УДК 517.833

© ***В. И. Жуковский, М. В. Болдырев, М. М. Кириченко***

ГАРАНТИРОВАННОЕ ДЛЯ РИСКОНЕЙТРАЛА РЕШЕНИЕ ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ: АНАЛОГ ВЕКТОРНОЙ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ

Наличие неопределенностей в математической модели позволяет говорить о риске, сопровождающем любое действие (стратегию) лица, принимающего решение. В экономической литературе имеются многочисленные различные понятия риска. Мы будем придерживаться следующего: риск — это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемого значения. Отметим, что именно такому понятию риска отвечают многие реально работающие микроэкономические риски.

Каким бывает отношение людей к риску? В ряде публикаций по финансовой экономике выделено три группы субъектов в зависимости от их отношения к риску:

1) противники риска — рискофобы (люди, боящиеся риска и отвергающие его);
2) рисконейтралы (люди, нейтрально относящиеся к риску);
3) любители риска — рискофилы.

В экономике считается, что значительное большинство людей относится к противникам риска. На вопрос о том, как фактор неопределенности влияет на поведение людей, экономист обычно отвечает: «Люди не любят рисковать и готовы заплатить деньги за то, чтобы избежать бремя риска». Однако возникают ситуации, когда риск просто необходим. Люди прошлого выходили в море, что часто было связано с риском для жизни. Существовала даже латинская пословица: «Плавать по морю необходимо, жить — не очень». Так любители риска относятся и к альпинизму, авиации, экстремальным ситуациям. Более того, предпринимательство и риск — понятия неразделимые. В экономической практике принято, что доля риска является необходимым условием увеличения дохода. Зачастую возникают ситуации, когда без риска вообще обойтись невозможно (например, в чрезвычайных ситуациях). Наконец, значительное большинство людей относятся к рисконейтралам. Они будут пускаться пусть даже и в рискованные предприятия в том случае, если доход будет выглядеть достаточно привлекательным и одновременно, чтобы возможно меньше нужно было бы рисковать.

Естественно, что при принятии решений рискофобы основываются на идеях вальдовского принципа гарантированного результата (максимина). Рискофилы — на концепции минимаксного сожаления (по Нихансу–Сэвиджу). Для рисконейтралов вопрос оставался неисследованным. В настоящей статье предлагается приоткрыть эту завесу, а именно, определяется понятие слабо гарантированного одновременно по исходам и рискам решения однокритериальной задачи при неопределенности (ОЗН) (формализация основана на понятии векторной седловой точки из теории многокритериальных задач при неопределенности). Устанавливаются достаточные условия, с помощью которых найден явный вид введенного решения для общего вида ОЗН с ограниченной неопределенностью.

Ключевые слова: стратегия, неопределенность, критерий, оптимум по Слейтеру и Парето, векторная седловая точка.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-02

Введение

Однокритериальную задачу при неопределенности образует следующая тройка:

- множество возможных стратегий ЛПР (лица, принимающего решения); стратегия есть правило, по которому каждому текущему состоянию информированности ЛПР ставится в соответствие то или иное (действие) из действий (поведений), допустимых при данной информации; в экономических системах это могут быть: выбор цены продукта, заключение договоров о поставках, внедрение новых технологий, распределение фонда зарплаты, премии и так далее;

- множество допустимых значений неопределенностей; неопределенность есть неполнота или неточность информации об условиях реализации выбранной стратегии; неопределенность возникает в экономических, механических управляемых системах, при принятии решений (более подробно об этом — в [1–3] и многочисленных статьях; даже по французской пословице «Entre bouche et cuiller, pour un petit de fait, vient souvent encombrier» —

«пока несешь ложку в рот, нередко возникает помеха»; кстати, помеха — один из видов неопределенности; более того, учет неопределенностей при моделировании реальных конфликтов позволяет получать более адекватные результаты, что подтверждается, например, большим числом публикаций (более 1 млн работ в Google Scholar по запросу «mathematical modelling under uncertainty»));

- критерий, называемый функцией выигрыша, значение которой (выигрыш) определяется выбранной ЛПРом стратегией и реализовавшейся (независимо от действий ЛПРа) неопределенностью.

