{Re} F'(i\varphi, \mathbf{a}) f_k(-i\varphi) = \operatorname{Re} F'(-i\varphi, \mathbf{a}) f_k(i\varphi).$$

О п р е д е л е н и е 2.7. Регулярную точку D-разбиения (\mathbf{r}, φ) назовем *стационарной*, если $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, и *нестационарной*, если $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$.

О п р е д е л е н и е 2.8. Назовем точку $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *особой*, если существует нерегулярная точка D-разбиения, проекция которой совпадает с \mathbf{a} . В противном случае точку \mathbf{a} будем называть *неособой*.

Если общая граница двух областей D-разбиения содержит хотя бы одну неособую точку, то для этих областей можно вычислить разность абсолютных индексов. Действительно, в этой точке можно определить направление возрастания вещественной части корня, причем если $\operatorname{Re} Z_\varphi \neq \mathbf{0}$, то этот вектор совпадает с направлением возрастания вещественной части корня. В проекции стационарной точки тоже можно найти направление возрастания вещественной части корня, но для этого требуется вычислить старшие производные функции $\operatorname{Re} Z_\varphi$.

Если любая точка общей границы особая, то абсолютные индексы таких областей, вообще говоря, нужно вычислять независимо.

Определить, является ли точка D-разбиения нестационарной, можно без вычисления величины $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi$. Для этого рассмотрим вектор-функции $\mathbf{v}_m = \{v_{1m}, v_{2m}, \dots, v_{nm}\}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $v_{km}(\varphi) = \operatorname{Im} f_k(i\varphi) f_m(-i\varphi)$ при $k, m = \overline{1, n}$. Заметим, что $v_{km} = -v_{mk}$ согласно лемме 1.1.

Л е м м а 2.1. *Для того чтобы точка D-разбиения (\mathbf{r}, φ) была нестационарной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{v}'_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{v}'_k(\varphi) \neq \mathbf{0}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (\mathbf{r}, φ) — некоторая точка D-разбиения. Рассмотрим функцию

$$\tilde{v}_{km}(z) = -i f_k(iz) f_m(-iz),$$

являющуюся аналитическим продолжением v_{km} на комплексную плоскость. Из $\tilde{v}'_{km}(z) = (f_k(iz)f_m(-iz))'$ и $v_{km}(\varphi) = \operatorname{Re} \tilde{v}_{km}(\varphi)$ вытекает

$$v'_{km}(\varphi) = \operatorname{Re}(f_k(i\varphi)f_m(-i\varphi))' \quad (2.3)$$

для любых $k, m = \overline{1, n}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Выразив

$$r_m f_m(-i\varphi) = -f_0(-i\varphi) - \sum_{k=1, k \neq m}^n r_k f_k(-i\varphi)$$

из (2.1), найдем

$$\begin{aligned} f_m(-i\varphi)F'(i\varphi, \mathbf{r}) &= f_m(-i\varphi)f'_0(i\varphi) + r_m f_m(-i\varphi)f'_m(i\varphi) + f_m(-i\varphi) \sum_{k=1, k \neq m}^n r_k f'_k(i\varphi) = \\ &= f_m(-i\varphi)f'_0(i\varphi) - f'_m(i\varphi)f_0(-i\varphi) + \sum_{k=1, k \neq m}^n r_k (f_m(-i\varphi)f'_k(i\varphi) - f'_m(i\varphi)f_k(-i\varphi)). \end{aligned}$$

В силу леммы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f_m(-i\varphi)f'_k(i\varphi) - f'_m(i\varphi)f_k(-i\varphi)) &= \\ = \operatorname{Re}(f_m(-i\varphi)f'_k(i\varphi) - f'_m(-i\varphi)f_k(i\varphi)) &= \operatorname{Re}(f_k(i\varphi)f_m(-i\varphi))', \end{aligned}$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} f_m(-i\varphi)F'(i\varphi, \mathbf{r}) = -\operatorname{Re}(f_0(-i\varphi)f_m(i\varphi))' - \sum_{k=1, k \neq m}^n r_k \operatorname{Re}(f_k(i\varphi)f_m(-i\varphi))'.$$

Заметим, что $v'_{kk} = 0$, поэтому

$$\operatorname{Re} f_m(-i\varphi)F'(i\varphi, \mathbf{r}) = -v'_{m0}(\varphi) - \sum_{k=1}^n r_k v'_{mk}(\varphi). \quad (2.4)$$

Итак, если $\mathbf{v}'_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{v}'_k(\varphi) \neq \mathbf{0}$, то $F'(i\varphi, \mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, то есть (\mathbf{r}, φ) — регулярная точка D -разбиения.

Подставив (2.4) в (2.2), получаем формулу

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = |F'(i\varphi, \mathbf{a})|^{-2} \left(\mathbf{v}'_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{v}'_k(\varphi) \right). \quad (2.5)$$

Итак, если $\mathbf{v}'_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{v}'_k(\varphi) \neq \mathbf{0}$, то $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) \neq 0$. Если $\mathbf{v}'_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{v}'_k(\varphi) = \mathbf{0}$, то (\mathbf{r}, φ) либо нерегулярная точка D -разбиения, либо стационарная. \square

Формула (2.5) интересна сама по себе, поскольку вычисление вектор-функций \mathbf{v} , как правило, проще, чем использование формулы (2.2).

Следующая лемма используется при ответе на вопрос о сгущении областей D -разбиения в конечной области.

Л е м м а 2.2. Для любого множества точек D -разбиения, проекции которых ограничены, множество их частот тоже ограничено.

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение системы (0.1) в виде

$$-z^N = g_0(z) + \sum_{k=1}^n r_k g_k(z).$$

При условии $z = i\varphi$ и $\max_{k=1, n} |r_k| < R$ получаем

$$|\varphi|^N \leq |g_0(i\varphi)| + R \sum_{k=1}^n |g_k(i\varphi)|.$$

В силу $\sigma(g_k) < N$ при $\varphi \rightarrow \infty$ имеем

$$1 \leq |g_0(i\varphi)/\varphi^N| + R \sum_{k=1}^n |g_k(i\varphi)/\varphi^N| \rightarrow 0,$$

следовательно, при достаточно больших частотах не существует точек D-разбиения таких, что $\max_{k=1, n} |r_k| \leq R$. \square

Полезно иметь в распоряжении легко проверяемые признаки того, что область устойчивости пуста или содержится в некотором подмножестве исходного пространства.

Лемма 2.3. Пусть $\sum_{k=1}^n |f_k(0)| \neq 0$ и $\rho(\mathbf{r}) = 0$, тогда $f_0(0) + \sum_{k=1}^n r_k f_k(0) > 0$.

Доказательство. Если $f_0(0) + \sum_{k=1}^n r_k f_k(0) = 0$, то уравнение (2.1) имеет нулевой корень.

Пусть $f_0(0) + \sum_{k=1}^n r_k f_k(0) < 0$. При $x \in \mathbb{R}$ имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, \mathbf{r}) = +\infty$, но $F(0, \mathbf{r}) < 0$, следовательно, уравнение $F(\cdot, \mathbf{r}) = 0$ имеет положительный корень.

В обоих случаях функция $F(\cdot, \mathbf{r})$ не является устойчивой. \square

Следующее утверждение доказывается аналогично.

Лемма 2.4. Пусть $f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_n(0) = 0$ и $f_0(0) < 0$. Тогда область устойчивости пуста.

Утверждения, эквивалентные леммам 2.3, 2.4, часто встречаются (например, см. [27, с. 29]).

Теорема 2.1. Если $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ и по крайней мере одна из функций f_1, f_2, \dots, f_n отлична от тождественного нуля, то область устойчивости пуста.

Прежде чем перейти к доказательству данной теоремы, сформулируем утверждения, которыми будем пользоваться и в последующих параграфах.

Лемма 2.5. Пусть $f, g, h \in E_{\mathbb{R}}$. Если $\text{Im } f(-i\varphi)g(i\varphi) \equiv 0$ и $\text{Im } g(-i\varphi)h(i\varphi) \equiv 0$, то либо $g(z) \equiv 0$, либо $\text{Im } f(-i\varphi)h(i\varphi) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $g(z) \not\equiv 0$, $\text{Im } f(-i\varphi)g(i\varphi) \equiv 0$ и $\text{Im } g(-i\varphi)h(i\varphi) \equiv 0$. Тогда при любом $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем $f(-i\varphi)|g(i\varphi)|^2 h(i\varphi) \in \mathbb{R}$. По теореме единственности [26, с. 122] множество нулей функции g нигде не плотно на мнимой оси, поэтому $\text{Im } f(-i\varphi)h(i\varphi) \equiv 0$. \square

Лемма 2.6. Для любого конечного набора целых функций $\{H_m\}$ ($m = \overline{1, M}$), вещественных чисел $\{a_k\}$ ($k = \overline{1, K}$) и целых неотрицательных чисел $\{\nu_m^k\}$ ($m = \overline{1, 2M}$, $k = \overline{1, K}$) множество решений уравнения

$$\sum_{k=1}^K a_k \prod_{m=1}^M (\text{Re } H_m(ix))^{\nu_{2m}^k} (\text{Im } H_m(ix))^{\nu_{2m}^k} = 0 \quad (2.6)$$

либо совпадает с \mathbb{R} , либо конечно на каждом отрезке вещественной оси.

Доказательство. Покажем, что целая функция H_m единственным образом представима в виде $H_m(z) = H_m^R(-iz) + iH_m^I(-iz)$, где $H_m^R, H_m^I \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$. Для этого разложим H_m в ряд Маклорена: $H_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} i^n c_n) z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Im} i^n c_n) z^n$ сходятся абсолютно, поскольку $|\operatorname{Re} i^n c_n| < |c_n|$ и $|\operatorname{Im} i^n c_n| < |c_n|$. Степенные ряды, сходящиеся на всей комплексной плоскости, — целые функции [26, с. 116], которые мы обозначим как H_m^R и H_m^I соответственно. Далее, $H_m^R(-iz) + iH_m^I(-iz) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n i^n) (-i)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = H_m(z)$.

Рассмотрим функцию

$$W(z) = \sum_{k=1}^K a_k \prod_{m=1}^M (H_m^R(z))^{v_{2m-1}^k} (H_m^I(z))^{v_{2m}^k}.$$

Очевидно, $W \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$, поэтому множество вещественных корней этой функции совпадает со множеством решений уравнения (2.6). По теореме единственности каждая ненулевая целая функция имеет конечное число корней на компакте. \square

Доказательство теоремы 2.1. В силу леммы 2.5 и того, что $f_0(z) \not\equiv 0$, имеем $v_{km}(\varphi) \equiv 0$ для любых $k, m = \overline{0, n}$.

В силу леммы 1.1 тождество $\operatorname{Im} f_k(-i\varphi) f_m(i\varphi) \equiv 0$ эквивалентно следующему:

$$f_k(-i\varphi) f_m(i\varphi) \equiv f_k(i\varphi) f_m(-i\varphi).$$

В силу теоремы единственности получаем, что для любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $f_k(-z) f_m(z) \equiv f_k(z) f_m(-z)$ и, следовательно, $F(z, \mathbf{r}) f_m(-z) \equiv F(-z, \mathbf{r}) f_m(z)$.

Пусть найдется функция f_m и число $z_0 \in \mathbb{C}$ такие, что z_0 — корень $F(z, \mathbf{a})$ и либо z_0 не является корнем функции f_m , либо является корнем меньшей кратности. Тогда из равенства $F(z_0) f_m(-z_0) = F(-z_0) f_m(z_0)$ вытекает, что $-z_0$ тоже является корнем функции $F(\cdot, \mathbf{a})$, которая, таким образом, не является устойчивой.

Итак, для того, чтобы функция $F(\cdot, \mathbf{a})$ была устойчивой, необходимо, чтобы каждый корень этой функции являлся корнем любой функции f_m с учетом кратности. Следовательно, имеет место представление $f_m(z) = F(z, \mathbf{a}) \beta_m(z)$, где $\beta_m \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$. Из тождества $F(z, \mathbf{a}) f_m(-z) \equiv F(-z, \mathbf{a}) f_m(z)$ вытекает, что β_m — четная функция.

Следовательно, для любого $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ получаем представление

$$F(z, \mathbf{r}) \equiv F(z, \mathbf{a}) \left(\beta_0(z) + \sum_{k=1}^n r_k \beta_k(z) \right).$$

Поскольку все функции β_k четные, то для того, чтобы $F(\cdot, \mathbf{r})$ была устойчивой, необходимо, чтобы уравнение

$$\beta_0(z) + \sum_{k=1}^n r_k \beta_k(z) = 0 \tag{2.7}$$

не имело решений в комплексной плоскости. Без ограничения общности будем считать, что $f_1(z) \not\equiv 0$. При фиксированном r_2 существует не более двух значений переменной r_1 , при которых уравнение (2.7) не имеет решений в комплексной плоскости [25, с. 61]. Следовательно, существует последовательность $\{\mathbf{a}_n\}$, сходящаяся к \mathbf{a} , такая, что $F(\cdot, \mathbf{a}_n)$ не является устойчивой при любом $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 1.2 функция $F(\cdot, \mathbf{a})$ тоже не является устойчивой. \square

§ 3. Развитие метода D-разбиения для двухпараметрических систем с запаздыванием

Рассмотрим ситуацию, когда характеристическое уравнение (2.1) линейно зависит от двумерного вещественного вектора $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$, то есть характеристическое уравнение имеет вид

$$f_0(z) + r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) = 0. \tag{3.1}$$

В данном случае точка D-разбиения (\mathbf{r}, φ) — это точка пространства \mathbb{R}^3 , а проекция точки D-разбиения (\mathbf{r}, φ) — это точка \mathbf{r} плоскости \mathbb{R}^2 .

§ 3.1. Точки D-разбиения двухпараметрических характеристических уравнений

Разделение действительной и мнимой частей уравнения $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$ приводит к системе

$$\begin{cases} r_1 \operatorname{Re} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Re} f_2(i\varphi) + \operatorname{Re} f_0(i\varphi) = 0, \\ r_1 \operatorname{Im} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Im} f_2(i\varphi) + \operatorname{Im} f_0(i\varphi) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Запишем (3.2) в виде $A\mathbf{r}^T = \mathbf{b}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $a_{ij} = a_{ij}(\varphi)$, $b_i = b_i(\varphi)$, $(i, j = \overline{1, 2})$, и положим

$$\Delta = \det A, \quad u_1 = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 1.1 имеем

$$\Delta(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(-i\varphi)f_2(i\varphi), \quad u_1(\varphi) = \operatorname{Im} f_2(-i\varphi)f_0(i\varphi), \quad u_2(\varphi) = \operatorname{Im} f_0(-i\varphi)f_1(i\varphi).$$

Обозначим $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$.

Согласно теореме Кронекера–Капелли при фиксированном φ система (3.2) разрешима относительно \mathbf{r} в том и только том случае, если ранг матрицы $A(\varphi)$ совпадает с рангом расширенной матрицы. Ранг матрицы $A(\varphi)$ равен нулю, если $f_1(i\varphi) = f_2(i\varphi) = 0$; единице — если $\Delta(\varphi) = 0$ и по крайней мере одно из чисел $f_1(i\varphi), f_2(i\varphi)$ отлично от нуля; двум — если $\Delta(\varphi) \neq 0$. Ранг расширенной матрицы равен нулю, если $f_1(i\varphi) = f_2(i\varphi) = f_0(i\varphi) = 0$; единице — если $\Delta(\varphi) = 0$, $\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{0}$ и по крайней мере одно из чисел $f_0(i\varphi), f_1(i\varphi), f_2(i\varphi)$ отлично от нуля; двум — если $\Delta(\varphi) \neq 0$.

Таким образом, при заданном φ система (3.2) разрешима ровно в трех случаях:

- если $\Delta(\varphi) \neq 0$, то система (3.2) имеет единственное решение $\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{u}(\varphi)/\Delta(\varphi)$;
- если $\Delta(\varphi) = u_1(\varphi) = u_2(\varphi) = 0$, но по крайней мере одно из чисел $f_1(i\varphi), f_2(i\varphi)$ отлично от нуля, то система (3.2) описывает прямую в \mathbb{R}^2 ;
- если $f_1(i\varphi) = f_2(i\varphi) = f_0(i\varphi) = 0$, то любое $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ является решением системы (3.2), поэтому область устойчивости пуста.

Согласно лемме 2.6 в случае $\Delta(\varphi) \neq 0$ множество корней функции Δ либо конечно, либо счетно, причем в последнем случае любой отрезок содержит лишь конечное количество корней. Пронумеруем все неотрицательные корни по возрастанию, начиная с нулевого номера, и обозначим множество этих корней через $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Множество $\{\xi_n\}$ разбивает \mathbb{R}_+ на не более чем счетное множество интервалов I_n ($n \in \mathbb{N}_0$). Заметим, что $\xi_0 = 0$ в силу нечетности функции Δ . Если множество $\{\xi_n\}$ бесконечно, то для $I_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Если количество корней конечно, то обозначим через m их количество, уменьшенное на единицу; тогда $I_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ при $n = \overline{0, m-1}$ и $I_m = (\xi_m, \infty)$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Ориентированную кривую в \mathbb{R}^3 , задаваемую непрерывным отображением $(\mathbf{r}, \varphi) = (\mathbf{S}(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in I_n$, будем называть *кривой D-разбиения*. Ориентированную кривую в \mathbb{R}^2 , задаваемую непрерывным отображением $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$, $\varphi \in I_n$, будем обозначать через C_n и называть *проекцией кривой D-разбиения*.

О п р е д е л е н и е 3.2. Если φ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \Delta(\varphi) = u_1(\varphi) = u_2(\varphi) = 0, \\ |f_1(i\varphi)| + |f_2(i\varphi)| \neq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

то прямую на плоскости (\cdot, \cdot, φ) пространства \mathbb{R}^3 , состоящую из таких точек (\mathbf{r}, φ) , что $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$, будем называть *прямой D-разбиения, соответствующей частоте φ* . Прямую в плоскости \mathbb{R}^2 , состоящую из точек \mathbf{r} таких, что $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$, будем называть *проекцией прямой D-разбиения, соответствующей частоте φ* .

О п р е д е л е н и е 3.3. *Линией D-разбиения* будем называть любую кривую или прямую D-разбиения.

Итак, любая точка D-разбиения принадлежит ровно одной линии D-разбиения. На существование прямых и кривых D-разбиения указал Ю. И. Неймарк при рассмотрении устойчивости полиномов и квазиполиномов, линейно зависящих от двух вещественных параметров. Кроме того, им было предложено *правило штриховки*, согласно которому штриховка наносится на проекции кривых D-разбиения. Ю. И. Неймарк предложил два способа определения направления возрастания вещественной части корня на проекциях прямых D-разбиения. Если прямая соответствует частоте ξ_n и известна штриховка на прямой C_n , то предлагалось штриховать прямую так, чтобы заштрихованные стороны проекции прямой и кривой C_n совпадали. Другой способ заключается в деформировании прямых D-разбиения в кривые D-разбиения «малым» изменением функций f_0, f_1, f_2 . Однако в общем случае предложенные приемы не позволяют найти область устойчивости. Таким образом, не был решен вопрос о принципиальной возможности вычислить разность абсолютных индексов двух соседних областей D-разбиения (и вообще двух различных областей D-разбиения).

