УДК 517.863

© **Н. Н. Петров, Н. В. Петрова**

К ЗАДАЧЕ О ДИВЕРСИФИКАЦИИ РУБЛЯ

Рассматривается задача распределения некоторой суммы в рублях на рублевый и заданное число валютных депозитов с целью получения максимального дохода в рублях в конце срока хранения. Предполагается, что лицо, принимающее решение, не знает курсов валют в конце срока хранения и ориентируется только на некоторые границы их возможных изменений. Решение данной задачи зависит от выбора принципа оптимальности. В работе найдены гарантированное по исходам решение, игровое решение по Нэшу. Показано, что задача о нахождении гарантированного по рискам решения является задачей линейного программирования. Для некоторых частных случаев аналитически найдено гарантированное по рискам решение.

Ключевые слова: неопределенность, риск, исход, максимин, равновесие по Нэшу, диверсификация вкладов.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-05

Введение

Принятие решений — вид человеческой деятельности, направленный на выбор способа достижения поставленной цели. При этом довольно часто решение необходимо принимать в условиях неопределенности, то есть при недостатке информации. Для решения данного класса задач предложено достаточно большое число подходов: критерий Вальда, критерий Гурвица, критерий Сэвиджа и многие другие.

В работе (см. [1, с. 117]) рассмотрена задача о распределении единичного вклада в рублях по двум депозитам (рублевому и валютному) с целью получения в конце срока хранения максимальной суммы в рублях. Особенностью данной задачи является наличие неопределенности — отсутствие информации о курсе валюты в конце срока хранения. В качестве принципов оптимальности рассматривались принцип гарантированного по исходам решения и критерий Сэвиджа. В работах [2–4] рассматривались другие подходы к решению задачи о диверсификации рубля по двум вкладам. Работы [5, 6] посвящены решению задачи о диверсификации рубля по трем вкладам.

В данной работе рассматривается задача о диверсификации рубля по рублевому и заданному числу валютных вкладов. В качестве принципов оптимальности используются принцип гарантированного по исходам решения, принцип Сэвиджа и игровое решение по Нэшу.

§ 1. Постановка задачи

Лицо, принимающее решение (ЛПР), имея свободные денежные средства в рублях (принимаем весь объем денежных средств за единицу), хочет распределить их по $n+1$ депозиту (рублевому и n валютных) так, чтобы в конце одного срока хранения общая сумма денежных средств в рублях была «наибольшей».

Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$ — номера валют, d_i — процентная ставка по i-й валюте, K_i — курс i-й валюты в рублях в начале срока хранения, y_i — курс i-й валюты в рублях в конце срока хранения, r — процентная ставка по рублевому вкладу, x_i — доля денежных средств в рублях, которую ЛПР планирует положить на депозит в i-й валюте.

Тогда в конце срока хранения ЛПР будет иметь сумму, равную

$$H(x,y) = (1+r)(1-x_1-\ldots-x_n) + \frac{x_1(1+d_1)y_1}{K_1} + \ldots + \frac{x_n(1+d_n)y_n}{K_n},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Для вкладчика требуется определить доли $x_1, \ldots, x_n$, при которых итоговая сумма $H(x,y)$ будет возможно большой. При этом следует учитывать, что курсы валют $y_1, \ldots, y_n$ в конце срока хранения ЛПР неизвестны. Будем предполагать, что ЛПР может принимать решение на основании знания пределов изменения величин y_i, то есть считаем, что заданы числа A_i, B_i такие, что $y_i \in [A_i, B_i]$.

Представим функцию H в виде

$$H(x,y) = (1+r)\big[(1 - x_1 - \ldots - x_n) + \frac{x_1(1+d_1)y_1}{(1+r)K_1} + \ldots + \frac{x_n(1+d_n)y_n}{(1+r)K_n}\big].$$

Обозначим

$$u_i = \frac{(1+d_i)y_i}{(1+r)K_i}, \quad a_i = \frac{(1+d_i)A_i}{(1+r)K_i}, \quad b_i = \frac{(1+d_i)B_i}{(1+r)K_i},$$
$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant 0, x_1 + \ldots x_n = 1\}, \quad U = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \mid u_i \in [a_i, b_i]\}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x,u) = (1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_1u_1 + \ldots + x_nu_n.$$

Получили, что целью ЛПР является выбор такого набора $x \in \Omega$, для которого величина $f(x,u)$ принимает «наибольшее» значение, при этом о величинах $u_1, \ldots, u_n$ известно только, что $u_i \in [a_i, b_i]$.

§ 2. Гарантированное по исходам решение

О п р е д е л е н и е 2.1. Вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \Omega$ называется *гарантированным по исходам решением,* если

$$\min_{u \in U} f(x^*, u) = \max_{x \in \Omega} \min_{u \in U} f(x,u).$$

З а м е ч а н и е 1. Гарантированное по исходам решение x^* имеет следующий смысл. Пусть ЛПР выбрал вариант $x \in \Omega$. Тогда в самой неблагоприятной для него ситуации в конце срока хранения его сумма будет равна $g(x) = \min\limits_{u \in U} f(x,u)$. Поэтому ЛПР может выбрать такой вектор x^*, при котором функция g достигает максимума на множестве Ω. Следовательно, $\min\limits_{u \in U} f(x^*, u)$ — та максимальная сумма, которую может получить ЛПР независимо от сложившейся ситуации.