По этим трем составляющим (критерий, множество стратегий и множество неопределенностей) ЛПР находит риск. В экономической литературе подчеркивается важность следующего *требования* к принятию решения в однокритериальной задаче при неопределенности [4, с. 32; 5, с. 21]: **оптимальное сочетание значения критерия (исхода, выигрыша) и величины риска**. Указанное требование появилось за счет того, что в большинстве практических задач чем «прибыльнее» стратегия, тем выше степень (величина) риска. *Что же такое риск?* Известный российский специалист по теории оптимизации Талгат Касимович Сиразетдинов считает, что в настоящее время не существует строгого математического определения риска [6, с. 31]. В монографии [7, с. 15] рассматривается шестнадцать возможных определений риска. Большинство из них требуют статистических данных о неопределенности. Однако зачастую исследователь операций не обладает подобной информацией (по тем или иным причинам). Именно такие случаи и рассматриваются в настоящей статье.

Под *риском* будем понимать *возможность отклонения реализующихся значений от желаемых*. Заметим, что это определение перекликается с «обычными» микроэкономическими рисками, описанными, например, в [8].

Стремление к оптимальному сочетанию размера исхода и величины риска проявляется в том, что ЛПР оценивает ожидаемые величины выигрыша и риска и выбирает ту стратегию, которая позволяет получить возможно больший выигрыш при одновременно возможно меньшей величине риска. С точки зрения теории многокритериальных задач при неопределенности [9] в этом случае следует рассматривать *два равноправных критерия* — исходный критерий (функцию выигрыша) и вспомогательный, в качестве которого выступает функция риска. В такой задаче ЛПР выбирает ту (из возможных) стратегию, при которой сам критерий принимал бы возможно *большее* значение, а риск — возможно *меньшее*. Одновременно ЛПР вынужден ориентироваться на реальность появления любой неопределенности (из допустимых).

Учет неопределенностей при принятии решений — непростая задача. Возможным подходам посвящены недавно опубликованная серия статей [10–12] и книга [13]. Если для учета неопределенностей в статье [14] использовались так называемые сильные гарантии (ориентированные на «самые плохие» — минимальные по неопределенностям значения каждого из отдельных критериев), то в настоящей работе во главу угла ставится так называемая векторная гарантия, учитывающая одновременно как значение функции выигрыша, так и минус функции риска (в духе векторной оптимизации [9, 12]). Затем, как в [14], осуществляется переход к двухкритериальной задаче гарантий, в которой неопределенности уже отсутствуют. Для последней применяется весь арсенал различных векторных максимумов, диктуемых уже теорией многокритериальных задач [15]. Дело в том, что сильные гарантии предельно снижают возможные значения каждого из критериев, а ведь цель ЛПР в задаче гарантий — возможно увеличить значения обоих критериев одновременно.

Итак, предлагаемая статья отличается от [14] следующими признаками:

– во-первых, при выборе «хороших для себя» стратегий ЛПР ориентируется не только на свой выигрыш, но и одновременно на риск по этому выигрышу, причем не только при выборе решений, но и при формализации гарантий;

– во-вторых, если в [14] для «борьбы с неопределенностью» используется аналог максимина из [11], то здесь применяем аналог векторной седловой точки из [10].

Наконец, в публикациях по макроэкономике [2, с. 103; 9, с. 5] всех ЛПР делят на три категории. К первой относятся те, кто не любит рисковать (*рискофобы* — греч. *phobos* означает *боязнь* чего-либо), вторые — любители риска (*рискофилы* — греч. *philia* означает *любовь* к чему-либо) и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать как исходы (выигрыши), так и риски (*рисконейтралы*). В настоящей статье будем считать ЛПР рисконейтралом.

Как же подходить к решению ОЗН каждому из трех видов ЛПР? При принятии решения рискофобам отвечает концепция гарантированного результата (максимина), рискофилам — принцип минимаксного сожаления. Аналогичный вопрос для рисконейтралов оставался открытым. Попытке приоткрыть его посвящаются [14] и настоящая работа. Вообще говоря, рискофобов мы относим к пессимистам (они рассчитывают «на самое плохое» для себя), рискофилов — к оптимистам (полярно ориентируются «на самое хорошее»), и только рисконейтралы объединяют эти две казалось бы противоположные тенденции.

Итак, в настоящей статье будем рассматривать однокритериальную задачу при неопределенности (ОЗН):

$$\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x,y) \rangle, \tag{1}$$

где выбор стратегии x из множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ находится в распоряжении ЛПР. *Цель ЛПР* — выбор $x \in X$, для которого скалярный критерий $f(x,y)$ достигает возможно *большего* значения. При этом ЛПР должен учитывать действие помех, ошибок и другого вида неопределенностей y, о которых известно лишь, что они принимают значение из заданного множества $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, так называемых *интервальных* неопределенностей.