§ 3.2. Кривые D-разбиения

Исследуем свойства кривых D-разбиения и найдем способ, которым можно определить направление возрастания вещественной части корня на проекциях кривых.

Если $(a, b) \subset I_n$, то множество $(S(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in (a, b)$ является непрерывным участком проекции кривой D-разбиения, который будем обозначать через $C_n^{(a,b)}$.

С л е д с т в и е 3.1 (из леммы 2.2). *Любое ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^2$ пересекается лишь с конечным числом кривых C_n . Если $\{C_n\}$ конечно и содержит $t + 1$ кривую (то есть t — наибольший номер кривой), то найдется вещественное число σ такое, что $C_m^{(a,b)} \cap D = \emptyset$ при любых $b > a > \sigma$.*

Л е м м а 3.1. *Кривая C_n является кусочно-гладкой кривой. Если $\{C_n\}$ бесконечно, то все проекции кривых D-разбиения состоят из конечного числа гладких сегментов. Если $\{C_n\}$ конечно, то кривая с наибольшим номером состоит из не более чем счетного множества гладких сегментов, а все остальные кривые — из конечного числа гладких сегментов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В точках, где кривая теряет гладкость, выполняется равенство $S'(\varphi) = \mathbf{0}$. Это уравнение либо тождественно выполняется на всей оси, либо на каждом конечном интервале имеет лишь конечное число корней (лемма 2.6). Предположим, что $S'(\varphi) \equiv \mathbf{0}$, тогда существуют $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $\varphi \in \mathbb{R}_+$ имеем $u_1(\varphi) = k_1 \Delta(\varphi)$, $u_2(\varphi) = k_2 \Delta(\varphi)$. Это означает, что проекция любой кривой D-разбиения — это точка $\{k_1, k_2\}$. Очевидно, существует сколь угодно большое φ , являющееся частотой некоторой точки кривой D-разбиения, что приводит к противоречию с леммой 2.2. Значит, если интервал I_n ограничен, то он содержит лишь конечное число корней уравнения $S'(\varphi) = \mathbf{0}$, а если не ограничен, то содержит не более чем счетное множество корней. \square

О п р е д е л е н и е 3.4. Если $\Delta(\varphi) \not\equiv 0$ и функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы, то прямую $k_0 + k_1 r_1 + k_2 r_2 = 0$ с вещественными коэффициентами k_0, k_1, k_2 такими, что $|k_1| + |k_2| \neq 0$ и $k_0 \Delta(\varphi) + k_1 u_1(\varphi) + k_2 u_2(\varphi) \equiv 0$, будем называть *главной прямой*.

Нетрудно показать, что k_0, k_1, k_2 определяются однозначно с точностью до общего множителя, поэтому главная прямая единственная (если существует).

Л е м м а 3.2. *Пусть $\Delta(\varphi) \not\equiv 0$. Если функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы, то все проекции кривых D-разбиения лежат на главной прямой. Если функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы, тогда любой отрезок плоскости \mathbb{R}^2 имеет конечное число точек пересечения с любой кривой C_n .*

Доказательство. Пусть функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы, тогда $k_0 + k_1 S_1(\varphi) + k_2 S_2(\varphi) \equiv 0$, то есть при любом $\varphi \neq \xi_n$ точка $\mathbf{S}(\varphi)$ принадлежит главной прямой.

Пусть функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы. Рассмотрим некоторый отрезок AB произвольной прямой $k_0 + k_1 r_1 + k_2 r_2 = 0$. Согласно следствию 3.1 существует интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ такой, что $C_n^{(a,b)} \cap AB = C_n \cap AB$. Согласно лемме 2.6 множество решений уравнения $k_0 + k_1 S_1(\varphi) + k_2 S_2(\varphi) = 0$ на (a, b) конечно. \square

Заметим, что Δ не меняет знак на I_n .

Определение 3.5. Назовем кривую C_n *положительной*, если $\forall \varphi \in I_n : \Delta(\varphi) > 0$. Назовем кривую C_n *отрицательной*, если $\forall \varphi \in I_n : \Delta(\varphi) < 0$.

Будем говорить, что точка $\mathbf{S}(\varphi)$ пробегает кривую C_n в положительном направлении, если при этом φ пробегает I_n слева направо.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in I_n$, $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$ и $\mathbf{S}'(\varphi) \neq \mathbf{0}$. Если кривая C_n положительна (отрицательна), то вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ отличен от нулевого и направлен вправо (влево) относительно положительного направления ее обхода.

Доказательство. По определению $\Delta(\varphi) \neq 0$; следовательно, согласно лемме 2.1 точка (\mathbf{r}, φ) нестационарна. Из формулы (2.4) вытекает формула

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = |F'(i\varphi, \mathbf{r})|^{-2} (\mathbf{u}'(\varphi) - \Delta'(\varphi)\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Подставим $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$ в (3.4) и соберем производную частного:

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = \Delta(\varphi) |F'(i\varphi, \mathbf{r})|^{-2} \mathbf{S}'(\varphi) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

\square

Теорема 3.1 эквивалентна правилу штриховки.

§ 3.3. Прямые D-разбиения

Прямые D-разбиения не являются частным случаем кривых. Более того, прямые могут иметь различную природу, что потребовало проведения полной классификации прямых и исследования их свойств.

Определение 3.6. Назовем прямую D-разбиения *нерегулярной*, если она состоит из нерегулярных точек D-разбиения. В противном случае прямую D-разбиения будем называть *регулярной*.

Теорема 3.2. Для того чтобы прямая D-разбиения, соответствующая частоте φ , была нерегулярной, необходимо и достаточно выполнения всех трех условий (3.6)–(3.8):

$$\operatorname{Im} f_1'(-i\varphi) f_2'(i\varphi) = \operatorname{Im} f_0'(-i\varphi) f_1'(i\varphi) = \operatorname{Im} f_2'(-i\varphi) f_0'(i\varphi) = 0, \quad (3.6)$$

$$(f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi))' = (f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi))' = (f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi))' = 0, \quad (3.7)$$

$$f_1'(i\varphi) = f_2'(i\varphi) = 0 \Rightarrow f_0'(i\varphi) = 0. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для того чтобы точка D-разбиения (\mathbf{r}, φ) была нерегулярной, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$f_0'(i\varphi) + r_1 f_1'(i\varphi) + r_2 f_2'(i\varphi) = 0. \quad (3.9)$$

Исследовав разрешимость уравнения (3.9) относительно \mathbf{r} , по аналогии с системой (3.2) получаем, что уравнение (3.9) разрешимо в трех случаях:

- (1) если $f_0'(i\varphi) = f_1'(i\varphi) = f_2'(i\varphi) = 0$, то уравнение (3.9) разрешимо при любом $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$;
- (2) если $\operatorname{Im} f_1'(i\varphi) f_2'(-i\varphi) \neq 0$, то уравнение (3.9) имеет единственное решение — точку плоскости \mathbb{R}^2 ;

(3) если по крайней мере одно из чисел $f_1'(i\varphi)$, $f_2'(i\varphi)$ отлично от нуля и выполняются равенства (3.6), то уравнение (3.9) задает прямую на плоскости (\cdot, \cdot, φ) пространства \mathbb{R}^3 .

В случае (1) прямая D-разбиения нерегулярна, в случае (2) прямая D-разбиения состоит из регулярных точек D-разбиения, за исключением не более чем одной точки — решения уравнения (3.9).

Рассмотрим случай (3). Прямая, задаваемая уравнением (3.9), и прямая D-разбиения либо параллельны, либо пересекаются, либо совпадают. В первом случае прямая D-разбиения состоит из регулярных точек D-разбиения, во втором случае единственная нерегулярная точка D-разбиения — это точка пересечения прямых, в третьем случае — прямая D-разбиения нерегулярна. Последний случай реализуется, если уравнение (3.9) пропорционально уравнениям системы (3.2), что эквивалентно равенствам (3.7). \square

С л е д с т в и е 3.2. *Регулярная прямая D-разбиения состоит из регулярных точек D-разбиения, за исключением не более чем одной точки.*

О п р е д е л е н и е 3.7. Назовем регулярную прямую D-разбиения, соответствующую частоте φ , *стационарной*, если $\Delta'(\varphi) = u_1'(\varphi) = u_2'(\varphi) = 0$, и *нестационарной*, если хотя бы одно из значений $\Delta'(\varphi)$, $u_1'(\varphi)$, $u_2'(\varphi)$ не равно нулю.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть частоте φ соответствует прямая D-разбиения такая, что*

$$\Delta'(\varphi) = 0, \quad \mathbf{u}'(\varphi) \neq \mathbf{0}.$$

Тогда

- *данная прямая регулярна,*
- *любая точка данной прямой нестационарна,*
- *в любой точке \mathbf{r} проекции прямой D-разбиения вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ отличен от нулевого и повернут относительно вектора $\mathbf{u}'(\varphi)$ на $\pi/2$ по часовой стрелке.*

Доказательство сводится к применению формулы (3.4), которая в данном случае принимает вид

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = |F'(i\varphi, \mathbf{r})|^{-2} \mathbf{u}'(\varphi) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е 3.8. Пусть частоте φ соответствует прямая D-разбиения и $\Delta'(\varphi) \neq 0$; назовем точку $(\mathbf{u}'(\varphi)/\Delta'(\varphi), \varphi)$ пространства \mathbb{R}^3 *центральной точкой* данной прямой D-разбиения.

Покажем, что центральная точка прямой D-разбиения принадлежит этой прямой. Дифференцируя по φ тождество $0 \equiv \Delta(\varphi)f_0(i\varphi) + u_1(\varphi)f_1(i\varphi) + u_2(\varphi)f_2(i\varphi)$, проверяемое непосредственно, получим $\Delta'f_0 + u_1'f_1 + u_2'f_2 \equiv -i(\Delta f_0' + u_1 f_1' + u_2 f_2')$. Если φ соответствует некоторая прямая D-разбиения, то стоящее справа выражение равно нулю, поэтому нулю равно и выражение, стоящее слева.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть частоте φ соответствует прямая D-разбиения и $\Delta'(\varphi) \neq 0$. Тогда*

- *данная прямая регулярна,*
- *любая точка данной прямой, кроме центральной точки, нестационарна,*
- *если \mathbf{r} — проекция точки данной прямой, не являющейся центральной точкой, то вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ отличен от нулевого и направлен по касательной к окружности с центром в проекции центральной точки данной прямой, проходящей через \mathbf{r} ; при этом $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ направлен против часовой стрелки, если $\Delta'(\varphi) > 0$, и по часовой стрелке, если $\Delta'(\varphi) < 0$.*

Доказательство сводится к применению формулы (3.4), которая принимает вид

$$\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = -|F'(i\varphi, \mathbf{r})|^{-2} \Delta'(\varphi)(\mathbf{r} - \mathbf{u}'(\varphi)/\Delta'(\varphi)) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы определить направление возрастания вещественной части корня на проекциях стационарных прямых (за исключением не более чем одной точки), нужно вычислить младшую ненулевую частную производную функции $\operatorname{Re} Z_\varphi$. Разберем часто встречающийся случай.

Теорема 3.5. *Если точка \mathbf{a} принадлежит проекции стационарной прямой D-разбиения и имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re} \frac{1}{F'(i\varphi, \mathbf{a})} \left(\frac{f_1^2(i\varphi) + f_2^2(i\varphi)}{F'(i\varphi, \mathbf{a})} \right)' > 0 (< 0), \quad (3.10)$$

тогда для любой точки $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ в окрестности точки \mathbf{a} , за исключением проекции рассматриваемой прямой, имеем $\operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) > 0$ (< 0).

Доказательство. Найдем дифференциал второго порядка от функции Z_φ :

$$\begin{aligned} d^2 Z_\varphi &= \left(-\frac{2f_1 f_1'}{F'} + F' \frac{\partial^2 Z}{\partial r_1^2} + \frac{f_1^2 F''}{(F')^2} \right) dr_1^2 + \\ &+ 2 \left(-\frac{f_1 f_2' + f_1' f_2}{F'} + F' \frac{\partial^2 Z}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{f_1 f_2 F''}{(F')^2} \right) dr_1 dr_2 + \left(-\frac{2f_2 f_2'}{F'} + F' \frac{\partial^2 Z}{\partial r_2^2} + \frac{f_2^2 F''}{(F')^2} \right) dr_2^2. \end{aligned}$$

Поскольку $d^2 Z_\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$ вдоль проекции рассматриваемой прямой вблизи \mathbf{a} , то из предыдущей формулы можно найти производные второго порядка для точек, принадлежащих проекции прямой:

$$\frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_1^2} = \frac{2F' f_1 f_1' - f_1^2 F''}{(F')^3}, \quad \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_2^2} = \frac{2F' f_2 f_2' - f_2^2 F''}{(F')^3}, \quad \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_1 \partial r_2} = \frac{F' f_1 f_2' + F' f_1' f_2 - f_1 f_2 F''}{(F')^3}.$$

Через H обозначим квадратную 2×2 -матрицу, составленную из частных производных второго порядка функции $\operatorname{Re} Z_\varphi$ в точке \mathbf{a} :

$$H = \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial r_2^2} \end{bmatrix}.$$

В силу найденных выше формул для производных получаем

$$H = \operatorname{Re} \frac{1}{(F')^3} \begin{bmatrix} 2F' f_1 f_1' - f_1^2 F'' & F' f_1 f_2' + F' f_1' f_2 - f_1 f_2 F'' \\ F' f_1 f_2' + F' f_1' f_2 - f_1 f_2 F'' & 2F' f_2 f_2' - f_2^2 F'' \end{bmatrix}.$$

Для точки \mathbf{r} в окрестности \mathbf{a} имеем

$$\operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = (r_1 - a_1)^2 H_{11} + 2(r_1 - a_1)(r_2 - a_2) H_{12} + (r_2 - a_2)^2 H_{22} + o((\mathbf{r} - \mathbf{a})^2).$$

Далее,

$$\operatorname{Sp} H = \operatorname{Re} \frac{F'(f_1^2 + f_2^2)' - F''(f_1^2 + f_2^2)}{(F')^3} = \operatorname{Re} \frac{1}{F'} \left(\frac{f_1^2 + f_2^2}{F'} \right)' \neq 0.$$

Если \mathbf{r} принадлежит проекции рассматриваемой прямой и расположена достаточно близко к \mathbf{a} (так, что (\mathbf{r}, φ) — регулярная точка D-разбиения), то $\operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = 0$, следовательно, H — ненулевая эрмитова вырожденная матрица, поэтому элементы на главной диагонали отличны от нуля, имеют одинаковый знак, и справедливо представление

$$\operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = \operatorname{sgn} \operatorname{Sp} H \left(\sqrt{|H_{11}|} (r_1 - a_1) + \sqrt{|H_{22}|} (r_2 - a_2) \right)^2,$$

откуда вытекает, что знак $\operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ вблизи точки \mathbf{a} , за исключением точек проекции рассматриваемой прямой, совпадает со знаком следа матрицы H . \square

Сведем все возможные типы прямых D-разбиения в таблицу 1.

Таблица 1. Типы прямых D-разбиения

	Нерегулярные	Регулярные		
		стационарные	нестационарные	
			с центральной точкой	без центральной точки
Критерий	$\Delta'(\varphi) = \mathbf{u}'(\varphi) = \mathbf{0}$, (3.6), (3.7) и (3.8)	$\Delta'(\varphi) = \mathbf{u}'(\varphi) = \mathbf{0}$, и хотя бы одно из (3.6)–(3.8) неверно	$\Delta'(\varphi) \neq 0$	$\Delta'(\varphi) = 0$, $\mathbf{u}'(\varphi) \neq \mathbf{0}$

Исследуем мощность множества прямых D-разбиения. Как показывает следующий пример, это множество может быть несчетным (в отличие от множества кривых D-разбиения).

Пример 3.1. Если функция (3.1) является полиномом $F(z, \mathbf{r}) = z^4 + r_1 z^2 + r_2$, то $\text{Im } F(i\varphi, \mathbf{r}) \equiv 0$, поэтому прямые D-разбиения задаются уравнением

$$\varphi^4 - r_1 \varphi^2 + r_2 = 0$$

(при любом вещественном фиксированном φ). Данное уравнение имеет вещественные корни в том и только том случае, если либо $r_2 \leq 0$ и $r_1 \leq 0$, либо $r_1 > 0$ и $4r_2 < r_1^2$. Таким образом, проекции прямых D-разбиения полностью «заметают» неограниченную область в \mathbb{R}^2 .

Теорема 3.6. *Множество прямых D-разбиения континуально в том и только том случае, если $\mathbf{u}(\varphi) \equiv \mathbf{0}$, но по крайней мере одна из функций f_1, f_2 отлична от тождественного нуля.*

Доказательство. Необходимость очевидна: если $\mathbf{u}(\varphi) \neq \mathbf{0}$, то множество неотрицательных корней системы (3.3) либо конечно, либо счетно (причем каждому отрезку вещественной оси принадлежит конечное число корней).

Если $\mathbf{u}(\varphi) \equiv \mathbf{0}$, то $\Delta(\varphi) \equiv 0$ (в силу леммы 2.5 и того, что $f_0(z) \neq 0$), а функции f_1, f_2 имеют не более чем счетное множество корней на вещественной оси, поэтому система (3.3) имеет континуум решений. \square

Итак, в случае если $\mathbf{u}(\varphi) \neq \mathbf{0}$, множество неотрицательных корней системы (3.3) либо конечно, либо счетно. Пронумеруем элементы этого множества, начиная с нулевого номера, и обозначим через θ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Прямые D-разбиения соответствуют частоты $\{\theta_n\}$, и только они. Проекцию прямой D-разбиения, соответствующей значению θ_n , обозначим через L_n .

Следствие 3.3 (из леммы 2.2). *Если не все функции Δ, u_1, u_2 тождественно равны нулю, то любое ограниченное множество $D \in \mathbb{R}^2$ пересекается конечным числом проекций прямых D-разбиения.*

Таким образом, прямые $\{L_n\}$ разбивают \mathbb{R}^2 на не более чем счетное число выпуклых областей, ограниченных ломаной, причем если область ограничена, то ломаная состоит из конечного числа прямолинейных сегментов.

Если $(\mathbf{u}'(\varphi)/\Delta'(\varphi), \varphi)$ — центральная точка прямой D-разбиения, соответствующей частоте φ , то проекцию этой точки будем называть *центральной точкой* прямой L_n .