В силу постановки задачи считаем, что все $a_i \geqslant 0$. Пусть $a_l = \max\limits_i a_i$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $a_l \leqslant 1$. Тогда гарантированное по исходам решение x^* имеет вид $x_i^* = 0$ для всех $i \in I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_i \geqslant 0$ для всех $i \in I$, то

$$g(x) = \min_{u \in U} f(x,u) = (1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_1a_1 + \ldots + x_na_n = 1 + \sum_{j=1}^{n}(a_j - 1)x_j.$$

Из условия $a_l \leqslant 1$ следует, что $a_i - 1 \leqslant 0$ для всех $i \in I$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j - 1)x_j \leqslant 0$ для всех $x \in \Omega$. Отсюда $g(x) \leqslant 1 = g(0)$ для всех $x \in \Omega$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 2.1 следует, что если $a_i \leqslant 1$ для всех $i \in I$, то ЛПР рекомендуется все средства положить на рублевый депозит.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $a_l > 1$, $I^* = \{j \mid a_j = a_l\}$. Тогда гарантированное по исходам решение x^* имеет вид $x_j^* = 0$, если $j \notin I^*$, и $\sum\limits_{j \in I^*} x_j^* = 1$. В частности, если $I^* = \{l\}$, то $x_l^* = 1$ и $x_j^* = 0$ для всех $j \neq l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что для всех $x \in \Omega$ имеет место

$$g(x) = \min_{u \in U} f(x,u) = 1 + \sum_{j=1}^{n}(a_j - 1)x_j \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n}(a_l - 1)x_j = 1 + (a_l - 1)\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 + a_l - 1 = a_l.$$

Обозначим
$$\Omega^* = \{x \in \Omega \mid x_j = 0, j \notin I^*, \sum_{j \in I^*} x_j = 1\}.$$
Пусть $x^* \in \Omega^*$. Тогда
$$g(x^*) = 1 + \sum_{j \in I^*} (a_j - 1)x_j^* = 1 + \sum_{j \in I^*} (a_l - 1)x_j^* = a_l \geqslant g(x)$$
для всех $x \in \Omega$. Следовательно, x^* — гарантированное по исходам решение. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 3. Из результатов предыдущей теоремы следует, что если $a_l > 1$, то ЛПР рекомендуется все средства (в произвольной пропорции) вложить на те валютные депозиты номера которых входят в I^*.

§ 3. Гарантированное по рискам решение

Введем функцию $F\colon \Omega \times U \to R^1$ вида
$$F(x,u) = \max_{z \in \Omega} f(z,u) - f(x,u).$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Вектор $x^* \in \Omega$ называется *гарантированным по рискам решением (решением по Сэвиджу),* если
$$\min_{x \in \Omega} \max_{u \in U} F(x,u) = \max_{u \in U} F(x^*,u).$$

Л е м м а 3.1. *Пусть $u_i \geqslant 0$ для всех $i \in I$. Тогда*
$$\max_{z \in \Omega} f(z,u) = \max\{1, u_1, \ldots, u_n\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u_i \leqslant 1$ для всех $i \in I$, то
$$z_1u_1 + \ldots z_nu_u \leqslant z_1 + \ldots + z_n.$$
Поэтому $f(z,u) \leqslant 1$ для всех $z \in \Omega$, причем $f(0,u) = 1$.

Пусть $u_l = \max\limits_i u_i > 1$. Тогда
$$z_1u_1 + \ldots z_nu_u \leqslant u_l(z_1 + \ldots + z_n),$$
и поэтому для любого $z \in \Omega$
$$f(z,u) \leqslant 1 - z_1 - \ldots - z_n + u_l(z_1 + \ldots + z_n) = 1 + (u_l - 1)(z_1 + \ldots + z_n) \leqslant 1 + u_l - 1 = u_l.$$
Кроме того, $f(z^*,u) = u_l$, где $z^* \in \Omega$ такой, что $z_j^* = 0$ для всех $j \neq l$ и $z_l^* = 1$. Лемма доказана. □

Из доказанной леммы следует, что
$$F(x,u) = \max\{1, u_1, \ldots, u_n\} - f(x,u). \tag{3.1}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $b_i \leqslant 1$ для всех $i \in I$. Тогда гарантированное по рискам решение x^* имеет вид $x_i^* = 0$ для всех $i \in I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $\max\{1, u_1, \ldots, u_n\} = 1$ для всех $u \in U$. Поэтому из (3.1) получаем, что функция $F(x,u)$ представима в виде
$$F(x,u) = x_1 + \ldots + x_n - x_1u_1 - \ldots - x_nu_n.$$
Тогда
$$g(x) = \max_{u \in U} F(x,u) = x_1 + \ldots + x_n - x_1a_1 - \ldots - x_na_n = \sum_{i=1}^n x_i(1 - a_i).$$
Так как $a_i \leqslant b_i \leqslant 1$ для всех $i \in I$, то $g(x) \geqslant 0 = g(0)$ для всех $x \in \Omega$. Следовательно, гарантированное по рискам решение x^* имеет вид $x_i^* = 0$ для всех $i \in I$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 4. Из результатов теоремы 3.1 следует, что ЛПР рекомендуется все денежные средства вложить на рублевый счет.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть существует $l \in I$ такой, что $b_j \leqslant a_l$ для всех $j \neq l$ и $b_l > 1$. Тогда гарантированное по рискам решение x^* имеет вид*

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq l, \\ 1, & \text{если } j = l \text{ и } a_l \geqslant 1, \end{cases} \qquad x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq l, \\ x_l^*, & \text{если } j = l \text{ и } a_l < 1, \end{cases}$$