Присутствие неопределенностей в (1) приводит к появлению множества результатов (исходов, выигрышей):

$$f(x,Y) = \{f(x,y) | \forall y \in Y\},$$

«порожденных» $x \in X$. Множество $f(x,y)$ можно сузить, используя риски. Как и в [14], ограничимся рисками по Нихансу–Сэвиджу. Эти риски оцениваются значением *функции риска по Нихансу–Сэвиджу:*

$$R_f(x,y) = \max_{z \in X} f(z,y) - f(x,y), \tag{2}$$

предложенной в 1950-х годах американским математиком Леонардом Сэвиджем и швейцарским экономистом Нордом Нихансом. Ими независимо разработан ПМС — принцип минимаксного сожаления, по которому решением (1) считается пара $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbb{R}$, определяемая цепочкой равенств

$$R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x,y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y). \tag{3}$$

Требование (3) характеризует ЛПР как оптимиста, стремящегося к «самому хорошему» для себя выигрышу. Заметим, что пессимисты следуют $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$, где

$$f^g = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y),$$

ибо ориентируются на «самый плохой» для себя выигрыш.

Далее будет предложено понятие слабо гарантированного одновременно по выигрышам и рискам решения ОЗН (формализация основана на слейтеровской векторной седловой точке из теории многокритериальных задач при неопределенности [9]). Устанавливаются достаточные условия существования, с помощью которых найден явный вид введенного решения для достаточно общего линейно-квадратичного варианта ОЗН с ограниченной неопределенностью.

§ 1. Формализация

Понятие слабо гарантированного решения ОЗН. Как уже упоминалось во введении, в экономической литературе неоднократно подчеркивается актуальность следующего требования к принятию решения в однокритериальной задаче при неопределенности: это *решение должно оптимально сочетать исход и риск.* А именно, оценивая ожидаемые исходы и риски, ЛПР выбирает ту стратегию, которая позволяет получить возможно больший исход (выигрыш) при одновременном возможно меньшем риске. Фактически это означает переход от однокритериальной ОЗН (1) к двухкритериальной:

$$\langle X, Y, \{f(x,y), R_f(x,y)\}\rangle, \tag{4}$$

в которой два критерия — функция выигрыша $f(x,y)$ и функция риска $R_f(x,y)$. В задаче (4) ЛПР выбирает ту стратегию $x \in X$, для которой его выигрыш (значение $f(x,y)$) принял бы возможно *большее* значение и одновременно риск (значение $R_f(x,y)$) — возможно *меньшее*. При этом ЛПР вынужден ориентироваться на реальность появления любой неопределенности $y \in Y$.

Этим требованиям отвечает следующее понятие, которое фактически объединяет пессимистов и оптимистов.

Определение 1. *Слабо гарантированным по выигрышам и рискам решением* (СГВР) задачи (1) назовем тройку $(x^S, f^S, R_f^S) \in X \times \mathbb{R}^2$, для которой существует неопределенность $y_S \in Y$ такая, что $f^S = f(x^S, y_S)$, $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$ и

(1) при любой стратегии $x \in X$ несовместна система неравенств

$$f(x, y_S) > f^S, \quad R_f(x, y_S) < R_f^S; \tag{5}$$

(2) для каждой неопределенности $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f(x^S, y) < f^S, \quad R_f(x^S, y) > R_f^S, \tag{6}$$

где функция риска $R_f(x,y)$ определена в (2).

При этом x^S назовем *слабо гарантирующей стратегией*, а (x^S, y_S) — парой, реализующей слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение СГВР.

Согласно проведенному определению для построения СГВР — слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения (x^S, f^S, R_f^S) задачи (1) — достаточно найти пару (x^S, y_S) из условий несовместности двух неравенств, как (5), так и (6), а затем уже строить числа $f^S = f(x^S, y_S)$, $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$.

Перейдем к некоторым содержательным пояснениям этого определения.