Для того чтобы сравнить абсолютные индексы двух областей D-разбиения, проведем непрерывную кривую, соединяющую две внутренние точки этих областей. Если эта кривая пересекает конечное число областей, причем точки ее пересечения с границей — проекции регулярных точек, то, выяснив характер убывания или роста функции $\text{Re } Z_\varphi$ в этих точках, возможно вычислить разность абсолютных индексов заданных областей за конечное число шагов.

Определение 3.9. Назовем кривую $Q \subset \mathbb{R}^2$ *регулярной*, если она ограничена, содержит конечное число проекций точек D-разбиения и не содержит особых точек.

Из существования регулярной кривой, соединяющей неособые точки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, вытекает вычислимость $\rho(\mathbf{a}) - \rho(\mathbf{b})$ за конечное число арифметических операций.

Теорема 3.7. Пусть не все функции Δ, u_1, u_2 одновременно равны нулю. Для того чтобы две неособые точки плоскости \mathbb{R}^2 можно было соединить регулярной кривой, необходимо и достаточно, чтобы эти точки располагались по одну сторону от любой нерегулярной прямой.

Доказательство. Необходимость очевидна, покажем достаточность. Построим произвольную ломаную Q , соединяющую точки \mathbf{a} и \mathbf{b} . Согласно следствиям 3.1, 3.3 любое звено ломаной пересекает конечное число прямых L_n и кривых C_n ; кроме того, каждую из них ломаная пересекает в конечном числе точек. Рассмотрим некоторую область D , содержащую ломаную. Согласно лемме 3.1, теореме 3.1 и следствию 3.2 множество проекций нерегулярных точек, принадлежащих D , конечно. Значит, добавлением конечного числа узлов в Q можно добиться того, что ломаная не проходит через эти точки. Полученная таким образом ломаная — искомая регулярная кривая. \square

§ 4. Классификация двухпараметрических характеристических уравнений

В § 3 показано, что тип линий D-разбиения и, следовательно, областей D-разбиения зависит от того, какие из функций Δ, u_1, u_2 тождественно равны нулю. Сведем все возможные ситуации в таблицу 2.

Таблица 2. Множества и типы линий D-разбиения

№	$\Delta(\varphi)$	$u_1(\varphi)$	$u_2(\varphi)$	Множество кривых D-разбиения	Множество прямых D-разбиения
1	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	не более чем счетно	не более чем счетно
2	$\neq 0$	$\neq 0$	$\equiv 0$		
3	$\neq 0$	$\equiv 0$	$\neq 0$		
4	$\equiv 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	пусто	континуально
5	$\equiv 0$	$\equiv 0$	$\equiv 0$		
6	$\neq 0$	$\equiv 0$	$\equiv 0$	Условия несовместны	
7	$\equiv 0$	$\neq 0$	$\equiv 0$	Сводятся к к одномерному случаю	
8	$\equiv 0$	$\equiv 0$	$\neq 0$		

Мы видим, что ситуация под номером 6 не реализуется. Это объясняется тем, что $f_0(z) = z^N + g_0(z) \neq 0$, поэтому из $u_1(\varphi) \equiv 0, u_2(\varphi) \equiv 0$ вытекает, что Δ тоже тождественно равна нулю (доказательство повторяет первый абзац доказательства теоремы 2.1).

Остальные случаи содержательны, поэтому проведем классификацию характеристических уравнений. В случае 5 множество кривых D-разбиения пусто, а множество прямых D-разбиения либо континуально (теорема 3.6), либо пусто (в том и только том случае, если $f_1(\varphi) \equiv f_2(\varphi) \equiv 0$).

В случаях 4, 7 и 8 множество кривых D-разбиения пусто, а множество прямых D-разбиения не более чем счетно, причем последние два случая сводятся к однопараметрическим характеристическим уравнениям. Действительно, например, из $\Delta(\varphi) \equiv 0, u_1(\varphi) \equiv 0$ и $u_2(\varphi) \neq 0$ по лемме 2.5 вытекает $f_2(z) \equiv 0$.

В случаях 1–3 множество кривых D-разбиения и прямых D-разбиения не более чем счетно. В этих случаях, однако, целесообразно выделить случай, когда существует главная прямая.

Таким образом, можно выделить всего четыре типа двухпараметрических характеристических уравнений:

- будем называть (3.1) *двухпараметрическим характеристическим уравнением первого рода*, если функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы;
- будем называть (3.1) *двухпараметрическим характеристическим уравнением второго рода*, если $\Delta(\varphi) \neq 0$ и функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы;

- будем называть (3.1) *двупараметрическим характеристическим уравнением третьего рода*, если $\Delta(\varphi) \equiv 0$, но $\mathbf{u}(\varphi) \neq \mathbf{0}$;
- будем называть (3.1) *двупараметрическим характеристическим уравнением четвертого рода*, если $\mathbf{u}(\varphi) \equiv \mathbf{0}$.

Заметим, что невырожденное линейное преобразование координат и перенос начала координат не должны менять тип характеристического уравнения. Перейдем от координат (r_1, r_2) к (r_1^*, r_2^*) :

$$r_1 = a_{11}r_1^* + a_{12}r_2^* + a_{10}, \quad r_2 = a_{21}r_1^* + a_{22}r_2^* + a_{20},$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тогда характеристическое уравнение (3.1) имеет вид

$$r_1^* f_1^*(z) + r_2^* f_2^*(z) + f_0^*(z) = 0,$$

где $f_1^*(z) = a_{11}f_1(z) + a_{21}f_2(z)$, $f_2^*(z) = a_{12}f_1(z) + a_{22}f_2(z)$ и $f_0^*(z) = f_0(z) + a_{10}f_1(z) + a_{20}f_2(z)$.

Вычислим $\Delta^*(\varphi) = \text{Im } f_1^*(-i\varphi)f_2^*(i\varphi) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\Delta(\varphi)$,

$$u_1^*(\varphi) = \text{Im } f_2^*(-i\varphi)f_0^*(i\varphi) = a_{22}u_1(\varphi) - a_{12}u_2(\varphi) + (a_{12}a_{20} - a_{10}a_{22})\Delta(\varphi),$$

$$u_2^*(\varphi) = \text{Im } f_0^*(-i\varphi)f_1^*(i\varphi) = -a_{21}u_1(\varphi) + a_{11}u_2(\varphi) + (a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11})\Delta(\varphi).$$

Таким образом, $\Delta(\varphi) \equiv 0$ эквивалентно $\Delta^*(\varphi) \equiv 0$, а $\Delta(\varphi) \equiv u_1(\varphi) \equiv u_2(\varphi) \equiv 0$ эквивалентно $\Delta^*(\varphi) \equiv u_1^*(\varphi) \equiv u_2^*(\varphi) \equiv 0$. Функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы в том и только том случае, если Δ^*, u_1^*, u_2^* линейно зависимы.

Отметим, что если функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы, то можно подобрать такое линейное преобразование и перенос параметров, чтобы заданная функция u_1^* или u_2^* обратилась в тождественный ноль.

Теперь рассмотрим каждый тип характеристических функций более подробно.

§ 4.1. Характеристическое уравнение первого рода

В этом случае множества кривых D-разбиения и прямых D-разбиения не более чем счетны, главной прямой не существует, а области D-разбиения могут иметь криволинейные границы, поэтому едва ли удастся уточнить геометрию областей D-разбиения без дополнительных предположений. Тем не менее можно сформулировать один полезный признак.

Л е м м а 4.1. Пусть (3.1) — характеристическое уравнение первого рода; точки \mathbf{a} и \mathbf{b} — внутренние точки различных областей D-разбиения, а отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает ни одну проекцию прямой D-разбиения, и в любой точке пересечения этого отрезка с проекцией кривой D-разбиения выполняется неравенство

$$\Delta(u_1u_2' - u_2u_1' - a_1(u_2'\Delta - u_2\Delta') + a_2(u_1'\Delta - u_1\Delta')) > 0. \quad (4.1)$$

Тогда $\rho(\mathbf{b}) > \rho(\mathbf{a})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 3.1 существует конечное число точек D-разбиения, проекции которых принадлежат отрезку, соединяющему точки \mathbf{a} и \mathbf{b} . Выберем из них любую точку D-разбиения $(\mathbf{S}(\varphi), \varphi)$ и рассмотрим знак скалярного произведения

$$s = \left(\nabla Z_\varphi(\mathbf{S}(\varphi)), \mathbf{S}(\varphi) - \mathbf{a} \right).$$

По теореме 3.1 имеем

$$s = \Delta(\varphi) \left| F'(i\varphi, \mathbf{S}(\varphi)) \right|^{-2} \left(S_2'(\varphi)(S_1(\varphi) - a_1) - S_1'(\varphi)(S_2(\varphi) - a_2) \right).$$

Подставив $\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{u}(\varphi)/\Delta(\varphi)$ и раскрыв производные отношения, получим, что $s > 0$ равносильно неравенству (4.1). Поскольку $s > 0$ для любой точки D-разбиения, проекция которой принадлежит отрезку, соединяющему точки \mathbf{a} и \mathbf{b} , то $\rho(\mathbf{b}) > \rho(\mathbf{a})$. \square

§ 4.2. Характеристическое уравнение второго рода

В этом случае множества кривых D-разбиения и прямых D-разбиения тоже не более чем счетны. В отличие от предыдущего случая здесь существует главная прямая (то есть проекции всех кривых D-разбиения принадлежат этой прямой).

Переносом начала координат и линейным преобразованием координат добьемся того, чтобы главная прямая совпала с осью r_1 ; тогда $u_2(\varphi) \equiv 0$.

Согласно теореме 2.1 абсолютный индекс точек главной прямой отличен от нуля и, как правило, вычислим непосредственно. Применяя теорему 3.1, можно вычислить абсолютный индекс всех областей D-разбиения, примыкающих к главной оси и пересекающих ее. Далее, если все прямые D-разбиения нестационарны, применяя теоремы 3.3, 3.4, можно найти абсолютные индексы всех остальных областей.

Разберем предложенную схему в случае, когда характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 + r_1 + r_2 f_2(z) = 0, \quad (4.2)$$

где $f_2 \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$, $\sigma(f_2) \leq 1$.

Имеем $f_1(z) \equiv 1$, $\Delta(\varphi) = \text{Im } f_2(i\varphi)$, $u_1(\varphi) = \varphi^2 \text{Im } f_2(i\varphi)$ и $u_2(\varphi) \equiv 0$. В силу $\mathbf{u}(\xi_n) = \mathbf{0}$ множества $\{\xi_n\}$ и $\{\theta_n\}$ совпадают. Если множество $\{\xi_n\}$ бесконечно, то обозначим $\mathbb{M} = \mathbb{N}_0$, а если множество $\{\xi_n\}$ конечно, то обозначим через M наибольший индекс этого множества и обозначим $\mathbb{M} = \{0, 1, \dots, M\}$.

Заметим, что $\Delta'(\varphi) = \text{Re } f_2'(i\varphi)$.

При каждом $n \in \mathbb{M}$ прямая L_n описывается уравнением $r_1 + r_2 f_2(i\theta_n) = \theta_n^2$. Очевидно, ни одна из этих прямых не параллельна оси r_1 . Пусть $\mathbf{a}_n = \{\theta_n^2, 0\}$. Если $f_2(i\theta_n) \neq 0$, то прямая L_n пересекает ось r_1 в единственной точке \mathbf{a}_n . Если $\text{Re } f_2'(i\theta_n) \neq 0$, то \mathbf{a}_n — центральная точка прямой L_n .

Нетрудно видеть, что $\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2, 0\}$, следовательно, кривой C_n является либо интервал, соединяющий точки \mathbf{a}_n и \mathbf{a}_{n+1} , либо открытый луч с вершиной в точке \mathbf{a}_M (если M — наибольший индекс конечного множества $\{\theta_n\}$).

При каждом $n \in \mathbb{M}$ рассмотрим область Q_n в плоскости \mathbb{R}^2 , содержащую такие точки \mathbf{r} , что

$$\forall m \in [0, n]: r_1 > \theta_m^2 - r_2 f_2(i\theta_m), \quad (4.3)$$

$$\forall m \in \mathbb{M} \cap [n, +\infty): r_1 < \theta_m^2 - r_2 f_2(i\theta_m), \quad (4.4)$$

$$r_2 \Delta(\theta_n + 0) < 0. \quad (4.5)$$

Заметим, что если кривая C_n положительна, то Q_n примыкает к ней снизу, а если отрицательна — то сверху.

Если $\text{Re } f_2'(i\theta_n) \neq 0$, то неравенство (4.5) может быть заменено следующим:

$$r_2 \text{Re } f_2'(i\theta_n) < 0, \quad (4.6)$$

а если $\text{Re } f_2'(i\theta_{n+1}) \neq 0$ — то следующим:

$$r_2 \text{Re } f_2'(i\theta_{n+1}) > 0. \quad (4.7)$$

Л е м м а 4.2. Пусть существует $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{M}$ имеем $|f_2(i\theta_n)| \geq |\delta|$, и если $f_2(i\theta_n) \neq \delta$, то $\text{Re } f_2'(i\theta_n) f_2(i\theta_n) < 0$. Тогда $\bigcup_{n \in \mathbb{M}} Q_n$ — область устойчивости уравнения (4.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.3 левее прямой L_0 нет точек с нулевым индексом. Правее L_0 области D-разбиения делятся на две категории:

- области, примыкающие к проекциям кривых D-разбиения;
- области, отделенные от оси r_1 .

Абсолютный индекс точек кривых равен двум, поскольку $F(z, \mathbf{r}) = z^2 + r_1$ ($r_1 > 0$). Положительное направление обхода кривых D-разбиения совпадает с положительным направлением оси r_1 , поэтому если $\Delta(\varphi) > 0$, то вектор ∇Z_φ сонаправлен оси r_2 , а если $\Delta(\varphi) < 0$, то ∇Z_φ направлен противоположно оси r_2 . Иными словами, $-\nabla Z_\varphi$ направлен внутрь Q_n , поэтому $\rho(Q_n) = 0$.

Кроме Q_n к кривой C_n примыкает еще одна область. Ее абсолютный индекс равен двум, поскольку внутрь нее направлен ∇Z_φ .

Докажем, что абсолютный индекс областей, отделенных от оси r_1 , положителен. Пусть \mathbf{a} — произвольная точка одной из таких областей. Проведем через эту точку прямую $r_1 = a_1 + \delta(r_2 - a_2)$ и обозначим через $\mathbf{b} = \{b_1, 0\}$ точку пересечения этой прямой с осью r_1 . Отрезок, проведенный из \mathbf{a} в \mathbf{b} , пересекает конечное число проекций прямых D-разбиения. Пусть $\mathbf{d} = \{d_1, d_2\}$ — точка пересечения этого отрезка с одной из таких прямых L_k . Имеем $d_1 = b_1 + \delta d_2$, следовательно, $\mathbf{d} - \mathbf{b} = d_2\{\delta, 1\}$.

Из (3.4) получаем $\nabla \operatorname{Re} Z_{\theta_k}(\mathbf{d}) = |F(i\theta_k, \mathbf{d})|^{-2} \Delta'(\theta_k)\{-d_2, d_1 - \theta_k^2\}$, следовательно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{d} - \mathbf{b}, \operatorname{Re} Z_{\theta_k}(\mathbf{d})) &= \frac{\Delta'(\theta_k)d_2(d_1 - d_2\delta - \theta_k^2)}{|F(i\theta_k, \mathbf{d})|^2} = \\ &= -\frac{\Delta'(\theta_k)d_2^2(f_2(\theta_k) + \delta)}{|F(i\theta_k, \mathbf{d})|^2} = -\Delta'(\theta_k)f_2(\theta_k)\frac{d_2^2(1 + \delta/f_2(\theta_k))}{|F(i\theta_k, \mathbf{d})|^2} > 0, \end{aligned}$$

откуда $\rho(\mathbf{a}) > 0$. □

Граница Q_n состоит из не более чем счетного множества прямолинейных сегментов. Более точное описание областей Q_n можно дать при дополнительных предположениях относительно последовательности $\{f_2(i\theta_n)\}$.

- (i) Рассмотрим случай, когда $f_2(i\theta_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{M}$. Все прямые L_n параллельны оси r_2 , поэтому если θ_{n+1} существует, то

$$Q_n = \{\mathbf{r} : \theta_n^2 < r_1 < \theta_{n+1}^2, r_2\Delta(\theta_n + 0) < 0\},$$

а если θ_{n+1} не существует, то

$$Q_n = \{\mathbf{r} : r_1 > \theta_n^2, r_2\Delta(\theta_n + 0) < 0\}.$$

- (ii) Рассмотрим случай, когда $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ — стационарная ненулевая последовательность. Если все прямые D-разбиения нестационарны, то условия леммы 4.2 эквивалентны тому, что $\{f_2(i\theta_n)\}$ — знакопеременная последовательность. Таким образом, если θ_{n+1} существует, то Q_n — внутренность равнобедренного треугольника, образованного отрезками прямых L_n, L_{n+1} и интервалом C_n . В случае когда \mathbb{M} конечно, Q_M — неограниченный угол.

- (iii) Рассмотрим случай, когда $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ — убывающая последовательность. В этом случае с ростом n абсолютная величина углового коэффициента растет. Следовательно, если \mathbb{M} бесконечно, то условия леммы 4.2 эквивалентны тому, что все прямые D-разбиения нестационарны, а знаки их угловых коэффициентов чередуются и $\operatorname{Re} f_2'(0)f_2(0) < 0$. Если \mathbb{M} конечно, то условия леммы 4.2 эквивалентны тому, что все прямые, кроме, быть может, последней, нестационарны, знаки их угловых коэффициентов чередуются и $\operatorname{Re} f_2'(0)f_2(0) < 0$. Прямая с наибольшим номером имеет наибольший модуль углового коэффициента, и ее тип не важен (в том числе эта прямая может быть проекцией нерегулярной прямой). Таким образом, если θ_{n+1} существует, то Q_n — внутренность многоугольника и описывается неравенствами (4.3), (4.6) и

$$r_1 < \theta_{n+1}^2 - r_2 f_2(i\theta_{n+1}). \quad (4.8)$$

Если \mathbb{M} конечно, то Q_M — неограниченный угол, описываемый неравенствами (4.3) и (4.5).

(iv) Наконец, рассмотрим случай, когда $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ — возрастающая последовательность. В этом случае условия леммы 4.2 эквивалентны тому, что все прямые, кроме, быть может, прямой L_0 , нестационарны, а знаки их угловых коэффициентов чередуются, начиная с $n = 1$, и хотя бы для одного $n \geq 1$ имеем $\operatorname{Re} f_2'(i\theta_n)f_2(i\theta_n) < 0$. С ростом n абсолютная величина углового коэффициента уменьшается, поэтому если θ_{n+1} существует, то Q_n — внутренность многоугольника и описывается неравенствами (4.4), (4.7) и

$$r_1 > \theta_n^2 - r_2 f_2(i\theta_n). \quad (4.9)$$

Если M конечно, то Q_M — неограниченный угол, описываемый неравенствами (4.7) и (4.9).