где $x_l^* = \frac{b_l - 1}{b_l - a_l}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что для всех $u \in U$

$$\max\{1, u_1, \ldots, u_n\} = \max\{1, u_l\}.$$

Если $a_l \geqslant 1$, то

$$F(x,u) = u_l - f(x,u) = -(1 - x_1 - \ldots - x_n) - \sum_{j \neq l} x_j u_j + u_l(1 - x_l).$$

Поэтому

$$\max_{u \in U} F(x,u) = -(1 - x_1 - \ldots - x_n) - \sum_{j \neq l} x_j a_j + b_l(1 - x_l) = -1 + \sum_{j \neq l} x_j(1 - a_j) + b_l + x_l(1 - b_l).$$

Так как $1 - a_j \geqslant 0$ для всех $j \neq l$ и $1 - b_l < 0$, то $\max_{u \in U} F(x,u) \geqslant -1 + b_l + 1 - b_l = 0$ для всех $x \in \Omega$. Если $x^* \in \Omega$ такой, что $x_j^* = 0$ для всех $j \neq l$ и $x_l^* = 1$, то $\max_{u \in U} F(x^*, u) = 0$. Следовательно, x^* — гарантированное по рискам решение.

Пусть $a_l < 1$. Обозначим $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $x_l^* = \frac{b_l - 1}{b_l - a_l}$. Тогда

$$F(x,u) = \max\{1, u_l\} - f(x,u) = \begin{cases} 1 - f(x,u), & \text{если } u_l \in [a_l, 1], \\ u_l - f(x,u), & \text{если } u_l \in [1, b_l]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g(x) = \max_{u \in U} F(x,u) &= \max\{1 - f(x,a), -f(x,a) + x_l a_l + b_l(1 - x_l)\} = \\ &= \begin{cases} -f(x,a) + x_l a_l + b_l(1 - x_l), & \text{если } x \in \Omega, x_l \in [0, x_l^*], \\ 1 - f(x,a), & \text{если } x \in \Omega, x_l \in [x_l^*, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее имеем

$$1 - f(x,a) = x_1(1 - a_1) + \ldots + x_n(1 - a_n) \geqslant (1 - a_l)x_l^*$$

для всех $x \in \Omega, x_l \geqslant x_l^*$. Аналогично: для всех $x \in \Omega, x_l \leqslant x_l^*$

$$\begin{aligned} -f(x,a) + x_l a_l + b_l(1 - x_l) &= -1 + \sum_{j \neq l} x_j(1 - a_j) + x_l(1 - a_l) + x_l a_l + b_l(1 - x_l) \geqslant \\ &\geqslant -1 + x_l + b_l(1 - x_l) = (1 - x_l)(b_l - 1) \geqslant (1 - x_l^*)(b_l - 1) = x_l^*(1 - a_l). \end{aligned}$$

Следовательно, $g(x) \geqslant x_l^*(1 - a_l)$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $z^* \in \Omega$ такой, что $z_j^* = 0$ для всех $j \neq l$ и $z_l^* = x_l^*$. Тогда $g(z^*) = x_l^*(1 - a_l)$. Значит, z^* — гарантированное по рискам решение. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 5. Из результатов теоремы 3.2 следует, что если $a_l < 1$, то ЛПР целесообразно распределить все денежные средства между рублевым и валютным с номером l депозитами в пропорции $(1 - x_l^*, x_l^*)$.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть $a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} < b_{n-1} \leqslant a_n < b_n$, $a_{n-1} < 1$, $b_n > 1$. Тогда гарантированное по рискам решение x^* имеет вид*

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq n, \\ 1, & \text{если } j = n \text{ и } a_n \geqslant 1, \end{cases} \qquad x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq n, \\ x_n^*, & \text{если } j = n \text{ и } a_n < 1, \end{cases}$$

где $x_n^* = \frac{b_n - 1}{b_n - a_n}$.

Справедливость следствия следует из теоремы 3.1.

Т е о р е м а 3.3 (см. [7, с. 40]). x_0 — *крайняя точка множества*

$$A = \{x \in R^n \mid (p_i, x) \leqslant \alpha_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

тогда и только тогда, когда множество $I(x_0) = \{j \mid (p_j, x_0) = \alpha_j\}$ *содержит подмножество* I_0 *мощности* n *и векторы* $\{p_j, j \in I_0\}$ *линейно независимы.*

Введем следующие обозначения. exA — множество крайних точек множества A,

$$x^*_{n-1} = \frac{b_{n-1} - b_n}{b_{n-1} - a_{n-1}}, x^*_n = \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n - a_n}, \overline{x}_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - a_{n-1} + b_n - a_n}, \overline{x}_n = \frac{b_n - a_{n-1}}{b_{n-1} - a_{n-1} + b_n - a_n}.$$

Л е м м а 3.2. *Пусть* $a_{n-1} < a_n < b_{n-1} < b_n$,

$$A = \{x \in R^n \mid x_n(b_n - a_n) - x_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) \geqslant b_n - b_{n-1}\} \cap \Omega.$$

Тогда

$$exA = \{(0, \ldots, 0, 1), (0, \ldots, 0, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n), (0, \ldots, 0, x^*_n)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3.3 следует, что любая крайняя точка множества A имеет не более двух положительных координат. Отметим, что $0 \notin A$, координаты x_{n-1}, x_n не могут одновременно обращаться в нуль. Отсюда получаем требуемое. Лемма доказана. $\square$

Л е м м а 3.3. *Пусть* $a_{n-1} < a_n < b_{n-1} < b_n$,

$$A = \{x \in R^n \mid x_n(b_n - a_n) - x_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leqslant b_n - b_{n-1}\} \cap \Omega.$$

Тогда

$$exA = \{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0), (0, \ldots, 0, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n), (0, \ldots, 0, x^*_n)\}.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.2.