Сведение (1) к двухкритериальной задаче. Как и ранее, для аналитического конструирования СГВР прежде всего рассматриваем однокритериальную задачу при неопределенности

$$\langle X, Y, f(x,y)\rangle$$

и функцию риска (2)

$$R_f(x,y) = \max_{z \in X} f(z,y) - f(x,y).$$

Затем конструируем двухкритериальную задачу (4) при неопределенности. С точки зрения теории многокритериальных задач при неопределенности (МЗН) [9], получаем не совсем обычную задачу, ибо в ней ЛПР подходящим выбором своей стратегии стремится возможно *увеличить* значение первого критерия $f(x,y)$ и одновременно возможно *уменьшить* значение второго критерия $R_f(x,y)$. Одновременно с этим ЛПР вынужден рассчитывать на появление любой из неопределенностей $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

Аналог седловой точки. Одним из способов формализации решения в МЗН является «аналог седловой точки», предложенный первым автором в книге [9]. Он основывался на понятии седловой точки в антагонистической игре со скалярной функцией выигрыша $F(x,y)$:

$$\langle X, Y, F(x,y)\rangle. \tag{7}$$

В (7) первый игрок подходящим выбором своей стратегии $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ стремится максимизировать скалярную функцию выигрыша $F(x,y)$ (определенную на произведении $X \times Y$), второй за счет выбора своей стратегии $y \in Y$, наоборот, стремится минимизировать $F(x,y)$. Одним из возможных решений игры (7) является седловая точка $(x^o, y^o) \in X \times Y$, определяемая цепочкой равенств:

$$\max_{x \in X} F(x, y^o) = F(x^o, y^o) = \min_{y \in Y} F(x^o, y). \tag{8}$$

В случае когда функция выигрыша $F(x,y)$ *векторная* (не скалярная!), при формализации решения следует скалярные оптимумы (8) заменить на *векторные*: скалярный максимум в левом равенстве (8) заменить на *векторный максимум*, минимум в правой части (8) — на *векторный минимум*. Полученная в этом случае пара (x^o, y^o) названа в [9] *векторной седловой точкой*. В теории многокритериальных задач предложен ряд понятий векторных оптимумов (по Слейтеру, Парето, Борвейну, Джоффриону и А-оптимум; подробнее об этом — в [9]). Приведем одно из них, которое как раз и использовали в определении 1 при формализации слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения задачи (1). Итак, рассматриваем МЗН

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle, \tag{9}$$

где стратегии, выбираемые ЛПРом, есть $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, неопределенности $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$, компоненты теперь уже векторного критерия $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ определены на $X \times Y$. В задаче (9) ЛПР за счет выбора стратегии $x \in X$ стремится возможно увеличить одновременно оба критерия $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, считая при этом, что «неопределенность максимально ему противодействует» (возможно, одновременно уменьшает $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$). Задаче (9) ставим в соответствие две вспомогательные двухкритериальные задачи:

$$\Gamma(y^o) = \langle X, F(x, y^o) \rangle, \qquad \Gamma(x^o) = \langle Y, F(x^o, y) \rangle,$$

которые получаем из (9), фиксируя неопределенность $y = y^o \in Y$ и стратегию $x = x^o \in X$ соответственно.

Стратегия $x^o \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* (синонимы: слабо эффективной, слабо максимальной по Парето) в задаче $\Gamma(y^o)$, если при любых $x \in X$ несовместна система строгих неравенств

$$F_i(x, y^o) > F_i(x^o, y^o) \ (i = 1, 2).$$

Неопределенность $y^o \in Y$ называется *минимальной по Слейтеру* для задачи $\Gamma(x^o)$, если несовместна система строгих неравенств

$$F_i(x^o, y) < F_i(x^o, y^o) \ (i = 1, 2) \quad \forall y \in Y.$$

Пара (x^o, y^o), удовлетворяющая обоим условиям (максимальности и минимальности по Слейтеру), названа в [9] *седловой точкой по Слейтеру* задачи (9).

Максимальная по Слейтеру стратегия x^o задачи $\Gamma(y^o)$ обладает следующим свойством: при выборе ЛПРом любой стратегии $x \in X$ обе компоненты векторного критерия из $F(x, y^o)$ не могут одновременно стать *больше* соответствующих компонент вектора $F(x^o, y^o)$. Аналогично для задачи $\Gamma(x^o)$: при реализации любой неопределенности $y \in Y$ обе компоненты $F_i(x, y^o)$ $(i = 1, 2)$ вектора $F(x^o, y)$ не могут одновременно стать *меньше* $F(x^o, y^o)$ (по соответствующим компонентам).

Уточним «содержательный смысл» требования несовместности неравенств (6). В них ЛПР использует стратегию x^S (входящую в слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение (x^S, f^S, R_f^S)), а неопределенность y может реализоваться любая (из множества Y). Неравенства (6) будут несовместны, если при любой реализовавшейся y нарушаются либо они оба, либо хотя бы одно из (6).