Особенно интересен случай, когда $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ — возрастающая бесконечная последовательность. Если не вводить дополнительные ограничения, то описание областей Q_n нельзя упростить. Будем предполагать, что, начиная с $n = 1$, последовательность $\{\theta_n^2 |f_2(i\theta_n)|^{-1}\}$ не убывает. Это означает, что расстояние от начала координат до точки пересечения прямой L_n с осью r_2 не убывает с ростом n , следовательно, неравенства (4.4) вытекают из (4.8). Таким образом, в этом случае Q_n — внутренность треугольника, образованного отрезками прямых L_n, L_{n+1} и интервалом C_n .

§ 4.3. Характеристическое уравнение третьего рода

В этом случае кривых D-разбиения не существует, множество прямых D-разбиения не более чем счетно, поэтому любая область D-разбиения является выпуклым множеством, граница которого состоит из не более чем счетного множества прямолинейных сегментов.

Обозначим через \mathcal{H}_n множество точек $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству

$$F(i\theta_n, \mathbf{r})(f_2(-i\theta_n)u_1'(\theta_n) - f_1(-i\theta_n)u_2'(\theta_n)) > 0. \quad (4.10)$$

Каждая прямая L_n разбивает \mathbb{R}^2 на две полуплоскости. Докажем, что если L_n — проекция нестационарной прямой D-разбиения и $\mathbf{a} \in L_n$, то вектор $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\theta_n}(\mathbf{a})$ отличен от нуля и направлен внутрь \mathcal{H}_n .

Обозначим $s = |F'(i\theta_n, \mathbf{a})|^2 (\mathbf{a} - \mathbf{r}, \nabla \operatorname{Re} Z_{\theta_n}(\mathbf{a}))$.

Далее, $\mathbf{r} \in \mathcal{H}_n$ равносильно $s > 0$. Используя (2.2), получим

$$s = -\operatorname{Re}((a_1 - r_1)F'(i\varphi, \mathbf{a})f_1(-i\varphi) + (a_2 - r_2)F'(i\varphi, \mathbf{a})f_2(-i\varphi)),$$

следовательно,

$$s = \operatorname{Re}(F'(-i\theta_n, \mathbf{a})F(i\theta_n, \mathbf{r})). \quad (4.11)$$

Предположим, что $f_2(i\theta_n) \neq 0$. Домножим неравенство $s > 0$ на положительное число $f_2(i\theta_n)f_2(-i\theta_n)$. В силу $f_k(i\theta_n)f_2(-i\theta_n) \in \mathbb{R}$ для любого $k \in \{0, 1, 2\}$ из (4.11) получаем $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n) \operatorname{Re}(F'(-i\theta_n, \mathbf{a})f_2(i\theta_n))$.

Учитывая (2.4) и то, что $u_1 = -v_{20}$, $u_2 = v_{10}$, получаем

$$\operatorname{Re}(F'(-i\theta_n, \mathbf{a})f_2(i\theta_n)) = u_1'(\theta_n),$$

следовательно, $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n)u_1'(\theta_n)$.

Аналогично, если $f_1(i\theta_n) \neq 0$, то $\operatorname{sgn} s = -\operatorname{sgn} F(i\theta_n, \mathbf{r})f_1(-i\theta_n)u_2'(\theta_n)$.

По определению прямой D-разбиения по крайней мере одно из чисел $f_1(i\theta_n)$, $f_2(i\theta_n)$ отлично от нуля, следовательно, неравенство (4.11) равносильно тому, что справедливо по крайней мере одно из неравенств:

$$-F(i\theta_n, \mathbf{r})f_1(-i\theta_n)u_2'(\theta_n) > 0, \quad (4.12)$$

$$F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n)u_1'(\theta_n) > 0. \quad (4.13)$$

Сложив (4.12) и (4.13), получим (4.10).

Заметим, что если выражения, стоящие слева в неравенствах в (4.12), (4.13), не обращаются в ноль, то любое из этих неравенств можно использовать в качестве определения \mathcal{H}_n вместо (4.10).

Проекция всех нерегулярных и стационарных прямых разбивают плоскость на не более чем счетное множество выпуклых областей $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$.

Лемма 4.3. Если для каждой области M_k существует непустая область D_k , равная пересечению M_k со всеми \mathcal{H}_n такими, что нестационарная прямая L_n пересекает M_k , то область устойчивости есть объединение некоторых из областей D_k .

Доказательство. Рассмотрим область M_k . Выберем $\mathbf{a} \in D_k$ и $\mathbf{b} \in M_k \setminus D_k$; тогда отрезок, проведенный из \mathbf{a} в \mathbf{b} , пересекает конечное число прямых из множества L_n , но $\mathbf{a} \in \mathcal{H}_n$, а $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}_n$, поэтому $\rho(\mathbf{b}) > \rho(\mathbf{a})$. \square

Поясним смысл леммы 4.3. Множество ω_1 целесообразно составлять либо из регулярных, либо из стационарных прямых. Тогда внутри области M_n нет особых точек, что позволяет соединить любые две точки регулярной прямой (теорема 3.7) и найти области с нулевым абсолютным индексом. В частности, если внутри каждой области M_n можно указать область D_n с наименьшим абсолютным индексом, то остается тем или иным способом найти абсолютные индексы всех D_n . Приведем несколько признаков, основанных на применении этой идеи.

Как и при исследовании характеристического уравнения второго рода, обозначим через \mathbb{M} множество индексов элементов множества θ_n , нумеруемых с нуля.

Следствие 4.1. Пусть (3.1) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода, и $\bigcap_{n \in \mathbb{M}} \mathcal{H}_n \neq \emptyset$. Тогда область устойчивости либо пуста, либо совпадает с $\bigcap_{n \in \mathbb{M}} \mathcal{H}_n$.

Следствие 4.2 (из лемм 2.3, 4.3). Пусть (3.1) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода, $|f_1(0)| + |f_2(0)| \neq 0$ и область D , являющаяся пересечением полуплоскости $r_1 f_1(0) + r_2 f_2(0) + f_0(0) > 0$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{M} \setminus \{0\}} \mathcal{H}_n$, не пуста. Тогда область устойчивости либо пуста, либо совпадает с D .

Очевидно, следствие 4.1 вытекает из следствия 4.2 в том случае, если прямая, соответствующая нулевой частоте, нестационарна.

Следствие 4.3. Пусть (3.1) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода, а точка \mathbf{a} принадлежит прямой L_m и полуплоскости \mathcal{H}_n при любом $n \neq m$. Область устойчивости пуста, если выполняется хотя бы одно из условий:

- (1) $W(\theta_m, \mathbf{a}) > 0$;
- (2) существует прямая в \mathbb{R}^2 , проходящая через точку \mathbf{a} , но не совпадающая с L_m , такая, что абсолютный индекс любой точки этой прямой положителен;
- (3) $f_1(0)u'_2(0) > f_2(0)u'_1(0)$.

Доказательство. Пусть выполняется (1) или (2). Применим лемму 4.3: множество ω_1 состоит из прямой L_m , а множество ω_2 из всех остальных прямых. Тогда M_1 и M_2 — полуплоскости, на которые прямая L_m разбила плоскость. Обозначим через D пересечение всех полуплоскостей \mathcal{H}_n таких, что $n \neq m$. Области $D_1 = D \cap M_1$ и $D_2 = D \cap M_2$ не пусты, и вне этих областей нет точек с нулевым абсолютным индексом. Поскольку \mathbf{a} не принадлежит L_n ни при каком $n \neq m$, существует круг достаточно малого радиуса, не пересекающий ни одну из проекций прямых D -разбиения, кроме L_m , следовательно, абсолютный индекс любой точки этого круга положителен. Области D_1, D_2 пересекаются с данным кругом, поэтому $\rho(D_1) > 0$ и $\rho(D_2) > 0$.

Если выполняется пункт (3), то прямая L_0 нестационарна. Полуплоскость \mathcal{H}_0 задается неравенством $r_1 f_1(0) + r_2 f_2(0) + f_0(0) < 0$, а согласно лемме 2.3 условие $r_1 f_1(0) + r_2 f_2(0) + f_0(0) > 0$ необходимо для того, чтобы все корни уравнения (3.1) лежали слева от мнимой оси. Таким образом, область устойчивости пуста согласно следствию 4.2. \square

§ 4.4. Характеристическое уравнение четвертого рода

В данном случае имеем $u_1(\varphi) \equiv u_2(\varphi) \equiv \Delta(\varphi) \equiv 0$. Анализ такого характеристического уравнения мог бы создать значительные трудности, поскольку множество прямых D-разбиения континуально, однако область устойчивости для характеристического уравнения четвертого рода либо пуста, либо совпадает с \mathbb{R}^2 . Действительно, согласно теореме 2.1, если хотя бы одна из функций f_1, f_2 не обращается тождественно в ноль, область устойчивости пуста. Пусть $f_1(\varphi) = f_2(\varphi) \equiv 0$, тогда, если f_0 устойчива, область устойчивости совпадает с \mathbb{R}^2 , а если f_0 не является устойчивой, то область устойчивости пуста.

В примере 3.1 приведено характеристическое уравнение четвертого рода.

* * *

Исключая из рассмотрения характеристическое уравнение четвертого рода, делаем следующие выводы. Границы областей D-разбиения могут иметь криволинейные и прямолинейные участки. Первая ситуация реализуется только для характеристического уравнения первого рода. Прямолинейные участки могут возникнуть по двум причинам: либо это участки проекций кривых D-разбиения, принадлежащие главной прямой (это может быть только для характеристического уравнения второго рода), либо это участки проекций прямых D-разбиения. Правило штриховки эквивалентно теореме 3.1, то есть оно позволяет определить направление возрастания вещественной части корня только на проекциях кривых D-разбиения.

Для прямых D-разбиения правило штриховки непосредственно не применимо, поэтому Ю. И. Неймарк предложил два приема: либо деформировать прямые в кривые введением фиктивных параметров, либо нанести штриховку на проекции прямых так, чтобы она соответствовала штриховке на кривых. Первый прием приводит к усложнению задачи. Второй прием эквивалентен применению теоремы 3.4 (то есть применим только для нестационарных прямых с центральной точкой). Таким образом, область устойчивости характеристического уравнения третьего рода невозможно найти, используя правило штриховки, хотя области D-разбиения для уравнения этого типа наиболее просто исследовать.

Если характеристическое уравнение зависит от более чем двух параметров, то фиксирование некоторых параметров приводит к исследованию семейства двухпараметрических характеристических уравнений. Если это возможно, то целесообразно выбирать такую параметризацию, которая приводит к исследованию характеристических уравнений второго или третьего рода.

В заключение параграфа сформулируем критерий прямолинейности границ областей D-разбиения.

Теорема 4.1. Пусть функции f_0, f_1 и f_2 не имеют общего корня на мнимой оси, а среди функций Δ, u_1 и u_2 хотя бы одна не равна нулю тождественно. Тогда для того, чтобы граница любой области D-разбиения состояла только из прямолинейных участков, необходимо и достаточно, чтобы функции Δ, u_1, u_2 были линейно зависимы.

§ 5. Наборы D-разбиения

Если существует область D-разбиения такая, что при переходе из нее в любую другую область D-разбиения абсолютный индекс точек увеличивается, то либо она является областью устойчивости, либо область устойчивости пуста. В других частных случаях могут быть использованы леммы 4.1, 4.2, 4.3, однако универсального способа расстановки абсолютных индексов для областей D-разбиения не существует.

Для получения необходимых и достаточных условий устойчивости, как правило, требуется указать алгоритм, позволяющий найти или оценить абсолютный индекс любой области D-разбиения. Построение такого алгоритма может быть достаточно трудной задачей. В настоящем параграфе рассматривается новый прием анализа областей D-разбиения.

Далее будем полагать, что $\mathbf{u}(\varphi) \not\equiv \mathbf{0}$, то есть характеристическое уравнение четвертого рода исключено из рассмотрения.

О п р е д е л е н и е 5.1. Выберем некоторое множество линий D-разбиения и поставим каждой из них в соответствие натуральное число. Множество этих линий назовем *набором D-разбиения*, а числа — *весами линий в наборе*.

Будем говорить, что наборы ω_1 и ω_2 равны, если они содержат одни и те же линии D-разбиения, и вес каждой линии в ω_1 равен весу этой линии в ω_2 .

В дальнейшем для краткости вместо термина *набор D-разбиения* будем использовать термин *набор*. Кроме того, удобно оперировать не самими линиями D-разбиения, а их проекциями, поэтому выражение «кривая C_n (прямая L_n) принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе» следует понимать так: «кривая D-разбиения (прямая D-разбиения), проекция которой — это кривая C_n (прямая L_n), принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе».

§ 5.1. Индексируемые наборы

О п р е д е л е н и е 5.2.

- *Точкой D-разбиения набора* назовем точку D-разбиения, принадлежащую какой-либо линии данного набора.
- *Областью набора* назовем линейно связное открытое множество $V \in \mathbb{R}^2$ такое, что:
 - V не содержит проекции ни одной точки D-разбиения данного набора,
 - любое линейно связное открытое множество, собственным подмножеством которого является V , содержит проекцию хотя бы одной точки D-разбиения данного набора.
- Назовем набор *регулярным*, если он не содержит нерегулярные прямые D-разбиения.
- Точку в \mathbb{R}^2 будем называть *особой точкой набора*, если она является проекцией хотя бы одной нерегулярной точки набора; в противном случае точку \mathbb{R}^2 будем называть *неособой точкой набора*.
- Назовем ломаную $Q \subset \mathbb{R}^2$ *регулярной ломаной относительно набора*, если она не проходит через особую точку набора, и ни одно звено ломаной не лежит ни на проекции прямой D-разбиения, ни на главной прямой.

Для того чтобы две неособые точки набора можно было соединить ломаной, регулярной относительно набора, необходимо и достаточно, чтобы эти точки лежали по одну сторону от любой нерегулярной прямой, принадлежащей данному набору. Следовательно, в регулярном наборе любые две неособые точки набора можно соединить ломаной, регулярной относительно набора.

Согласно следствиям 3.1, 3.3 регулярная ломаная набора содержит лишь конечное число проекций точек D-разбиения набора.

Пусть Q — регулярная ломаная набора ω . Параметризуем эту ломаную с помощью непрерывной вектор-функции $\mathbf{k}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, так что $\mathbf{k}(t) \in Q$ при любом $t \in [0, 1]$.

Напомним, что ломаная Q называется *простой*, если для любых $t_1, t_2 \in (0, 1)$ из $\mathbf{k}(t_1) = \mathbf{k}(t_2)$ вытекает $t_1 = t_2$; ломаная называется *замкнутой*, если $\mathbf{k}(0) = \mathbf{k}(1)$.

Обозначим через $\{\mathbf{k}(t_n), \varphi_n\}$ ($n = \overline{1, M}$, $t_n \in [0, 1]$) множество точек D-разбиения набора, проекции которых принадлежат Q . Заметим, что $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n \pm 0)) \neq 0$ (в противном случае Q содержала бы отрезок, принадлежащий прямой D-разбиения или главной прямой).

О п р е д е л е н и е 5.3. Пусть ω — регулярный набор, а Q — ломаная, регулярная относительно набора ω . Будем называть *индексом ломаной Q относительно набора ω* число

$$\rho_\omega(Q) = \sum_{n=1}^M v_n s_n,$$

где v_n — вес в наборе ω той линии набора, которой принадлежит точка набора $(\mathbf{k}(t_n), \varphi_n)$, а s_n вычислено по следующему правилу:

- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) < 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) > 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) \operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) < 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) > 0$, то $s_n = 0$.

Заметим, что если $\mathbf{k}(t_m)$ — внутренняя точка звена $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ломаной Q и вектор $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ не перпендикулярен вектору $\nabla \operatorname{Re} Z_{\varphi_m}(\mathbf{k}(t_m))$, то $s_m = \operatorname{sgn}(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \nabla \operatorname{Re} Z_{\varphi_m}(\mathbf{k}(t_m)))$.

В силу аналитичности функции $\operatorname{Re} Z_{\varphi}$ в окрестности любой точки Q , ломаная Q допускает малую деформацию с сохранением индекса относительно набора. Следовательно, если Q не проходит через проекции стационарных прямых набора, то малым перемещением узлов Q можно добиться того, чтобы Q проходила *только* через проекции нестационарных точек D -разбиения набора.

О п р е д е л е н и е 5.4. Будем называть регулярный набор *индексируемым*, если относительно этого набора индекс любой простой регулярной замкнутой ломаной равен нулю.

Т е о р е м а 5.1. *Относительно индексируемого набора вес любой регулярной замкнутой ломаной равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Добавим к узлам регулярной замкнутой ломаной новые узлы на звеньях так, что если любые два звена новой ломаной имеют хотя бы две общие точки, то эти звенья совпадают. Таким образом, мы получим ломаную Q , регулярную относительно ω , геометрически совпадающую с исходной ломаной, имеющую тот же индекс относительно ω .

Разобьем Q на конечное множество замкнутых простых ломаных и замкнутых ломаных, не являющихся многоугольниками. Индекс относительно набора любой простой замкнутой ломаной равен нулю по предположению. Обход каждого звена замкнутой ломаной, не являющейся многоугольником, осуществляется в прямом и обратном направлении одинаковое число раз, поэтому индекс такой ломаной относительно набора равен нулю. Следовательно, индекс ломаной Q относительно набора равен нулю. \square

Т е о р е м а 5.2. *Набор, состоящий только из нестационарной прямой (с ненулевым весом), индексируем в том и только том случае, если эта прямая не имеет центральной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая L_n имеет центральную точку. Построим выпуклый замкнутый многоугольник, содержащий эту точку. Пусть Q — граница этого многоугольника, обходимая по часовой стрелки, а вес прямой в наборе равен v . Тогда согласно теореме 3.4 индекс кривой Q относительно набора равен $2v$, если $\Delta'(\theta_n) < 0$, и равен $-2v$, если $\Delta'(\theta_n) > 0$.

Пусть у прямой L_n нет центральной точки, тогда эта прямая разделяет \mathbb{R}^2 на две полуплоскости, причем ∇Z_{θ_n} в каждой точке прямой направлен из одной полуплоскости в другую. Если t пробегает значения от нуля до единицы, то точка $\mathbf{k}(t)$ пересекает L_n в обе стороны одинаковое количество раз, следовательно, индекс такой кривой относительно набора равен нулю. \square

О п р е д е л е н и е 5.5. Если $|\mathbf{S}(\xi_n)| < \infty$, то назовем точку $\mathbf{S}(\xi_n)$ *концевой точкой* кривых C_{n-1} и C_n .