Л е м м а 3.4. *Пусть* $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$,

$$A = \{x \in R^n \mid x_n(b_n - a_n) - x_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) \geqslant b_n - b_{n-1}\} \cap \Omega.$$

Тогда

$$\begin{gathered} exA = \{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0, 0), (0, \ldots, 0, 1), \\ (0, \ldots, 0, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n), (0, \ldots, 0, x^*_{n-1}, 0)\}. \end{gathered}$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.2.

Л е м м а 3.5. *Пусть* $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$,

$$A = \{x \in R^n \mid x_n(b_n - a_n) - x_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leqslant b_n - b_{n-1}\} \cap \Omega.$$

Тогда

$$exA = \{(0, \ldots, 0, 1, 0), (0, \ldots, 0, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n), (0, \ldots, 0, x^*_{n-1}, 0)\}.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.2.

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Справедливы неравенства $b_j \leqslant a_{n-1}$ для всех $j \leqslant n - 2$ и $a_{n-1} < a_n < b_n$, $b_{n-1} > a_n$.

При выполнении данного предположения

$$F(x, u) = \max\{1, u_{n-1}, u_n\} - f(x, u).$$

Т е о р е м а 3.4. *Пусть выполнено предположение 3.1,* $a_{n-1} > 1$, $b_n > b_{n-1}$. *Тогда гарантированное по рискам решение* x^* *имеет вид*

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leqslant n-2, \\ \overline{x}_{n-1}, & \text{если } j = n-1, \\ \overline{x}_n, & \text{если } j = n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $F(x,u) = \max\{u_{n-1}, u_n\} - f(x,u)$. Обозначим $U_1 = \{u \in U \mid u_{n-1} \geqslant u_n\}$, $U_2 = \{u \in U \mid u_{n-1} \leqslant u_n\}$. Тогда

$$F(x,u) = \begin{cases} u_{n-1} - f(x,u), & \text{если } (x,u) \in \Omega \times U_1, \\ u_n - f(x,u), & \text{если } (x,u) \in \Omega \times U_2. \end{cases}$$

Поэтому

$$g(x) = \max_{u\in U} F(x,u) = \max\{-1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum_{j\neq n-1} x_j a_j + b_{n-1}(1 - x_{n-1}),$$
$$-1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum_{j\neq n} x_j a_j + b_n(1 - x_n)\}.$$

Неравенство

$$-1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum_{j\neq n-1} x_j a_j + b_{n-1}(1 - x_{n-1}) \geqslant -1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum_{j\neq n} x_j a_j + b_n(1 - x_n)$$

верно тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$x_n(b_n - a_n) - x_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) \geqslant b_n - b_{n-1}. \tag{3.2}$$

Так как $b_n > b_{n-1}$, то $x_n^* \in (0,1)$, $x_{n-1}^* < 0$. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \Omega$ для которых верно (3.2)$\}$, $\Omega_2 = \overline{\Omega \setminus \Omega_1}$. Получаем, что

$$g(x) = \begin{cases} -1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum\limits_{j\neq n-1} x_j a_j + b_{n-1}(1 - x_{n-1}), & \text{если } x \in \Omega_1 \\ -1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum\limits_{j\neq n} x_j a_j + b_n(1 - x_n), & \text{если } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Так как функция g является линейной на Ω_1, то ее минимальное значение достигается в крайней точке. Поэтому, учитывая лемму 3.2, получаем

$$\min_{x\in\Omega_1} g(x) = \min\{b_{n-1} - a_n, -a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1 - \overline{x}_{n-1}), b_{n-1} - 1 + x_n^*(1 - a_n)\}.$$

Так как

$$a_n\overline{x}_n + b_{n-1}\overline{x}_{n-1} = a_n + \overline{x}_{n-1}(b_{n-1} - a_n),$$

то

$$-a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1 - \overline{x}_{n-1}) = b_{n-1} - a_n - \overline{x}_{n-1}(b_{n-1} - a_n) < b_{n-1} - a_n.$$

Кроме того,

$$\big(b_{n-1} - 1 + x_n^*(1 - a_n)\big) - \big(b_{n-1} - a_n\big) = (x_n^* - 1)(1 - a_n) > 0.$$

Поэтому $b_{n-1} - 1 + x_n^*(1 - a_n) > b_{n-1} - a_n$. Следовательно,

$$\min_{x\in\Omega_1} g(x) = b_{n-1} - a_n - \overline{x}_{n-1}(b_{n-1} - a_n).$$

Аналогично: используя лемму 3.3, получаем

$$\min_{x\in\Omega_2} g(x) = \min\{b_n - 1, b_n - a_j (j = 1, \ldots, n-1), -a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1 - \overline{x}_{n-1}),$$
$$b_{n-1} - 1 + x_n^*(1 - a_n)\} = \min\{b_n - 1, b_n - a_{n-1}, -a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1 - \overline{x}_{n-1})\}.$$

Так как $a_{n-1} \geqslant 1$, то $b_n - a_{n-1} \geqslant b_n - 1$ и

$$-a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1}) = b_{n-1} - a_n - \overline{x}_{n-1}(b_{n-1}-a_n) < b_{n-1} - a_n < b_n - a_{n-1},$$

то $\min\limits_{x\in\Omega_2} g(x) = -a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1})$. Следовательно, $\min\limits_{x\in\Omega} g(x) = -a_n\overline{x}_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1})$. Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 6. Из результатов теоремы 3.2 следует, что ЛПР целесообразно распределить все денежные средства между валютными счетами с номерами $n-1, n$ в пропорции $(\overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n)$.