В первом случае может быть $f(x^S, y) \geqslant f^S$ и $R_f(x^S, y) \leqslant R_f^S$. Выполнение этих двух неравенств означает, что выигрыш $f(x^S, y)$ не может стать меньше f^S и одновременно соответствующий риск $R_f(x^S, y)$ не может стать больше риска R_f^S. Таким образом, число f^S ограничивает *снизу* возможный выигрыш $f(x^S, y)$, а R_f^S — есть оценка *сверху* возможного риска $R_f(x^S, y)$ (при одних и тех же неопределенностях). Система (6) будет несовместной и при нарушении только первого неравенства из (6) (то есть при $f(x^S, y) \geqslant f^S$ и больших рисках $R_f(x^S, y) > R_f^S$). Этот случай можно интерпретировать «привычными» положениями из финансовой экономики: «непомерно большие выигрыши связаны с большими рисками» или «большие риски могут привести к большим выигрышам».

Наконец, «содержательный смысл» несовместности (6) состоит в использовании игроком стратегии x^S из слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения (x^S, f^S, R_f^S) и реализации любой неопределенности $y \in Y$. Полученный при этом выигрыш $f(x^S, y)$ не может стать *меньше* гарантированного f^S, и одновременно соответствующий риск $R_f(x^S, y)$ не может стать *больше* гарантированного R_f^S. Именно поэтому в качестве решения задачи (1) и выбрана тройка — стратегия x^S и гарантии по выигрышам f^S и по рискам R_f^S: используя x^S, ЛПР гарантирует себе выигрыш не ниже f^S с одновременным риском не большим, чем R_f^S (какая бы неопределенность $y \in Y$ ни реализовалась). Заметим, что несовместность неравенств (5) означает стремление возможно увеличить выигрыш $f(x, y_S)$ и одновременно уменьшить риск $R_f(x, y_S)$, ориентируясь на «максимальное противодействие» этому неопределенности y_S. Нахождение гарантий $f^S = f(x^S, y_S)$ и $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$ может быть (как показано ниже) сведено к построению ситуации равновесия по Нэшу специальной бескоалиционной игры двух лиц (эффективно строящейся по задаче (1)) и проводится ЛПРом самостоятельно, независимо от тех неопределенностей, которые на самом деле реализуются в задаче (1).

Замечание 1. Подчеркнем еще раз, что система неравенств (5) построена на основании упомянутого выше «аналога седловой точки» и соответствует «наибольшему противодействию» стремлениям ЛПР со стороны неопределенности (аналог игры с «природой»).

Замечание 2. Если вместо функции риска $R_f(x, y)$ использовать критерий $-R_f(x, y)$, то несовместность системы (6) эквивалентна несовместности системы из двух неравенств:

$$f(x^S, y) < f^S, \quad -R_f(x^S, y) < -R_f^S \quad \forall y \in Y, \tag{10}$$

а несовместность (5) эквивалентна несовместности

$$f(x, y_S) > f(x^S, y_S), \quad -R_f(x, y_S) > -R_f(x^S, y_S) \quad \forall x \in X. \tag{11}$$

Но несовместность (10) при всех $y \in Y$ означает, что $y_S \in Y$ — минимальная по Слейтеру неопределенность в задаче $\langle Y, \{f(x^S, y), -R_f(x^S, y)\}\rangle$, а несовместность (11) для любых $x \in X$ означает, что $x^S \in X$ является максимальной по Слейтеру стратегией в двухкритериальной задаче $\langle X, \{f(x, y_S), -R_f(x, y_S)\}\rangle$.

Таким образом, пара (x^S, y_S) есть седловая точка по Слейтеру для двухкритериальной задачи при неопределенности

$$\langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\}\rangle \tag{12}$$

(аналог (9), в которой ЛПР подходящим выбором стратегии $x \in X$ стремится максимально увеличить значение каждого из двух критериев $f(x, y)$ и $-R_f(x, y)$; одновременно ЛПР вынужден учитывать реальность появления любой неопределенности $y \in Y$).

Возможное гарантированное решение — седловая точка по Слейтеру (x^S, y_S), определяемая несовместностью систем (10) и (11). Итак, нахождение слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения $(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S))$ эквивалентно построению седловой точки по Слейтеру задачи (12).

Замечание 3. В качестве основы определения слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения задачи (1) можно было бы использовать и оптимумы по Парето (а не по Слейтеру, как в определении 1). В этом случае нужно было бы применить следующую седловую точку по Парето в задаче (12).