Т е о р е м а 5.3. *Набор, состоящий только из кривой D -разбиения, индексируем в том и только том случае, если либо у проекции этой кривой нет концевых точек, либо концевые точки существуют и совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим простую регулярную замкнутую ломаную Q . Эта ломаная разбивает \mathbb{R}^2 на два связанных множества: многоугольник A и неограниченную область B . Для того чтобы набор был индексирем, необходимо и достаточно, чтобы при положительном обходе кривой C_n точка $\mathbf{S}(\varphi)$, переходила из A в B и из B в A равное количество раз.

Если у кривой нет конечных точек или обе конечные точки существуют и совпадают между собой, то каждому переходу из A в B соответствует ровно один переход из B в A , поэтому такой набор индексирем.

Если у кривой существует ровно одна конечная точка или существуют две конечные точки, не совпадающие между собой, то построим выпуклый многоугольник A , содержащий эту конечную точку, но не содержащий другую конечную точку (если таковая существует). Двигаясь из этой конечной точки вдоль кривой C_n , мы, очевидно, пересечем границу извне A на один раз больше, чем внутрь A . \square

В индексиремом наборе любые две регулярные ломаные, имеющие общий конец и общее начало, имеют одинаковые относительные индексы.

Определение 5.6. Пусть \mathbf{a} — неособая точка индексиремого набора ω ; присвоим ей некоторое целое число $\rho_\omega(\mathbf{a})$. Тогда любой другой неособой точки \mathbf{b} присвоим число $\rho_\omega(\mathbf{b})$ по формуле $\rho_\omega(\mathbf{b}) = \rho_\omega(\mathbf{a}) + \rho_\omega(Q)$, где Q — некоторая регулярная ломаная с началом в \mathbf{a} и концом в \mathbf{b} . Числа $\rho_\omega(\mathbf{a})$ и $\rho_\omega(\mathbf{b})$ будем называть *индексом точек \mathbf{a} и \mathbf{b} относительно ω* .

Иными словами, линии индексиремого набора разбивают \mathbb{R}^2 на области так, что этим областям можно присвоить относительный индекс по правилу, аналогичному тому, как расставляется абсолютный индекс областей, учитывая, однако, что вес линий задается исследователем.

Определение 5.7. Объединением наборов ω_1 и ω_2 назовем набор ω_0 , состоящий из линий, входящих хотя бы в один из наборов. Вес линии в наборе ω_0 равен сумме ее весов в наборах ω_1 и ω_2 . Будем обозначать $\omega_0 = \omega_1 \cup \omega_2$.

Покажем, что если ω_1 и ω_2 — индексиремые наборы, то $\omega_1 \cup \omega_2$ — индексиремый набор. Для этого построим регулярную замкнутую простую ломаную Q . Поскольку Q пересекает конечное число проекций точек D -разбиения, то индекс Q относительно $\omega_1 \cup \omega_2$, очевидно, равен сумме ее индексов относительно ω_1 и ω_2 , то есть равен нулю.

Определение 5.8. Будем называть набор *полным*, если

- он содержит все линии D -разбиения;
- если существует прямая, соответствующая нулевой частоте, то вес этой прямой в наборе равен единице;
- вес любой линии набора, кроме прямой, соответствующей нулевой частоте, равен двум.

Теорема 5.4. Пусть полный набор может быть представлен в виде объединения не более чем счетного множества индексиремых наборов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. Тогда

- полный набор индексирем,
- если существуют неособая точка \mathbf{a} и номер t такие, что для любого $n > t$ имеем $\rho_{\omega_n}(\mathbf{a}) = 0$, то существует целое число W такое, что для любой неособой точки \mathbf{b} имеем $\rho(\mathbf{b}) = W + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{b})$.

Доказательство. По определению

$$\rho(\mathbf{b}) - \rho(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{\omega_n}(\mathbf{b}) - \rho_{\omega_n}(\mathbf{a})) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{b}) - \sum_{n=1}^m \rho_{\omega_n}(\mathbf{a}),$$

следовательно, достаточно положить $W = \rho(\mathbf{a}) - \sum_{n=1}^m \rho_{\omega_n}(\mathbf{a})$. \square

§ 5.2. Элементарные наборы

О п р е д е л е н и е 5.9. Индексируемый набор ω назовем *элементарным*, если он не может быть представлен в виде объединения двух различных непустых индексируемых наборов.

Рассмотрим типичные наборы.

- Набор, состоящий из нестационарной прямой без центральной точки, будем называть *I-набором*.
- Набор, состоящий из кривой без концевых точек с весом 2, будем называть *S-набором*.
- Будем называть *T-набором* набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и нестационарной прямой L_m с весом 1 таких, что $\Delta'(\theta_m) \neq 0$ и либо $\theta_m = \xi_n$ и $\mathbf{u}(\xi_{n+1}) \neq \mathbf{0}$, либо $\theta_m = \xi_{n+1}$ и $\mathbf{u}(\xi_n) \neq \mathbf{0}$.
- Набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и прямых L_m, L_{m+1} с весом 1 таких, что $\theta_m = \xi_n$ или $\theta_{m+1} = \xi_{n+1}$, будем называть *H-набором*.

Согласно теоремам 5.2, 5.3 I-наборы и S-наборы индексируемы и, следовательно, элементарны.

Т е о р е м а 5.5. *T-набор элементарен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности пусть C_n — положительная кривая и $\mathbf{u}(\xi_{n+1}) = \mathbf{0}$. Тогда $\xi_n = \theta_m$, $\mathbf{S}(\xi_n)$ конечно и $\Delta'(\theta_m) > 0$, точка $\mathbf{S}(\xi_n)$ является центральной точкой прямой L_m и единственной концевой точкой C_n .

Рассмотрим Q — простую замкнутую регулярную ломаную набора. Пусть обход Q осуществляется против часовой стрелки. Ломаная Q ограничивает многоугольник A .

Если центральная точка прямой L_n не принадлежит A , то вклад как прямой L_m , так и кривой C_n в индекс ломаной Q относительно набора равен нулю (доказательство этих фактов повторяет рассуждения, приведенные в доказательствах теорем 5.2, 5.3).

Пусть центральная точка прямой L_m принадлежит A . Пусть K_1 — количество пересечений Q и L_m , таких, что при увеличении t переход точки $\mathbf{k}(t)$ через L_m осуществляется по часовой стрелке, а K_2 — количество таких пересечений против часовой стрелки. Очевидно, $K_1 - K_2 = 2$, поэтому вклад прямой L_m в вес ломаной Q относительно набора равен двум.

Далее, если φ пробегает значения от (ξ_n, ξ_{n+1}) , то точка $\mathbf{S}(\varphi)$ выходит из A на один раз больше, чем входит внутрь этого многоугольника, поэтому вклад кривой C_n в вес ломаной Q относительно набора равен -2. Таким образом, вес ломаной Q относительно набора равен нулю. \square

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству предыдущей.

Т е о р е м а 5.6. *H-набор элементарен.*

Вообще говоря, элементарные наборы могут быть весьма разнообразными. Однако для характеристического уравнения третьего рода не существует кривых D-разбиения, а у прямых D-разбиения нет центральных точек, поэтому если все прямые нестационарны, то полный набор, очевидно, представляет собой объединение не более чем счетного множества I-наборов.

Для характеристического уравнения первого и второго рода имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.7. *Пусть $\Delta(\varphi) \neq 0$ и у функций $\Delta, \Delta', u_1, u'_1, u_2, u'_2$ нет общего корня. Тогда полный набор может быть представлен как объединение не более чем счетного множества S-, T- и H-наборов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения теоремы из $\Delta'(\xi_n) = 0$ вытекает

$$\lim_{\varphi \rightarrow \xi_n} \Delta(\varphi)/u_1(\varphi) = 0 \text{ или } \lim_{\varphi \rightarrow \xi_n} \Delta(\varphi)/u_2(\varphi) = 0.$$

Иными словами, если существует конечный предел $\lim_{\varphi \rightarrow \xi_n} \mathbf{S}(\varphi)$, то $\Delta'(\xi_n) \neq 0$, и тогда согласно (2.4) по крайней мере одно из чисел $f_1(\xi_n), f_2(\xi_n)$ отлично от нуля. Следовательно, каждая концевая точка проекции кривой D-разбиения является проекцией центральной точки нестационарной прямой D-разбиения, и наоборот: каждая проекция центральной точки прямой D-разбиения является концевой точкой некоторой проекции кривой D-разбиения.

Кроме того, прямая D-разбиения, соответствующая частоте ξ_n , существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}(\xi_n) = \mathbf{0}$, причем все прямые D-разбиения нестационарные и имеют центральную точку.

Сформируем набор ω_n следующим образом: во-первых, включим в него кривую C_n с весом 2, во-вторых, если $\mathbf{u}(\xi_n) = \mathbf{0}$, то включим в набор прямую, соответствующую частоте ξ_n , с весом 1, в-третьих, если $\mathbf{u}(\xi_{n+1}) = \mathbf{0}$, то включим в набор прямую, соответствующую частоте ξ_{n+1} , с весом 1.

Таким образом, если оба вектора $\mathbf{u}(\xi_n), \mathbf{u}(\xi_{n+1})$ отличны от нулевого, то ω_n является S-набором. Если ровно один из векторов отличен от нулевого, то ω_n — это T-набор, а если оба вектора нулевые, то ω_n является H-набором.

Прямая L_0 входит только в набор ω_0 ; при $n \geq 1$ прямая L_n входит в два набора, поэтому ее вес в полном наборе равен двум. Поскольку каждая линия входит хотя бы в один набор, то объединение всех ω_n дает полный набор. \square

О п р е д е л е н и е 5.10. Будем называть индексированный набор *простым*, если проекция ни одной из входящих в него линий не имеет точек самопересечения, проекции любых двух линий не имеют общих точек, относительный индекс любой области неотрицателен и существует хотя бы одна область набора с нулевым относительным индексом.

Простой S-набор содержит простую кривую C_n , разбивающую \mathbb{R}^2 на две области с относительными индексами 0 и 2. Если кривая положительна, то нулевой относительный индекс имеет та область, которая расположена слева относительно положительного обхода кривой, а если кривая отрицательна — та область, которая расположена справа. Относительный индекс регулярных точек кривой C_n равен двум.

Удобно иметь формальный признак, позволяющий определить, какой из двух областей принадлежит заданная точка \mathbf{a} . Для этого выберем $\varphi \in (\xi_n, \xi_{n+1})$ такую, что луч с вершиной \mathbf{a} и проходящий через $\mathbf{S}(\varphi)$, не пересекает кривую C_n ни в какой другой точке. Выражение $(\mathbf{S}(\varphi) - \mathbf{a}, \nabla Z_\varphi)$ мы уже вычисляли, его знак совпадает со знаком выражения (4.1). Если оно положительно, то относительный индекс \mathbf{a} равен нулю, а если выражение (4.1) отрицательно, то относительный индекс \mathbf{a} равен двум.

Простой T-набор содержит три области. Прямая L_m разбивает \mathbb{R}^2 на две полуплоскости: присвоим той из них, которая не содержит кривую C_n , единичный относительный индекс, тогда относительный индекс двух других областей равен 0 и 2. Осуществим обход областей по часовой стрелке относительно центральной точки прямой L_m : если $\Delta'(\theta_m) > 0$, то области расположены в порядке возрастания их относительных индексов, а если $\Delta'(\theta_m) < 0$ — то в порядке убывания (схематично области и их относительные индексы изображены на рис. 1, 2). Относительный индекс неособой точки линий набора равен наибольшему относительному индексу области, границе которой принадлежит данная точка.

Простой H-набор содержит четыре области, относительные индексы которых равны 0, 1, 1, 2. Существуют два варианта расположения этих областей, которые схематично изображены на рис. 3, 4.

Рассмотрим типичную ситуацию.

Т е о р е м а 5.8. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) полный набор прост;
- (2) $\Delta(\varphi) \neq 0$, и у функций $\Delta, \Delta', u_1, u'_1, u_2, u'_2$ нет общего корня;
- (3) центральная точка прямой L_0 имеет нулевой индекс относительно любого элементарного набора, не содержащего L_0 ;

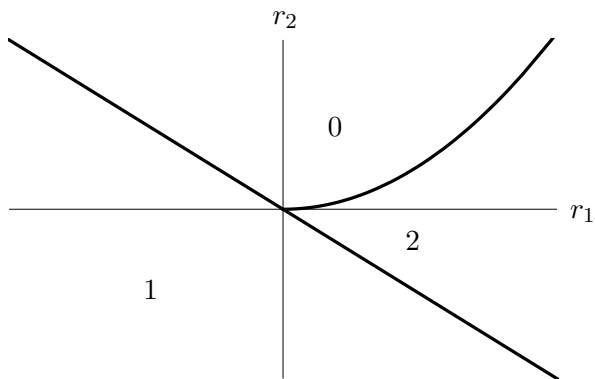


Рис. 1. Простой Т-набор при $\Delta'(\xi_n) > 0$

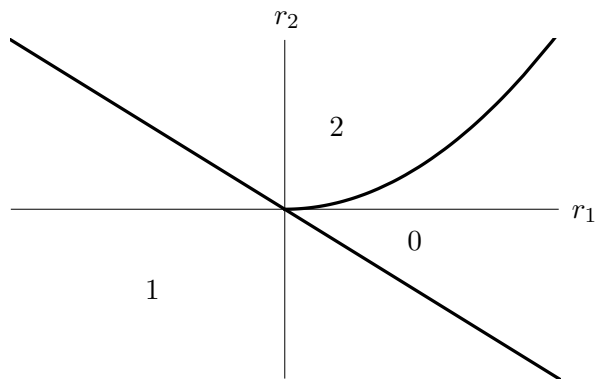


Рис. 2. Простой Т-набор при $\Delta'(\xi_n) < 0$

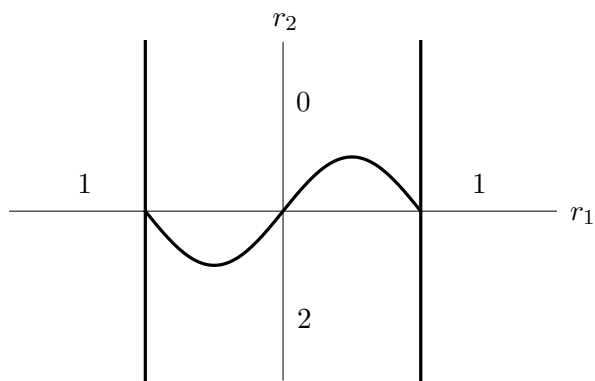


Рис. 3. Простой Н-набор при $\Delta'(\xi_n) > 0$

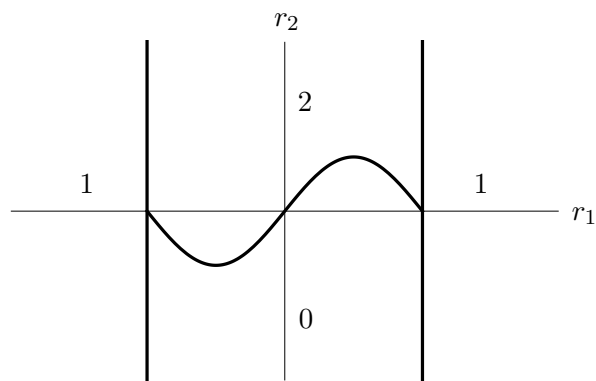


Рис. 4. Простой Н-набор при $\Delta'(\xi_n) < 0$

(4) существует точка $\mathbf{p} \in L_0$ такая, что $\rho(\mathbf{p}) = 1$.

Тогда нулевой абсолютный индекс имеют те и только те точки, которые имеют нулевой индекс относительно Т-набора, содержащего L_0 .

Доказательство. Согласно теореме 5.7 в силу пункта (2) полный набор Ω является объединением не более чем счетного множества простых элементарных наборов $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots$, причем через ω_0 обозначен элементарный Т-набор, состоящий из L_0 и C_0 .

Обозначим через D_n область с нулевым индексом относительно ω_n . Множество $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ не пусто по условию пункта (3) и открыто согласно следствиям 3.1, 3.3.

Центральная точка прямой L_0 принадлежит границе D_0 и области M , поэтому $D_0 \cap M \neq \emptyset$. Покажем, что если выполняется условие пункта (4), то $D_0 \cap M$ является областью устойчивости.

Согласно лемме 5.4 существует целое число W такое, что для любой неособой точки \mathbf{b} имеем $\rho(\mathbf{b}) = W + \sum_n \rho_{\omega_n}(\mathbf{b})$. Для $\mathbf{b} \in D_0 \cap M$ имеем $\rho(\mathbf{b}) = W$, поэтому $W \geq 0$. Для точки \mathbf{p} имеем

$$1 = \rho(\mathbf{p}) \geq W + \rho_{\omega_0}(\mathbf{p}) \geq W + 1,$$

откуда $W \leq 0$, следовательно, $W = 0$.

Остается отметить, что в силу условия пункта (1) проекции линий D-разбиения не пересекают D_0 , поэтому $D_0 = D_0 \cap M$. \square

§ 6. Примеры

В качестве примеров рассматриваются двухпараметрические характеристические уравнения ряда уравнений с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Уравнения со слагаемым z возникают при исследовании ФДУ первого порядка. Уравнения со слагаемым z^2 можно интерпретировать как частные случаи характеристического уравнения ФДУ второго порядка

или системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Далее $p_1 = a, p_2 = b$.

§ 6.1. Примеры двухпараметрических характеристических уравнений первого рода

$$z^2 + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + bz = 0, \quad (6.1)$$

$$z + ae^{-z} + b \frac{1 - e^{-2z}}{2} = 0, \quad (6.2)$$

$$z + a + be^{-z} = 0, \quad (6.3)$$

$$z^2 + ae^{-z} + bz = 0, \quad (6.4)$$

$$z + a \frac{1 - e^{-z}}{2z} + b = 0, \quad (6.5)$$

$$z^2 + ae^{-z} + bze^{-z} = 0, \quad (6.6)$$

$$z^2 + a \frac{1 - e^{-2z}}{2} + be^{-z} = 0, \quad (6.7)$$

$$z^2 + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + bze^{-z} = 0, \quad (6.8)$$

$$z^2 + ae^{-2z} + bze^{-z} = 0, \quad (6.9)$$

$$z^2 + ae^{-2z} + be^{-z} = 0. \quad (6.10)$$

Теорема 6.1. Для того чтобы все корни уравнения (6.1) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$b > 0, \quad 0 < a < \eta^2 / \cos^2 \eta,$$

где η — корень уравнения $b = \eta \operatorname{tg} \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$z^2 e^z + a \operatorname{ch} z + bze^z = 0,$$

тогда $\Delta(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi) = \varphi \cos^2 \varphi$,

$$u_1(\varphi) = \operatorname{Im} f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi) = \varphi^3,$$

$$u_2(\varphi) = \operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi) = \varphi^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Очевидно, функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы, следовательно, (6.1) — двухпараметрическое характеристическое уравнение первого рода.

Имеем $S_1(\varphi) = \varphi^2 / \cos^2 \varphi$ и $S_2(\varphi) = -\varphi \operatorname{tg} \varphi$.