Т е о р е м а 3.5. *Пусть выполнено предположение 3.1, $a_{n-1} > 1$, $b_n < b_{n-1}$. Тогда гарантированное по рискам решение x^* имеет следующий вид:*

а) если $b_n - a_{n-1} < -a_n + b_{n-1} + \overline{x}_{n-1}(b_{n-1}-a_n)$, то

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq n-1, \\ 1, & \text{если } j = n-1; \end{cases}$$

б) если $b_n - a_{n-1} \geqslant -a_n + b_{n-1} + \overline{x}_{n-1}(b_{n-1}-a_n)$, то

$$x_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leqslant n-2, \\ \overline{x}_{n-1}, & \text{если } j = n-1, \\ \overline{x}_n, & \text{если } j = n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $x_n^* < 0$, $x_{n-1}^* \in (0,1)$. Кроме того,

$$g(x) = \begin{cases} -1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum\limits_{j\neq n-1} x_j a_j + b_{n-1}(1-x_{n-1}), & \text{если } x \in \Omega_1, \\ -1 + x_1 + \ldots + x_n - \sum\limits_{j\neq n} x_j a_j + b_n(1-x_n), & \text{если } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Поэтому, используя лемму 3.4, получаем

$$\min_{x\in\Omega_1} g(x) = \min\{b_{n-1}-1, b_{n-1}-a_j\ (j=1,\ldots,n), -1+x_{n-1}^*+b_{n-1}(1-x_{n-1}^*), -\overline{x}_n a_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1})\}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$b_{n-1} - 1 \geqslant b_{n-1} - a_n,\ b_{n-1} - a_j \geqslant b_{n-1} - a_n \text{ для всех } j = 1,\ldots,n-1,$$
$$-1 + x_{n-1}^* + b_{n-1}(1-x_{n-1}^*) = b_{n-1} - 1 + x_{n-1}^*(1-b_{n-1}) \geqslant b_{n-1} - 1 \geqslant b_{n-1} - a_n,$$
$$-\overline{x}_n a_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1}) = b_{n-1} - a_n + \overline{x}_{n-1}(a_n - b_{n-1}) \geqslant b_{n-1} - a_n.$$

Следовательно, $\min\limits_{x\in\Omega_1} g(x) = b_{n-1} - a_n$.

Используя лемму 3.5, получаем

$$\min_{x\in\Omega_2} g(x) = \min\{b_n - a_{n-1}, -1 + x_{n-1}^* + b_{n-1}(1-x_{n-1}^*), -\overline{x}_n a_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1})\}.$$

Справедливы неравенства

$$-1 + x_{n-1}^* + b_{n-1}(1-x_{n-1}^*) = (1-x_{n-1}^*)(b_{n-1}-1) = \frac{(b_n - a_{n-1})(b_{n-1}-1)}{b_{n-1}-a_{n-1}} > b_n - a_{n-1},$$
$$-\overline{x}_n a_n + b_{n-1}(1-\overline{x}_{n-1}) = -a_n + b_{n-1} - \overline{x}_{n-1}(b_{n-1}-a_n) < b_{n-1} - a_n.$$

Поэтому

$$\min_{x\in\Omega} g(x) = \min\{b_n - a_{n-1}, -a_n + b_{n-1} + \overline{x}_{n-1}(b_{n-1}-a_n)\}.$$

Из последнего равенства следует справедливость утверждений теоремы. Теорема доказана. $\square$

§ 4. Задача о диверсификации рубля — задача линейного программирования

В § 2 данной работы было показано, что функция F представима в виде

$$F(x,u) = \max\{1, u_1, \ldots, u_n\} - f(x,u).$$

Пусть

$$U_0 = \{u \in U \mid u_k \leqslant 1 \text{ для всех } k\},\ U_i = \{u \in U \mid u_i \geqslant 1, u_i \geqslant u_k \text{ для всех } k\},$$
$$I_0 = \{j \in I \cup \{0\} \mid U_j \neq \emptyset\}.$$

Тогда

$$F(x,u) = \begin{cases} u_j - f(x,u),\ (x,u) \in \Omega \times U_j, j \in I_0 \setminus \{0\}, \\ 1 - f(x,u),\ (x,u) \in \Omega \times U_0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\max_{u \in U} F(x,u) = \max\{\max_{u \in U_j} F(x,u), j \in I_0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} z \to \min, \\ z \geqslant g_j(x) = \max\limits_{u \in U_j} F(x,u),\ j \in I_0, \\ x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1, \\ x_i \geqslant 0, i \in I. \end{cases} \tag{4.1}$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть (x^*, z^*) — решение задачи. Тогда x^* — решение задачи о диверсификации рубля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\Omega^* = \{(x,z) \mid (x,z) \text{ удовлетворяют ограничениям задачи (4.1)}\}.$$

Возьмем $x \in \Omega$, $z = \max\limits_j g_j(x)$. Тогда $(x,z) \in \Omega^*$. Так как (x^*, z^*) — решение задачи, то $z \geqslant z^*$. Отсюда для всякого $x \in \Omega$ выполнено неравенство $z^* \leqslant \max\limits_j g_j(x)$, и поэтому $z^* \leqslant \min\limits_{x \in \Omega}\bigl(\max\limits_j g_j(x)\bigr)$. С другой стороны, $z^* \geqslant \max\limits_j g_j(x^*) \geqslant \min\limits_{x \in \Omega}\bigl(\max\limits_j g_j(x)\bigr)$. Следовательно,

$$z^* = \min_{x \in \Omega}\bigl(\max_j g_j(x)\bigr) = \min_{x \in \Omega} \max_{u \in U} F(x,u) = \max_{u \in U} F(x^*, u).$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Каждая из функций g_j является линейной. Поэтому задача (4.1) является задачей линейного программирования.