Далее, $\xi_0 = 0$ и $\xi_n = \pi(n - 1/2)$ при $n \in \mathbb{N}$. Равенство $\mathbf{u}(\xi_n) = \mathbf{0}$ выполняется только при $n = 0$, а функции Δ, u_1, Δ' не имеют общих корней, следовательно, полный набор представим в виде объединения одного простого T-набора ω_0 , состоящего из L_0 и C_0 , и счетного множества простых S-наборов ω_n , каждый из которых включает только кривую C_n (теорема 5.7). Простота наборов вытекает из монотонности функции S_2 .

Прямая L_0 описывается уравнением $r_1 = 0$, ее центральная точка расположена в начале координат. Неограниченный криволинейный угол D_0 , изображенный на рис. 5 — область набора ω_0 с нулевым относительным индексом.

Теперь докажем, что полный набор прост. Очевидно, для любого вещественного φ выполняется тождество $\varphi^2 = S_1(\varphi) - S_2^2(\varphi)$. Следовательно, если φ — решение уравнений $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$ при фиксированном \mathbf{r} , то оно является решением уравнения $\varphi^2 = r_1 - r_2^2$, то есть через каждую точку плоскости проходит не более одной проекции кривой D-разбиения. Так как $S_1(\varphi) > 0$ при любом $\varphi \neq \xi_n$, прямая L_0 не пересекает кривую C_n ни при каком $n \in \mathbb{N}_0$.

Теперь докажем, что центральная точка прямой L_0 имеет нулевой индекс относительно любого набора ω_n при $n \geq 1$. При $n \geq 1$ уравнение $S_2(\varphi) = 0$ имеет единственное решение $\varphi = \pi n$ на интервале (ξ_n, ξ_{n+1}) , то есть кривая C_n пересекает ось r_1 в единственной точке $\mathbf{S}(\pi n) = \{\pi^2 n^2, 0\}$. Пусть \mathbf{a} — начало координат; подставив значения $\varphi = \pi n$, $a_1 = a_2 = 0$ в неравенство (4.1), получим $\Delta(\varphi)u_1(\varphi)u_2'(\varphi) = \pi^6 n^6 > 0$; следовательно, $\rho_{\omega_n}(\mathbf{a}) = 0$ (лемма 4.1).

Таким образом, выполняются условия теоремы 5.8, следовательно, область устойчивости характеристического уравнения (6.1) — это область D_0 на рис. 5. \square

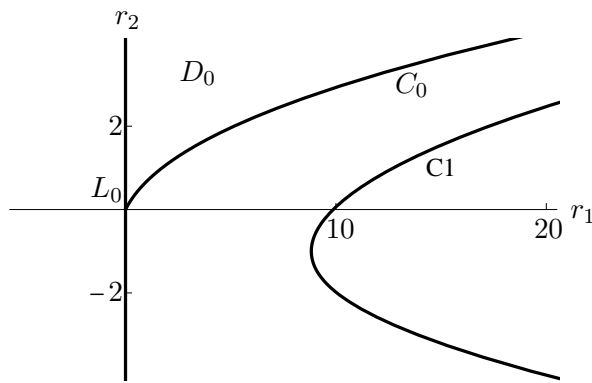


Рис. 5. T-набор ω_0 и S-набор ω_1 уравнения (6.1); D_0 — область устойчивости

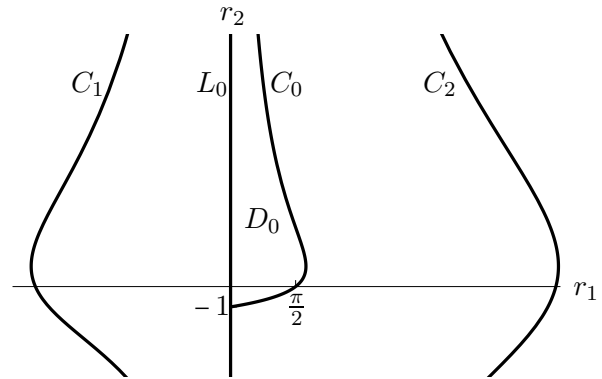


Рис. 6. Элементарный T-набор ω_0 и S-наборы ω_1, ω_2 уравнения (6.2); D_0 — область устойчивости

Теорема 6.2. Для того чтобы все корни уравнения (6.2) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $b > -1$ и $0 < a < \eta \sin \eta$, где η — корень уравнения $b = -\eta \operatorname{ctg} \eta$ из интервала $(0, \pi)$.

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$ze^z + a + b \operatorname{sh} z = 0;$$

тогда $\Delta(\varphi) = \sin \varphi$, $u_1(\varphi) = \varphi \sin^2 \varphi$ и $u_2(\varphi) = -\varphi \cos \varphi$; следовательно, (6.2) — двухпараметрическое характеристическое уравнение первого рода.

Далее, $\xi_n = \pi n$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Полный набор представим в виде объединения одного простого T-набора ω_0 , состоящего из L_0 и C_0 , и счетного множества простых S-наборов ω_n , каждый из которых включает только кривую C_n . Простота наборов вытекает из монотонности функции S_2 .

Далее доказательство сводится к проверке требований теоремы 5.8. Все требования, за исключением первого, проверяются полностью аналогично тому, как это было проделано при доказательстве теоремы 6.1, поэтому не будем на них останавливаться.

Убедимся лишь только в том, что полный набор прост. Имеем $S_1(\varphi) = \varphi \sin \varphi$ и $S_2(\varphi) = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$. Очевидно, что $S_1(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \neq \xi_n$; следовательно, ни одна из кривых D-разбиения не пересекает прямую L_0 . Предположим, что проекции двух кривых D-разбиения пересекаются, тогда существуют частоты $\varphi < \psi$ такие, что $S_1(\varphi) = S_1(\psi)$ и $S_2(\varphi) = S_2(\psi)$. Из второго равенства вытекает, что $|\operatorname{ctg} \varphi| > |\operatorname{ctg} \psi|$, следовательно, $|\sin \varphi| < |\sin \psi|$, откуда получаем, что $|S_1(\psi)| > |S_1(\varphi)|$.

Итак, по теореме 5.8 область устойчивости — это область D_0 на рис. 6. \square

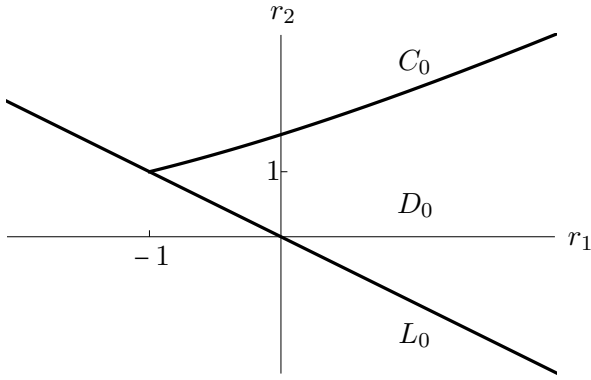


Рис. 7. Элементарный T-набор ω_0 уравнения (6.3); D_0 — область устойчивости

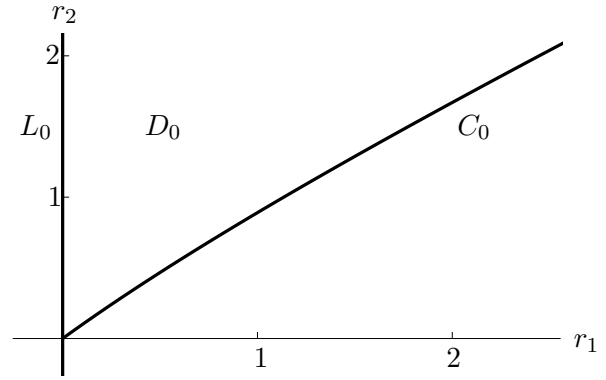


Рис. 8. Элементарный T-набор ω_0 уравнения (6.4); D_0 — область устойчивости

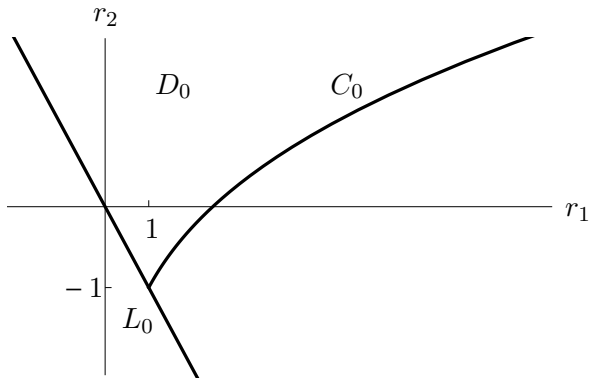


Рис. 9. Элементарный T-набор ω_0 уравнения (6.5); D_0 — область устойчивости

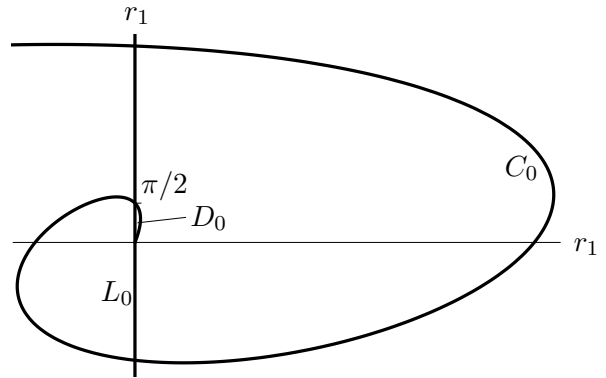


Рис. 10. Области D-разбиения уравнения (6.6); D_0 — область устойчивости

Теорема 6.3 (см. [17]). *Все корни уравнения (6.3) имеют отрицательные вещественные части, если и только если выполняются неравенства $a > -1$ и $-a < b < \eta / \sin \eta$, где η — единственный корень уравнения $a = -\eta \operatorname{ctg} \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.*

Теорема 6.4 (см. [5, с. 130]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.4) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств*

$$0 < a < \eta^2 / \cos \eta,$$

где η — корень уравнения $b = \eta \operatorname{tg} \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Теорема 6.5 (см. [29]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.5) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $b > -1$ и $-b < a < \eta^2 / \sin^2 \eta$, где η — корень уравнения $b = -\eta \operatorname{ctg} \eta$ из интервала $(0, \pi)$.*

Доказательства теорем 6.3, 6.4, 6.5 повторяют доказательство теоремы 6.1 и сводятся к применению теоремы 5.8, все условия которой проверяются аналогично. На рис. 7, 8, 9 изображены T-наборы: область D_0 является областью с нулевым относительным индексом этого набора и, следовательно, областью устойчивости.

Теорема 6.6 (см. [5, с. 129]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.6) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $0 < b < \pi/2$ и $0 < a < \eta^2 \cos \eta$, где η — корень уравнения $b = \eta \sin \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.*

Доказательство. Имеем $\Delta(\varphi) = \varphi$, $u_1(\varphi) = \varphi^3 \cos \varphi$, $u_2(\varphi) = \varphi^2 \sin \varphi$, поэтому (в отличие от рассмотренных выше случаев) для этого уравнения имеется всего две линии D-разбиения: нестационарная прямая, соответствующая нулевой частоте, и кривая, которой соответствует полуинтервал $(0, +\infty)$. Прямая L_0 задается уравнением $r_1 = 0$ и имеет центральную точку, совпадающую с началом координат. Далее, $\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2 \cos \varphi, \varphi \sin \varphi\}$.

Имеем $\varphi^4 - S_2^2(\varphi)\varphi^2 - S_1^2(\varphi) = 0$. Если φ удовлетворяет уравнению $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$ при фиксированном \mathbf{r} , то оно удовлетворяет биквадратному уравнению $\varphi^4 - r_2^2\varphi^2 - r_1^2 = 0$. Данное уравнение имеет единственное положительное решение $\varphi = \sqrt{(r_2^2 + \sqrt{r_2^4 + 4r_1^2})}/2$, поэтому кривая C_n не имеет точек самопересечения.

В любой точке кривой C_n выполняется неравенство

$$S_1(\varphi)S_2'(\varphi) - S_1'(\varphi)S_2(\varphi) = \varphi^2(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) > 0;$$

следовательно, данная кривая представляет собой гладкую спираль, раскручивающуюся против часовой стрелки.

Обозначим через D_0 область, ограниченную с одной стороны отрезком прямой L_0 , а с другой — участком кривой $C_0^{(0, \pi/2)}$ (см. рис. 10). Легко видеть, что любая другая область имеет непустое пересечение с осью r_1 , в силу теоремы 6.4 ее абсолютный индекс положителен. Выберем точку $\mathbf{a} = \{0, 1\}$, ей соответствует характеристическое уравнение $z(ze^z + 1) = 0$. Это уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет ровно один корень с нулевой вещественной частью (теорема 6.3). Поскольку $\Delta'(0) = 1$, то $\nabla \operatorname{Re} Z_0$ направлен против часовой стрелки относительно начала координат (теорема 3.3), поэтому $\nabla \operatorname{Re} Z_0(\mathbf{a})$ направлен против оси r_1 , следовательно, $\rho(D_0) = 0$. \square

Теорема 6.7. Для того чтобы все корни уравнения (6.7) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < a < \pi^2/4, \quad 0 < b < a \cos \sqrt{a}. \quad (6.11)$$

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$z^2 e^z + a \operatorname{sh} z + b = 0;$$

тогда имеем $\Delta(\varphi) = -\sin \varphi$, $u_1(\varphi) = -\varphi^2 \sin \varphi$, $u_2(\varphi) = -\varphi^2 \sin \varphi \cos \varphi$; следовательно, $\theta_n = \xi_n = \pi n$ при $n \in \mathbb{N}_0$.

Проекция кривых D-разбиения задаются изображением $\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2, \varphi^2 \cos \varphi\}$. Очевидно, проекции кривых D-разбиения просты и не пересекаются друг с другом. Поскольку $\Delta'(\theta_n) = (-1)^{n+1}$, то все прямые D-разбиения нестационарны. Прямая L_n задается уравнением $r_2 = \pi^2 n^2 (-1)^n$, а $\{\pi^2 n^2, \pi n (-1)^n\}$ — ее центральная точка.

Согласно теореме 5.7 полный набор Ω может быть представлен в виде счетного объединения H-наборов ω_n , состоящих из C_n, L_n и L_{n+1} .

Изучим пересечение кривой C_n и прямой L_m . Точка пересечения удовлетворяет уравнению $S_2(\varphi) = (-1)^m \pi^2 m^2$, где $\varphi \in (\pi n, \pi(n+1))$. Легко видеть, что $|S_2(\varphi)| < \pi^2(n+1)^2$, поэтому если $m > n$, то $C_n \cap L_m = \emptyset$.

Имеем $S_2(\pi n) = \pi^2 n^2$ и $S_2(\pi(n+1)) = -\pi^2(n+1)^2$, поэтому при $m \leq n$ уравнение $S_2(\varphi) = (-1)^m \pi^2 m^2$ разрешимо. Перепишем его в виде $\pi^2 m^2 / \varphi^2 = (-1)^m \cos \varphi$ и сравним графики функций $y_1(\varphi) = \pi^2 m^2 / \varphi^2$ и $y_2(\varphi) = (-1)^m \cos \varphi$. Обе функции монотонны на интервале $(\pi n, \pi(n+1))$, но если $y_2(\varphi) > 0$, то $y_2''(\varphi) < 0$, в то время как y_1 и y_1'' положительны; следовательно, существует единственная точка пересечения графиков функция y_1 и y_2 на интервале $(\pi n, \pi(n+1))$. Таким образом, если $m \leq n$, то кривая C_n имеет единственную точку пересечения с прямой L_m .

Из вышеизложенного анализа взаимного расположения линий набора вытекает, что для набора ω_n существует пять областей: $D_0^n, D_1^n, D_2^n, D_3^n$ и D_4^n . Обозначим их так, как показано на рис. 12, 13. Расставим относительные индексы следующим образом:

$$\rho_{\omega_n}(D_0^n) = -1, \quad \rho_{\omega_n}(D_3^n) = 0, \quad \rho_{\omega_n}(D_1^n) = \rho_{\omega_n}(D_2^n) = 1, \quad \rho_{\omega_n}(D_4^n) = 2.$$

Набор ω_0 изображен на рис. 11 с соблюдением пропорций. При нечетных n набор ω_n схематично изображен (то есть без учета пропорций) на рис. 12, а при четных $n \geq 2$ — на рис. 13.

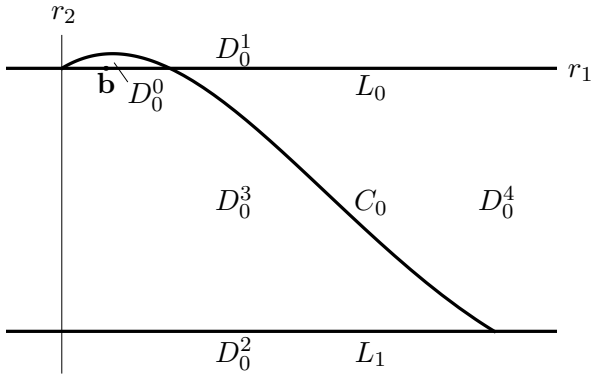


Рис. 11. Элементарный набор ω_0 уравнения (6.7); D_0^0 — область устойчивости

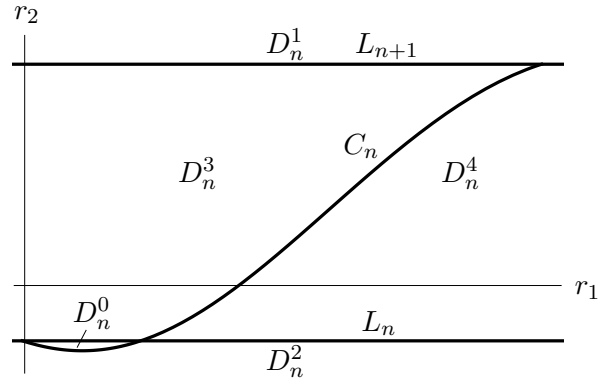


Рис. 12. Элементарный набор ω_n уравнения (6.7) при нечетных n

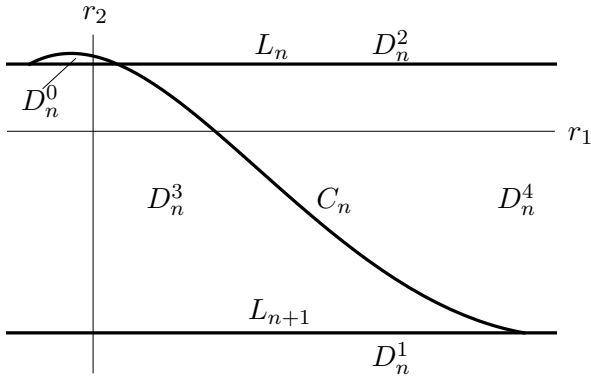


Рис. 13. Элементарный набор ω_n уравнения (6.7) при четных $n \geq 2$

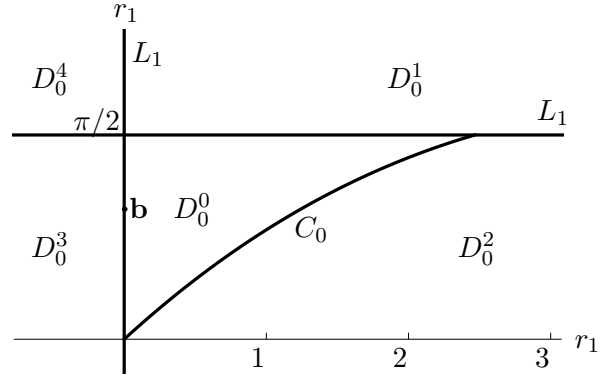


Рис. 14. Элементарный набор ω_0 уравнения (6.8); область D_0^0

Согласно теореме 5.4 существует целое число W такое, что для любой неособой точки \mathbf{a} имеем $\rho(\mathbf{a}) = W + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{a})$. Найдем W . Рассмотрим точку $\mathbf{b} = \{1, 0\}$, изображенную на рис. 11. Из теоремы 6.5 вытекает, что у уравнения $\text{sh } z/z + ze^z = 0$ нет корней с положительной вещественной частью; следовательно, уравнение $\text{sh } z + z^2 e^z = 0$ имеет единственный корень с неотрицательной вещественной частью, то есть $\rho(\mathbf{b}) = 1$. Легко видеть, что $\rho_{\omega_0}(\mathbf{b}) = 0$ и $\mathbf{b} \in D_n^0$ при любом n ; следовательно, $W = \rho(\mathbf{b}) = 1$.