З а м е ч а н и е 8. Функции g_j представимы в виде

$$g_i(x) = \max_{u \in U_i} F(x,u) = -1 + \sum_{k \neq i} x_k(1 - a_k) + b_i(1 - x_i),\ i \in I, \tag{4.2}$$

$$g_0(x) = \max_{u \in U_0} F(x,u) = \sum_{k=1}^{n} x_k(1 - a_k). \tag{4.3}$$

Поэтому задача (4.1) имеет вид (если все множества U_j не пусты)

$$z \to \min,$$
$$\sum_{k \neq i} x_k(1 - a_k) - x_i b_i - z \leqslant 1 - b_i,\ i \in I,$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_k(1 - a_k) - z \leqslant 0,$$
$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1,$$
$$x_i \geqslant 0,\ i \in I.$$

З а м е ч а н и е 9. Отметим, что некоторые множества U_i могут быть пустыми. Например, если $b_1 < a_i$ для всех $i \geqslant 2$ и $b_1 < 1$, то $U_1 = \emptyset$.

З а м е ч а н и е 10. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < 1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < b_n$. Тогда $U_i \neq \emptyset$ для всех $i \in I_0$.

Действительно, $(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in U_i$ для всех $i \in I$ и $(a_1, \ldots, a_n) \in U_0$.

Для каждого $i \in I$ определим множества $I_i = \{j \mid j \in I, b_j > b_i\}$. Кроме того, определим $x_j^0 = \frac{b_j - 1}{b_j - a_j}, j \in I$.

Если $I_i \neq \emptyset$, то полагаем

$$x_j^i = \begin{cases} \frac{b_j - b_i}{b_j - a_j}, & \text{если } j \in I_i, \\ 0, & \text{если } j \notin I_i. \end{cases}$$

Если $I_i = \emptyset$, то полагаем

$$x_j^i = \begin{cases} \frac{b_j - 1}{b_j - a_j}, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Пусть $X^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i), i \in I_0$.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть* $a_i < 1, b_i > 1$ *для всех* $i \in I$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k - 1}{b_k - a_k} \leqslant 1$ *и для каждого* $i \in I$ *такого, что* $I_i \neq \emptyset$, *справедливы неравенства*

$$\sum_{l \in I_i} \frac{b_l - b_i}{b_l - a_l} \leqslant 1, \qquad \sum_{l \in I_i} \frac{1 - a_l}{b_l - a_l} \geqslant \frac{b_i - 1}{b_i - a_i}.$$

Тогда гарантированным по рискам решением задачи о диверсификации рубля будет $X^s = (x_1^s, \ldots, x_n^s)$, $s \in I_0$, *такой, что* $g_s(X^s) = \min\limits_{l \in I_0} g_l(X^l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $U_i \neq \emptyset$ для всех $i \in I \cup \{0\}$. Поэтому $I_0 = I \cup \{0\}$. Функции $g_i(x) = \max\limits_{u \in U_i} F(x, u)$ представимы в виде $(4.2), (4.3)$. Определим множества $\Omega_i (i \in I_0)$ вида

$$\Omega_i = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \geqslant g_j(x) \text{ для всех } j \in I_0 \setminus \{i\}\}.$$

Из $(4.2), (4.3)$ следует, что $x \in \Omega_i, i \in I$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$(a_i - b_i)x_i + (b_j - a_j)x_j \geqslant b_j - b_i,\ j \in I \setminus \{i\},$$
$$(a_i - b_i)x_i \geqslant 1 - b_i.$$

Кроме того, $x \in \Omega_0$ тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ выполнены неравенства

$$(b_i - a_i)x_i \geqslant b_i - 1.$$

Таким образом, получили, что

$$g(x) = \max_{u \in U} F(x, u) = \begin{cases} g_0(x), \text{ если } x \in \Omega_0, \\ g_1(x), \text{ если } x \in \Omega_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_n(x), \text{ если } x \in \Omega_n. \end{cases}$$

Пусть $i \in I$. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$g_i(x) = (1-b_i)x_i + \sum_{k\neq i}(1-a_k)x_k \to \min,$$
$$(a_i - b_i)x_i + (b_j - a_j)x_j \geqslant b_j - b_i,\ j \in I \setminus \{i\},$$
$$(a_i - b_i)x_i \geqslant 1 - b_i,$$
$$-x_1 - x_2 - \dots - x_n \geqslant -1,$$
$$x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0.$$

Задачей, двойственной к данной задаче, будет задача

$$G_i(y) = \sum_{k\neq i}(b_k - b_i)y_k + y_i(1-b_i) - y_{n+1} \to \max,$$
$$(b_j - a_j)y_j - y_{n+1} \leqslant 1 - a_j,\ j \in I \setminus \{i\},$$
$$(a_i - b_i)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - y_{n+1} \leqslant 1 - b_i,$$
$$y_1 \geqslant 0, \dots, y_{n+1} \geqslant 0.$$

Предположим, что $I_i \neq \emptyset$. Определим $y^i_{n+1} = 0$,

$$y^i_j = \begin{cases} \frac{1-a_j}{b_j-a_j}, & \text{если } j \in I_i, \\ 0, & \text{если } j \notin I_i. \end{cases}$$

Тогда X^i удовлетворяет ограничениям прямой задачи, а $Y^i = (y^i_1, \dots, y^i_n, y^i_{n+1})$ — ограничениям двойственной задачи, причем

$$g_i(X^i) = \sum_{k\in I_i} \frac{(1-a_k)(b_k-b_i)}{b_k - a_k} = G_i(Y^i).$$

Следовательно, в силу теоремы двойственности X^i является решением прямой задачи линейного программирования.

Предположеим теперь, что $I_i = \emptyset$. Определим $y^i_{n+1} = 0$,

$$y^i_j = \begin{cases} \frac{b_i-1}{b_i-a_i}, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Тогда X^i удовлетворяет ограничениям прямой задачи, а $Y^i = (y^i_1, \dots, y^i_n, y^i_{n+1})$ — ограничениям двойственной задачи, причем $g_i(X^i) = G_i(Y^i)$. Поэтому X^i — решение прямой задачи линейного программирования.

Рассмотрим далее задачу линейного программирования вида

$$g_0(x) = \sum_{k=1}^{n}(1-a_k)x_k \ \to \min,$$
$$(b_j - a_j)x_j \geqslant b_j - 1, j \in I,$$
$$-x_1 - x_2 - \ldots - x_n \geqslant -1,$$
$$x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0.$$

Двойственной для данной задачи будет задача

$$G_0(Y) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - 1)y_k - y_{n+1},$$
$$(b_j - a_j)y_j - y_{n+1} \leqslant 1 - a_j, j \in I,$$
$$y_1 \geqslant 0, \dots, y_{n+1} \geqslant 0.$$

Определим $y_j^0 = \frac{1-a_j}{b_j-a_j}, j \in I, y_{n+1}^0 = 0, Y^0 = (y_1^0, \ldots, y_{n+1}^0)$. Тогда X^0 удовлетворяет ограничениям прямой задачи, а Y^0 — ограничениям двойственной задачи и, кроме того, $g_0(X^0) = G_0(Y^0)$. Поэтому X^0 — решение прямой задачи. Далее имеем

$$\min_{x\in\Omega} g(x) = \min_{i\in I_0}\min_{x\in\Omega_i} g_i(x) = \min_{i\in I_0} g_i(X^i) = g_s(X^s).$$

Следовательно, X^s — гарантированное по рискам решение. Теорема доказана. □

§ 5. Игровое решение по Нэшу

Определение 5.1. Вектор $x^* \in \Omega$ называется *игровым решением по Нэшу,* если существует $u^* \in U$ такой, что для всех $x \in \Omega$, $u \in U$ справедливы неравенства

$$f(x, u^*) \leqslant f(x^*, u^*) \leqslant f(x^*, u). \tag{5.1}$$

Замечание 11. Если рассмотреть антагонистическую игру (Ω, U, f), в которой одним из игроков является ЛПР, а другим — «природа» и f — функция выигрыша ЛПР, то $x^* \in \Omega$ является игровым решением по Нэшу, если существует $u^* \in U$ такой, что пара (x^*, u^*) образует ситуацию равновесия по Нэшу в игре (Ω, U, f).

Лемма 5.1. *Пусть $A_i (i \in I)$ — вещественные числа, $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k x_k$, $A_l = \max\limits_{i\in I} A_i$. Тогда*

$$\max_{x\in\Omega} h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } A_l \leqslant 0, \\ A_l, & \text{если } A_l > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если $A_l \leqslant 0$, то $h(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \Omega$ и $h(0) = 0$.

Пусть $A_l > 0$ и $I_1 = \{j \mid A_j > 0\}$. Тогда для всех $x \in \Omega$

$$h(x) \leqslant \sum_{j\in I_1} A_j x_j \leqslant \sum_{j\in I_1} A_l x_j \leqslant A_l.$$

Если $x^* \in \Omega$ такой, что $x_i^* = 0$ для всех $i \neq l$, $x_l^* = 1$, то $h(x^*) = A_l$. Лемма доказана. □

Теорема 5.1. *Пусть $a_i \leqslant 1$ для всех $i \in I$. Тогда игровое равновесие по Нэшу x^* имеет вид $x_i^* = 0$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. Так как множества Ω, U компакты, функция f непрерывна, то в силу замечания и теоремы (см. [8, с. 216]) игровое равновесие существует тогда и только тогда, когда

$$\max_{x\in\Omega}\min_{u\in U} f(x,u) = \min_{u\in U}\max_{x\in\Omega} f(x,u).$$

Из теоремы 2.1 имеем $\max\limits_{x\in\Omega}\min\limits_{u\in U} f(x,u) = 1$, причем внешний максимум достигается на нулевом векторе. Вычислим $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{x\in\Omega} f(x,u)$. Функция f представима в виде $f(x,u) = 1 + \sum\limits_i x_i(u_i - 1)$. Пусть $u^* = \max\limits_i (u_i - 1)$. Тогда в силу леммы 5.1 имеем

$$g(u) = \max_{x\in\Omega} f(x,u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u^* \leqslant 0, \\ 1 + u^*, & \text{если } u^* > 0. \end{cases}$$