Итак, для любой неособой точки \mathbf{a} имеем $\rho(\mathbf{a}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{a})$; следовательно, точки с нулевым абсолютным индексом принадлежат множеству $\bigcup_{m=0}^{\infty} D_0^m$.

Найдем абсолютный индекс областей D_0^m при $n > m$. Прямая L_m расположена между прямыми набора ω_n , а область D_0^m расположена левее любой точки кривой C_n ; следовательно, $D_0^m \subset D_n^3$. Прямая L_n не может быть расположена между прямыми набора ω_m , поэтому D_0^n является подмножеством либо D_1^n , либо D_2^n . Таким образом,

$$\rho_{\omega_n}(D_0^m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n, \\ -1, & \text{если } m = n, \\ 1, & \text{если } m > n; \end{cases} \quad (6.12)$$

следовательно, $\rho(D_0^m) = 1 + \sum_{n=0}^m \rho_{\omega_n}(D_0^m) = m$, то есть область D_0^0 (и только она) имеет нулевой абсолютный индекс. \square

Теорема 6.8. Для того чтобы все корни уравнения (6.8) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись либо два неравенства

$$0 < a < \pi^2/4, \quad \sqrt{a} \sin \sqrt{a} < b < \pi/2,$$

либо два неравенства

$$\pi^2/4 < a < \eta^2, \quad \pi/2 < b < \sqrt{a} \sin \sqrt{a},$$

где η — корень уравнения $\eta \sin \eta = \pi/2$ из интервала $(\pi/2, \pi)$.

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$z^2 e^z + a \operatorname{ch} z + bz = 0.$$

Имеем $\Delta(\varphi) = \varphi \cos \varphi$, $u_1(\varphi) = \varphi^3 \cos \varphi$, $u_2(\varphi) = \varphi^2 \sin \varphi \cos \varphi$; следовательно, $\theta_0 = \xi_0 = 0$ и $\theta_n = \xi_n = \pi(n - 1/2)$ при $n \in \mathbb{N}$, поэтому существует счетное множество кривых и прямых D -разбиения.

Далее, $\Delta'(0) = 1$ и $\Delta'(\xi_n) = \xi_n(-1)^n$ для $n \geq 1$, поэтому все прямые D -разбиения нестационарны. Прямая L_0 задается уравнением $r_1 = 0$, ее центральная точка совпадает с началом координат, а при $n \in \mathbb{N}$ прямая L_n задается уравнением $r_2 = \pi(n - 1/2)(-1)^{n+1}$, ее центральная точка имеет координаты $\{\pi^2(n - 1/2)^2, \pi(n - 1/2)(-1)^{n+1}\}$.

Имеем $\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2, \varphi \sin \varphi\}$, следовательно, все проекции кривых D -разбиения просты и не пересекаются друг с другом.

Изучим пересечение кривой C_n и прямой L_m . Очевидно, при $m = 0$ пересечений нет. Если $m > 0$, то точка пересечения удовлетворяет уравнению $S_2(\varphi) = (-1)^{m+1} \pi(m - 1/2)$ и принадлежит интервалу $(\pi(n - 1/2), \pi(n + 1/2))$. Легко видеть, что $|S_2(\varphi)| < \pi(n + 1/2)$, поэтому если $m > n$, то $C_n \cap L_m = \emptyset$.

Далее, $S_2(\pi(n + 1/2)) = \pi(n + 1/2)(-1)^n$, поэтому уравнение $S_2(\varphi) = (-1)^{m+1} \pi(m - 1/2)$ разрешимо при $n \geq m > 0$. Перепишем его в виде $\pi(m - 1/2)/\varphi = (-1)^{m+1} \sin \varphi$. Графики функций, стоящих по обе стороны от знака равенства, имеют различную выпуклость, поэтому уравнение имеет единственное решение на рассматриваемом интервале. Следовательно, при $n \geq m > 0$ кривая C_n имеет единственную точку пересечения с прямой L_m .

Согласно теореме 5.7 полный набор может быть представлен в виде счетного объединения H -наборов ω_n , каждый из которых состоит из прямых L_n, L_{n+1} и кривой C_n .

При $n \geq 1$ обозначим области набора так, как изображено на рис. 12, 13, и проиндексируем их следующим образом:

$$\rho_{\omega_n}(D_0^n) = -1, \quad \rho_{\omega_n}(D_3^n) = 0, \quad \rho_{\omega_n}(D_1^n) = \rho_{\omega_n}(D_2^n) = 1, \quad \rho_{\omega_n}(D_4^n) = 2.$$

При нечетных n набор ω_n схематично совпадает с тем, что изображен на рис. 13, а при четных $n \geq 2$ — с набором на рис. 12.

Набор ω_0 отличается от остальных наборов тем, что кривая C_0 не пересекает прямые набора, но последние пересекаются под прямым углом. Обозначим пять областей набора так, как это сделано на рис. 14, и проведем относительную индексацию областей:

$$\rho_{\omega_0}(D_0^0) = -1, \quad \rho_{\omega_0}(D_1^0) = \rho_{\omega_0}(D_3^0) = 0, \quad \rho_{\omega_0}(D_2^0) = \rho_{\omega_0}(D_4^0) = -1.$$

Согласно теореме 5.4 существует целое число W такое, что для любой неособой точки \mathbf{a} имеем $\rho(\mathbf{a}) = W + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{a})$.

Рассмотрим точку $\mathbf{b} = \{0, -1\}$, абсолютный индекс которой равен единице согласно теореме 6.3. Очевидно, $\rho_{\omega_n}(\mathbf{b}) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$, следовательно, $W = 1$. Очевидно, точки с нулевым абсолютным индексом принадлежат множеству $\bigcup_{m=0}^{\infty} D_0^m$.

Найдем абсолютный индекс областей D_0^m . Если $m < n$, то область D_0^m расположена между прямыми набора ω_n и левее любой точки кривой C_n , то есть $D_0^m \subset D_3^n$. Если $m > n > 1$, то либо $D_0^m \subset D_2^n$, либо $D_0^m \subset D_3^n$. Наконец, если $D_0^m \subset D_1^0$ при нечетных m и $D_0^m \subset D_2^0$ при четных m . Таким образом, имеем

$$\rho_{\omega_0}(D_0^m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 2, & \text{если } m \text{ четное,} \end{cases}$$

а при $n > 0$ справедлива формула (6.12). Следовательно,

$$\rho(D_0^m) = 1 + \sum_{n=0}^m \rho_{\omega_n}(D_0^m) = \max\{0, m - 1\},$$

поэтому нулевой абсолютный индекс имеют ровно две области: D_0^0 и D_0^1 (см. рис. 15). \square

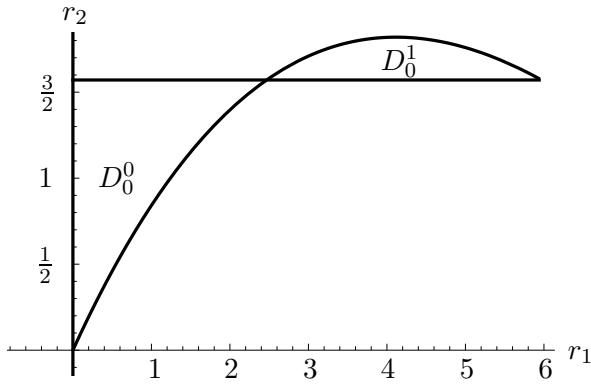


Рис. 15. Область устойчивости уравнения (6.8) состоит из двух областей: D_0^0 и D_0^1

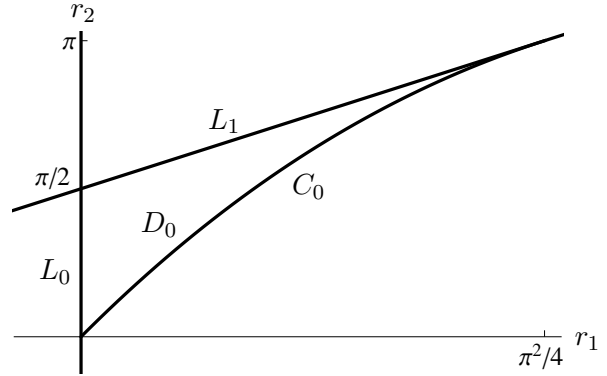


Рис. 16. Элементарный набор ω_0 уравнения (6.9); D_0 — область устойчивости

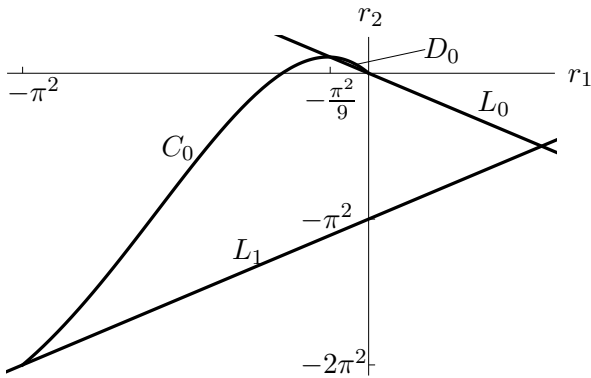


Рис. 17. Элементарный набор ω_0 уравнения (6.10); D_0 — область устойчивости

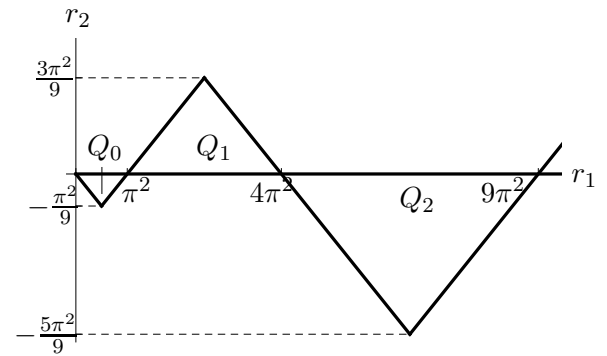


Рис. 18. Область устойчивости уравнения (6.14) — это $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$

Теорема 6.9 (см. [30]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.9) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $0 < a < \pi^2/4$ и $2\sqrt{a} \sin \sqrt{a} < b < \pi/2 + 2a/\pi$.*

Теорема 6.10 (см. [30]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.10) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\pi^2/9 < a < 0$ и $-a < b < -2a \cos \sqrt{-a}$.*

Доказательства теорем 6.9, 6.10 могут быть проведены по аналогии с доказательством теоремы 6.7: полный набор разбивается на счетное множество элементарных наборов, а нулевой абсолютный индекс имеет область первого набора с минимальным относительным индексом, и только она (см. рис. 16, 17).

§ 6.2. Примеры двухпараметрических характеристических уравнений второго рода

$$z^2 + a + be^{-z} = 0, \tag{6.13}$$

$$z^2 + a + bze^{-z} = 0, \tag{6.14}$$

$$z^2 + a + b \frac{1 - e^{-z}}{z} = 0. \quad (6.15)$$

Теорема 6.11 (см. [17]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.13) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{a, b\}$ принадлежала внутренности одного из равнобедренных треугольников*

$$Q_n = \{ \mathbf{r} : (-1)^n r_2 < 0, \pi^2 n^2 - (-1)^n r_2 < r_1 < \pi^2 (n+1)^2 + (-1)^n r_2 \},$$

где $n \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 18).

Доказательство. Имеем $\Delta(\varphi) = -\sin \varphi$ и $u_2 = 0$, поэтому (6.13) — характеристическое уравнение второго рода. Далее, $\theta_n = \pi n$; следовательно, $f_2(\pi n) = (-1)^n$ и $\operatorname{Re} f_2'(\pi n) = (-1)^{n+1}$. При любом n прямая L_n описывается уравнением $r_1 + (-1)^n r_2 = \pi^2 n^2$.

Таким образом, если выбрать $\delta = 0$, то выполняются условия леммы 4.2. Причем в силу того, что последовательность $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ стационарна, реализуется случай (ii). Следовательно, Q_n — внутренность равнобедренного треугольника, образованного отрезками прямых L_n, L_{n+1} и интервалом $(\pi^2 n^2, \pi^2 (n+1)^2)$ оси r_1 . \square

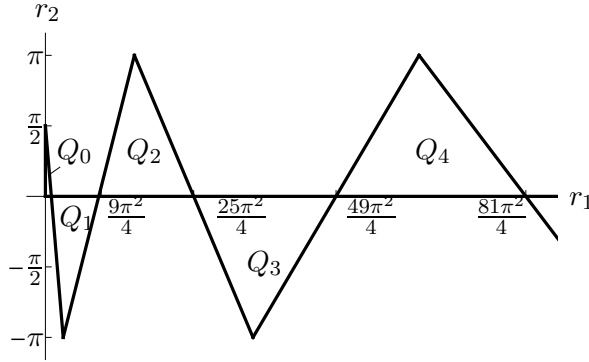


Рис. 19. Область устойчивости уравнения (6.14) — это $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$

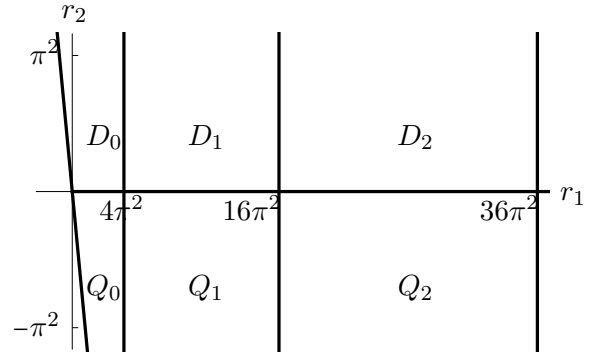


Рис. 20. Область устойчивости уравнения (6.15) — это $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$

Теорема 6.12 (см. [31, 32]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.14) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{a, b\}$ принадлежала внутренности одного из треугольников*

$$Q_n = \left\{ \mathbf{r} : (-1)^n r_2 > 0, \pi^2 \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{r_2 \pi}{(-1)^n} \left(n - \frac{1}{2} \right) < r_1 < \pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{r_2 \pi}{(-1)^n} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

где $n \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 19).

Доказательство. Имеем $\Delta(\varphi) = \varphi \cos \varphi$, $\theta_0 = 0$, а при $n \in \mathbb{N}$ имеем $\theta_n = \pi(n - 1/2)$; следовательно, $f_2(\theta_n) = \pi(n - 1/2)(-1)^{n+1}$ и $\operatorname{Re} f_2'(\theta_n) = \pi(n - 1/2)(-1)^n$. Таким образом, если выбрать $\delta = 0$, то выполняются условия леммы 4.2.

Прямая L_0 совпадает с осью r_2 , а при $n > 1$ прямая L_n описывается уравнением

$$r_1 = \pi^2 (n - 1/2)^2 + r_2 (-1)^n \pi (n - 1/2).$$

Последовательность $\{|f_2(i\theta_n)|\}$ возрастает, а последовательность $\{|f_2(i\theta_n)/\theta_n^2|\}$ убывает, начиная с $n = 1$, поэтому реализуется случай (iv), то есть Q_n — внутренность треугольника, образованного отрезками прямых L_n, L_{n+1} и интервалом $(\pi^2 (n - 1/2)^2, \pi^2 (n + 1/2)^2)$ оси r_1 . \square

Теорема 6.13 (см. [33]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.15) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $-a < b < 0$ и $a \neq 4\pi^2 n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Имеем $\Delta(\varphi) = -\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}$, поэтому $\theta_n = 2\pi n$. Однако $f_2(0) = 1$, и прямая, соответствующая нулевой частоте, нерегулярна, а при $n \geq 1$ имеем $f_2(2\pi n) = 0$, поэтому условия леммы 4.2 не выполняются. Тем не менее применим общий подход, изложенный в § 4.2.

Прямая L_0 задается уравнением $r_1 + r_2 = 0$. Полу плоскость, расположенная левее этой прямой, не содержит точек с нулевым абсолютным индексом (лемма 2.3).

При $n \geq 1$ прямая L_n задается уравнением $r_1 = 4\pi^2 n^2$, причем эта прямая нестационарная.

Итак, в полу плоскости $r_1 + r_2 > 0$ имеется две группы областей: области $D_0, D_1, D_2 \dots$ расположены выше оси r_1 , а области $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ — ниже (см. рис. 20). Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, 0\}$, где $a_1 > 0$, тогда $\rho(\mathbf{a}) = 2$.

Так как $\Delta(\varphi) < 0$ при $\varphi \neq \theta_n$, то по теореме 3.1 вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{a})$ направлен вверх, следовательно, $\rho(D_n) = 2$ и $\rho(Q_n) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$. \square

§ 6.3. Примеры двухпараметрических характеристических уравнений третьего рода

$$z + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + be^{-z} = 0, \quad (6.16)$$

$$z^2 + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + be^{-z} = 0, \quad (6.17)$$

$$z + a \frac{1 - e^{-2z}}{2z} + be^{-z} = 0. \quad (6.18)$$

Теорема 6.14 (см. [34]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.16) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $a + b > 0$ и $-3\pi/2 < b < \pi/2$.*

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$ze^z + a \operatorname{ch} z + b = 0.$$

Имеем $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $u_1(\varphi) = \varphi \cos \varphi$ и $u_2(\varphi) = -\varphi \cos^2 \varphi$, следовательно, (6.16) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода. Далее, $\theta_0 = 0$; следовательно, прямая L_0 задается уравнением $r_1 + r_2 = 0$, а при $n \in \mathbb{N}$ имеем $\theta_n = \pi(n - 1/2)$, поэтому прямая L_n задается уравнением $r_2 = \pi(n - 1/2)(-1)^{n+1}$.