Так как $a_i \leqslant 1$ для всех i, то $a^* = \max\limits_i (a_i - 1) \leqslant 0$, и поэтому $g(a) = 1$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Поэтому $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{x\in\Omega} f(x,u) = 1$. Теорема доказана. □

Теорема 5.2. *Пусть $a_l = \max\limits_i a_i > 1$, $I^* = \{j \mid a_j = a_l\}$. Тогда игровое по Нэшу решение x^* имеет вид $x_j^* = 0$, если $j \notin I^*$, и $\sum\limits_{j\in I^*} x_j^* = 1$. В частности, если $I^* = \{l\}$, то $x_l^* = 1$ и $x_j^* = 0$ для всех $j \neq l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2.2 получаем, что $\max\limits_{x\in\Omega}\min\limits_{u\in U} f(x,u) = a_l$, причем внешний максимум достигается на x^*. Вычислим $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{x\in\Omega} f(x,u)$. Имеем $f(x,u) = 1+\sum\limits_{i\in I}(u_i-1)x_i$. В силу леммы 5.1 получаем

$$g(u) = \max_{x\in\Omega} f(x,u) = \begin{cases} 1, \text{ если } u^* \leqslant 0, \\ u^*+1, \text{ если } u^* > 0, \end{cases}$$

где $u^* = \max\limits_i (u_i - 1)$. Так как $\max\limits_i a_i > 1$, то для любого $u \in U$ выполнено $u^* > 0$. Поэтому

$$g(u) = \max_i (u_i - 1) + 1 \geqslant \max_i (a_i - 1) + 1 = a_l - 1 + 1 = a_l$$

и $g(a) = a_l$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Следовательно, $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{x\in\Omega} f(x,u) = a_l$. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. М.: Ленанд, 2012. 304 с.
2. Бельских Ю.А., Жуковский В.И., Смирнова Л.В. Способ гарантированного распределения денежных средств по двум депозитам // Таврический вестник информатики и математики. 2016. № 4 (33). С. 59–67.
3. Высокос М.И., Жуковский В.И., Кириченко М.М., Самсонов С.П. Новый подход к многокритериальным задачам при неопределенности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 3–16. DOI: 10.20537/vm170101
4. Жуковский В.И., Высокос М.И. Гарантированное по исходам и рискам решение в однокритериальной задаче // Ученые записки Таврического нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 27. № 1. С. 198–210.
5. Жуковский В.И., Ахрамеев П.К. Гарантированное по риску решение в задаче о диверсификации вклада по трем депозитам (рублевому, в долларах и евро) // Ученые записки Таврического нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 27. № 1. С. 177–197.
6. Жуковский В.И., Солдатова Н.Г. К задаче диверсификации вклада по трем депозитам // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 55–61. DOI: 10.20537/vm130406
7. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
8. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984. 496 с.

Поступила в редакцию 05.05.2018

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

Петрова Надежда Вениаминовна, магистрант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: nadezhda-ok@mail.ru

N. N. Petrov, N. V. Petrova

On the problem of diversifying the ruble

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 51, pp. 123–135 (in Russian).

Keywords: uncertainty, risk, outcome, maximin, Nash equilibrium, deposit diversification.

MSC2010: 93A30, 91A40

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-05

The problem of allocating a certain amount in rubles to a ruble deposit and to a given number of foreign currency deposits is considered in order to obtain the maximum income in rubles at the end of the storage period. It is assumed that the person making the decision does not know the exchange rates at the end of the storage period and is guided only by certain limits of their possible changes.The solution of this problem depends on the choice of the principle of optimality. A solution guaranteed by the outcomes and the Nash game solution are found. It is shown that the problem of finding a risk-guaranteed solution is a linear programming task. For some special cases, a risk-based solution is analytically found.

REFERENCES

1. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N. *Uravnoveshivanie konfliktov i prilozheniya* (Equilibrating conflicts and applications), Moscow: Lenand, 2012, 304 p.
2. Belskikh J.A., Zhukovskiy V.I., Smirnova L.V. Method of guaranteed distribution of available funds in two deposits, *Taurida Journal of Computer Science Theory of Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 59–67 (in Russian).
3. Vysokos M.I., Zhukovskii V.I., Kirichenko M.M., Samsonov S.P. A new approach to multicriteria problems under uncertainty, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki,* 2017, vol. 27, issue 1, pp. 3–16 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170101
4. Zhukovskiy V.I., Vysokos M.I. Guaranteed in outcomes and risks solution for single-criterion problem, *Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Physics and Mathematics Sciences,* 2014, vol. 27, no. 1, pp. 198–210 (in Russian).
5. Zhukovskiy V. I., Akhrameev P.K. Guaranteed on risk solution in problem of sum distribution in to thee deposits (in ruble, dollars and euros), *Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Physics and Mathematics Science,* 2014, vol. 27, no. 1, pp. 177-197 (in Russian).
6. Zhukovskii V.I., Soldatova N.G. On the problem of diversification of contribution on the three deposits, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki,* 2013, issue 4, pp. 55–61 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130406
7. Pshenichny B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* (Convex analysis and extremal problems), Moscow: Nauka, 1959, 550 p.
8. Vorob'ev N.N. *Osnovy teorii igr. Beskoalitsionnye igry* (Fundamentals of game theory. Uncooperative games), Moscow: Nauka, 1984, 496 p.

Received 05.05.2018

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru

Petrova Nadezhda Veniaminovna, Master student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: nadezhda-ok@mail.ru