Далее,

$$\mathbf{u}' = \{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi, -\cos^2 \varphi + 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi\}.$$

Так как $\mathbf{u}'(0) = \{1, 0\}$, из (4.13) вытекает $\mathcal{H}_0 = \{\mathbf{r} : r_1 + r_2 > 0\}$.

Далее, при $n \geq 1$ имеем $\mathbf{u}'(\pi(n - 1/2)) = \{\pi(n - 1/2)(-1)^n\}$; следовательно, $\mathcal{H}_n = \{\mathbf{r} : r_2 < \pi(n - 1/2)\}$ при нечетных n и $\mathcal{H}_n = \{\mathbf{r} : r_2 > -\pi(n - 1/2)\}$ при четных n .

Итак, область $D_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ не пуста (см. рис. 21). Согласно следствию 4.1 область устойчивости либо пуста, либо совпадает с D_0 . Абсолютный индекс начала координат равен единице, а вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_0$ направлен извне области D_0 (по определению \mathcal{H}_0), следовательно, $\rho(D_0) = 0$. \square

Теорема 6.15. *Уравнение (6.17) имеет хотя бы один корень с неотрицательной вещественной частью при любых значениях a и b .*

Доказательство. Положим $p_1 = \chi$, $p_2 = \beta$. Имеем $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $u_1(\varphi) = -\varphi^2 \sin \varphi$, $u_2(\varphi) = \varphi \sin \varphi \cos \varphi$, $\theta_n = \pi n$ при $n \in \mathbb{N}_0$; следовательно, множество прямых L_n счетно. Прямая L_n задается уравнением $r_1 + (-1)^n r_2 = \pi^2 n^2$. Нетрудно установить, что $F'(0, \mathbf{r}) = 0$, то есть нулевой частоте соответствует нерегулярная прямая. Заметим, что $\mathbf{u}'(\pi n) = \{\pi^2 n^2 (-1)^{n+1}, \pi n\}$, поэтому остальные прямые нестационарны.

Неравенство (4.12) принимает вид $F(i\pi n, 0, 0) f_1(-i\pi n) u_2'(\pi n) = -\pi^3 n^3 < 0$, поэтому начало координат принадлежит полу плоскости \mathcal{H}_n при $n \geq 1$. Ось r_2 не содержит точек с нулевым абсолютным индексом (теорема 6.4), следовательно, согласно пункту (2) следствия 4.3 область устойчивости пуста. \square

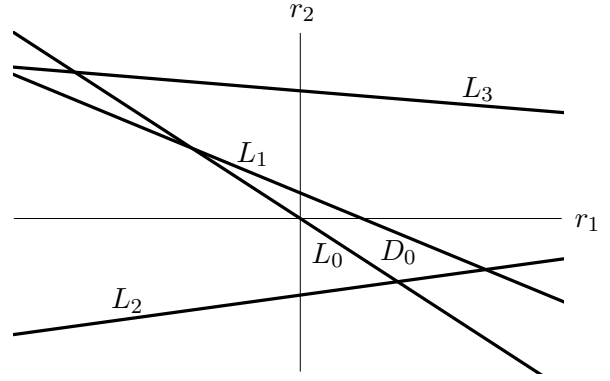
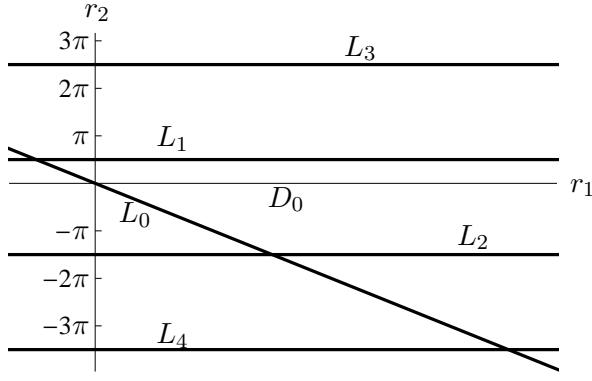


Рис. 21. Линии D-разбиения уравнения (6.16); **Рис. 22.** Линии D-разбиения уравнения (6.18); D_0 — область устойчивости

Теорема 6.16 (см. [35]). *Для того чтобы все корни уравнения (6.18) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$a + b > 0 \quad \text{и} \quad -\frac{3\pi}{2} + \frac{2a}{3\pi} < b < \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}.$$

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$ze^z + a\frac{\text{sh} z}{z} + b = 0,$$

тогда $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $u_1(\varphi) = \varphi \cos \varphi$ и $u_2(\varphi) = -\sin \varphi \cos \varphi$, следовательно, $\theta_0 = 0$, а при $n \geq 1$ имеем $\theta_n = \pi(n - 1/2)$, $f_1(i\theta_n) = (-1)^{n+1}/\theta_n$ и $f_0(i\theta_n) = (-1)^n \theta_n$, поэтому прямая L_0 задается уравнением $r_1 + r_2 = 0$, а при $n \geq 1$ прямая L_n задается уравнением

$$(-1)^n r_2 = -\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) + r_1 \left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^{-1}.$$

Рассмотрим точку $\mathbf{a} = \{1, 0\}$. Для $n = 0$ неравенство (4.13) имеет вид

$$F(0, 1, 0)f_2(0)u_1'(0) = 1 > 0.$$

Если $n \geq 1$, то неравенство (4.13) принимает вид

$$F(i\theta_n, 1, 0)f_2(-i\theta_n)u_1'(i\theta_n) = (\theta_n - 1/\theta_n)\theta_n > 0,$$

следовательно, $\mathbf{a} \in \mathcal{H}_n$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$.

Из теоремы 6.5 вытекает, что $\rho(\mathbf{a}) = 0$. Согласно следствию 4.1 область устойчивости — выпуклый связный многоугольник D_0 , удовлетворяющий счетному набору неравенств $r_1 + r_2 > 0$ и $r_1 < \theta_n^2 + \theta_n(-1)^n r_2$, где $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что для описания D_0 достаточно взять только первые три неравенства (иными словами, D_0 — это треугольник, изображенный на рис. 22, образованный пересечением прямых L_0, L_1 и L_2).

Для любых различных $n, m \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $\mathbf{p}^{n,m}$ точку пересечения прямых L_n и L_m . При $n \geq 1$ имеем $p_1^{0,n} = -p_2^{0,n} = (-1)^n \theta_n^2 / (\theta_n + (-1)^n)$.

Если среди чисел n и m нет нуля, то $p_1^{n,m} = \pi^2(n - 1/2)(m - 1/2)(-1)^{n+m-1}$,

$$p_2^{n,m} = \begin{cases} \pi(-1)^{n+1}(n + m - 1), & n = m \pmod{2}, \\ \pi(-1)^n(m - n), & n \neq m \pmod{2}. \end{cases}$$

Требуется доказать, что для любого $k \geq 3$ прямая L_k не пересекает треугольник $\mathbf{p}^{0,1}\mathbf{p}^{0,2}\mathbf{p}^{1,2}$. Это эквивалентно тому, что все вершины треугольника расположены по одну сторону от прямой L_k . Последнее вытекает из того, что справедливы неравенства

$$\begin{cases} \theta_k^2 + \theta_k(-1)^k p_2^{0,1} > p_1^{0,1}, \\ \theta_k^2 + \theta_k(-1)^k p_2^{0,2} > p_1^{0,2}, \\ \theta_k^2 + \theta_k(-1)^k p_2^{1,2} > p_1^{1,2}. \end{cases} \quad (6.19)$$

Докажем (6.19). Очевидно, величины $|p_2^{0,1}|$, $|p_2^{0,2}|$, $|p_2^{1,2}|$ меньше, чем $3\pi/2$. В силу $\theta_k \geq 5\pi/2$ выражения, стоящие слева в неравенствах (6.19), больше, чем $5\pi^2/2$. Величины $|p_1^{0,1}|$, $|p_1^{0,2}|$, $|p_1^{1,2}|$ меньше, чем $3\pi^2/4$. Неравенства (6.19) доказаны. \square

Список литературы

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 351 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Н.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.
4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
7. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1997. №6. С. 3–16.
8. Зубов В.И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1958. №6. С. 86–95.
9. Постников М.М. Устойчивые многочлены. М.: Едиториал УРСС, 2004. 176 с.
10. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1942. Т. 6. Вып. 3. С. 115–134.
11. Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Т. 26. С. 3–331.
12. Михайлов А.В. Метод гармонического анализа в теории регулирования // Автомат. и телемех. 1938. Вып. 3. С. 27–81.
13. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // Автомат. и телемех. 1948. Т. 9. №3. С. 190–203.
14. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.
15. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
16. Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи) / ред. и коммент. А.А. Андропова и И.Н. Вознесенского. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 430 с.
17. Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автомат. и телемех. 1946. Т. 7. Вып. 2–3. С. 95–106.
18. Левицкая И.С. Область устойчивости линейного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями // Изв. Челябинского научного центра, 2004. Т. 23. №2. С. 7–12.
19. Kipnis M.M., Levitskaya I.S. Stability of delay difference and differential equations: similarities and distinctions // Proc. Internat. Conf. Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials, Munich, Germany, 2005. New Jersey: World Scientific, 2007. P. 315–324.
20. Mahaffy J.M., Busken T.C. Regions of stability for a linear differential equation with two rationally dependent delays // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2015. Vol. 35. Issue 10. P. 4955–4986. DOI: 10.3934/dcds.2015.35.4955
21. Мулюков М.В. Классификация двухпараметрических автономных линейных систем с запаздыванием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 74–76.
22. Мулюков М.В. Структура областей D -разбиения для двухпараметрических характеристических уравнений систем с запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева. ПНИПУ, Пермь, 2018. С. 180–200.
23. Мулюков М.В. Области D -разбиения с прямолинейными границами // Математика в современном мире: тезисы докладов международной конференции. ИМ СО РАН, Новосибирск, 2017. С. 233.
24. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
25. Маркушевич А.И. Целые функции. Элементарный очерк. М.: Наука, 1975. 120 с.
26. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функция одного переменного: учебник для университетов. 3-е изд. М.: Наука, 1985. 336 с.

27. Stepan G. Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. Longman Scientific & Technical, 1989. 151 p.
28. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.
29. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2007. №6. С. 55–63.
30. Мулюков М.В. Об асимптотической устойчивости двухпараметрических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2014. №6. С. 48–55.
31. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability criteria for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. 1966. Vol. 33. Issue 1. P. 113–118. DOI: 10.1115/1.3624967
32. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. 1966. Vol. 33. Issue 1. P. 119–124. DOI: 10.1115/1.3624968
33. Баландин А.С., Сабатулина Т.Л. Локальная устойчивость одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 610–624. <http://mi.mathnet.ru/rus/semr/v12/p610>
34. Мулюков М.В. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с двукратным запаздыванием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов VIII международной конференции. Издательство «Научная книга», Воронеж, 2015. С. 258–260.
35. Мулюков М.В. Устойчивость одного линейного автономного дифференциального уравнения с сосредоточенным и распределенным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1325–1331.

Поступила в редакцию 15.05.2018

Мулюков Михаил Вадимович, к. ф.-м. н., инженер-исследователь научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29.
E-mail: Mulyukoff@gmail.com

M. V. Mulyukov

Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 51, pp. 79–122 (in Russian).

Keywords: delay differential equations, systems of differential equations, autonomous equations, asymptotic stability, D-subdivision method, stability domain.

MSC2010: 34D20, 34K06, 34K20, 93D20

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-04

We consider a system of linear autonomous differential equations with bounded delay in the case where its characteristic function depends linearly on two scalar parameters. The development of the D-subdivision method is carried out in connection with the problem of constructing the stability domain of this system. Firstly, a complete classification of the points and lines of D-subdivision is carried out. Secondly, a complete classification of two-parameter characteristic equations by the type and structure of D-subdivision domains is carried out. All equations are divided into four types: D-subdivision domains of equations of the first type have curvilinear boundaries, D-subdivision domains of equations of the second and the third type have only rectilinear boundaries, equations of the fourth type are stable or unstable regardless of parameter values. Thirdly, for each type of equations, new methods of selecting the stability domain among regions of D-subdivision are developed. On the basis of the results obtained, stability domains are constructed for certain differential equations and systems of equations with concentrated and distributed delay.

REFERENCES

1. Myshkis A.D. *Lineinye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* (Linear differential equations with delayed argument), Moscow: Nauka, 1972, 351 p.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina N.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of functional-differential equations), Moscow: Nauka, 1991, 280 p.
3. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoichivost' reshenii uravnenii s obyknovennymi proizvodnymi* (Stability of solutions of the equations with ordinary derivatives), Perm: Perm University, 2001, 230 p.
4. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Ustoichivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledeystviem* (Stability and periodic regimes of controlled systems with aftereffect), Moscow: Nauka, 1981, 448 p.

5. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otklonyayushchimsya argumentom* (Introduction to the theory of differential equations with deviating argument), Moscow: Nauka, 1971, 296 p.
6. Hale J.K. *Theory of functional-differential equations*, New York: Springer-Verlag, 1977, 365 p. Translated under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Mir, 1984, 424 p.
7. Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of equations with delay, *Russ. Math.*, 1997, vol. 41, no. 6, pp. 3–16.
8. Zubov V.I. On the theory of linear stationary systems with lagging arguments, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1958, no. 6, pp. 86–95 (in Russian).
9. Postnikov M.M. *Ustoichivye mnogochleny* (Stable Polynomials), Moscow: Editorial URSS, 2004, 176 p.
10. Pontryagin L.S. On zeros of some transcendental functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1942, vol. 6, issue 3, pp. 115–134 (in Russian).
11. Chebotarev N.G., Meiman N.N. The Routh–Hurwitz problem for polynomials and entire functions, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1949, vol. 26, pp. 3–331 (in Russian).
12. Mikhailov A.V. The methods of harmonic analysis in the theory of control, *Avtomat. i Telemekh.*, 1938, issue 3, pp. 27–81 (in Russian).
13. Neimark Yu.I. On the determination of the values of the parameters for which a system of automatic regulation is stable, *Avtomat. i Telemekh.*, 1948, vol. 9, issue 3, pp. 190–203 (in Russian).
14. Neimark Yu.I. *Ustoichivost' linearizovannykh sistem (diskretnykh i raspredelennykh)* (Stability of linearized dystems (discrete and distributed)), Leningrad: Leningrad Red Banner Air Force Engineering Academy, 1949, 140 p.
15. Neimark Yu.I. *Dinamicheskie sistemy i upravlyaemye protsessy* (Dynamical systems and controlled processes), Moscow: Nauka, 1978, 336 p.
16. Maxwell J.C., Vyshnegradskii I.A., Stodola A. *Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya (Linearizovannye zadachi)* (Theory of automatic control (Linearized problems)), Moscow: The Academy of Sciences of the USSR, 1949, 430 p.
17. Andronov A.A., Maier A.G. Simplest linear systems with retardation, *Avtomat. i Telemekh.*, 1946, vol. 7, issue 2–3, pp. 95–106 (in Russian).
18. Levitskaya I.S. The stability region of a linear differential equation with two delays, *Izvestiya Chelyabinskogo Nauchnogo Tsentra*, 2004, vol. 23, no. 2, pp. 7–12 (in Russian).
19. Kipnis M.M., Levitskaya I.S. Stability of delay difference and differential equations: similarities and distinctions // *Proc. Internat. Conf. Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Munich, Germany, 2005. New Jersey: World Scientific, 2007. P. 315–324.
20. Mahaffy J.M., Busken T.C. Regions of stability for a linear differential equation with two rationally dependent delays, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, vol. 35, no. 10, pp. 4955–4986. DOI: 10.3934/dcds.2015.35.4955
21. Mulyukov M.V. Classification of two-parameter autonomous linear systems with delay, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 724–727. DOI: 10.1007/s10958-018-3777-1
22. Mulyukov M.V. Structure of the D -subdivision domains for the two-parameter characteristic equations of systems with delay, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya: materialy konferentsii, posvyashchennoi 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N.V. Azbeleva* (Functional-differential equations: theory and applications: proc. of the conference dedicated to the 95th anniversary of the professor N.V. Azbelev), Perm National Research Polytechnic University, Perm, 2018, pp. 180–200 (in Russian).
23. Mulyukov M.V. D -subdivision domains with straight bounds, *Matematika v sovremennom mire: tezisy dokladov mezhdunarodnoi konferentsii* (Mathematics in the modern world: abstracts of the all-Russian conference), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2017, p. 233 (in Russian).
24. Lankaster P. *The theory of matrices*, New York: Academic Press, 1969, 316 p. Translated under the title *Teoriya matrits*, Moscow: Naura, 1978, 280 p.
25. Markushevich A.I. *Tselye funktsii. Elementarnyi ocherk* (Entire functions. Elementary essay), Moscow: Nauka, 1975, 120 p.
26. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' 1. Funktsiya odnogo peremennogo: Uchebnik dlya universitetov* (Introduction to complex analysis. Part 1. Function of one variable: Textbook for universities), Moscow: Nauka, 1985, 336 p.
27. Stepan G. *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Longman Scientific & Technical, 1989, 151 p.
28. Trenogin V.A. *Funktsional'nyi analiz* (Functional analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007, 488 p.
29. Sabatullina T.L., Malygina V.V. Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay, *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 52–60. DOI: 10.3103/S1066369X07060072
30. Mulyukov M.V. Asymptotic stability of two-parameter systems of delay differential equations, *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 6, pp. 44–50. DOI: 10.3103/S1066369X1406005X

31. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability criteria for second-order dynamical systems with time lag, *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, issue 1, pp. 113–118. DOI: 10.1115/1.3624967
32. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag, *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, issue 1, pp. 119–124. DOI: 10.1115/1.3624968
33. Balandin A.S., Sabatulina T.L. The local stability of a population dynamics model in conditions of deleterious effects, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 610–624 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/semr/v12/p610>
34. Mulyukov M.V. Stability of a linear differential equation with a double delay, *Sovremennye metody prikladnoi matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologii: sbornik trudov VIII mezhdunarodnoi konferentsii* (Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technologies: proc. of the VIII international conference), Izdatel'stvo "Nauchnaya kniga", Voronezh, 2015, pp. 258–260 (in Russian).
35. Mulyukov M.V. The stability of the linear autonomous differential equation with distributed and concentrated delay, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 1325–1331 (in Russian).

Received 15.05.2018

Mulyukov Mikhail Vadimovich, Candidate of Physics and Mathematics, Engineer Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», Perm National Research Polytechnic University, Komsomol'skii pr., 29, Perm, 614990,
E-mail: Mulykoff@gmail.com