Именно, пара $(x^P, y_P) \in X \times Y$ называется *седловой точкой по Парето* задачи (12), если:

(a) x^P — *максимальная* по Парето стратегия задачи $\langle X, \{f(x, y), -R_f(x, y)\}\rangle$ при $y = y_P$, то есть для всех $x \in X$ несовместна система неравенств

$$f(x, y_P) \geqslant f(x^P, y_P), \quad -R_f(x, y_P) \geqslant -R_f(x^P, y_P),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое;

(b) y_P — *минимальная* по Парето неопределенность в задаче $\langle Y, \{f(x^P, y), -R_f(x^P, y)\}\rangle$, то есть для любых $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f(x^P, y) \leqslant f(x^P, y_P), \quad -R_f(x^P, y) \leqslant -R_f(x^P, y_P),$$

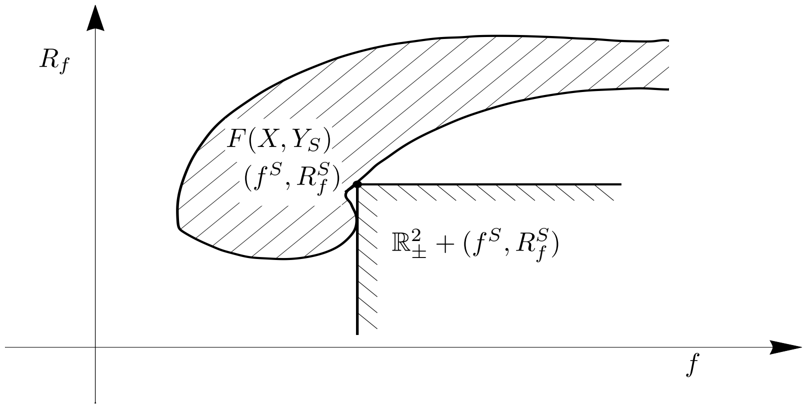

Рис. 1

где также по крайней мере одно из двух неравенств строгое.

Очевидно, что седловая точка по Парето является одновременно седловой точкой по Слейтеру, обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Геометрическая интерпретация. Здесь будем использовать множества

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2_{\pm} &= \{(f, R_f) \in \mathbb{R}^2 | f \geqslant 0, R_f \leqslant 0\}, \\ \mathbb{R}^2_{\mp} &= \{(f, R_f) \in \mathbb{R}^2 | f \leqslant 0, R_f \geqslant 0\}, \\ F(X, y_S) &= \bigcup_{x \in X} (f(x, y_S), R_f(x, y_S)), \\ F(x^S, Y) &= \bigcup_{y \in Y} (f(x^S, y), R_f(x^S, y)). \end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что множества $\mathbb{R}^2_{\pm}$ и $\mathbb{R}^2_{\mp}$ есть соответственно четвертая и вторая координатные четверти плоскости $\{f, R_f\}$; $F(X, y_S)$ представляет собой множество всех значений векторного критерия $(f(x, y_S), R_f(x, y_S))$, когда стратегия x «пробегает» все множество X (рис. 1), а неопределенность $y_S \in Y$ фиксирована; аналогично определяется множество $F(x^S, Y)$, только здесь уже «заморожена» стратегия x^S, а неопределенность y «пробегает» все значения из Y (рис. 2).

Согласно первому пункту определения 1 для каждой точки $(f(x^S, y), R_f(x^S, y))$ множества $F(x^S, Y)$ не может одновременно выполняться два строгих неравенства

$$f(x^S, y) < f(x^S, y_S) = f^S \quad \text{и} \quad R_f(x^S, y) > R_f(x^S, y_S) = R_f^S,$$

то есть не могут значения $f(x^S, y)$ быть меньшими f^S при одновременном увеличении $R_f(x^S, y)$ по сравнению с R_f^S для любых $y \in Y$. «Геометрически» этот факт означает, что ни одна из точек $(f(x^S, y), R_f(x^S, y))$ множества $F(x^S, Y)$ не может попасть внутрь угла

$$(f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)) + \mathbb{R}^2_{\mp}$$

(рис. 2). Этот угол представляет собой сдвиг второго координатного угла $\mathbb{R}^2_{\mp}$ из (13) на вектор $(f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S))$. Вообще говоря, пусто пересечение множества $F(x^S, Y)$ с внутренностью множества $(f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)) + \mathbb{R}^2_{\mp}$, то есть

$$F(x^S, Y) \cap \operatorname{int} \left((f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)) + \mathbb{R}^2_{\mp}\right) = \varnothing \tag{14}$$

(int(...) – внутренность множества (...)).

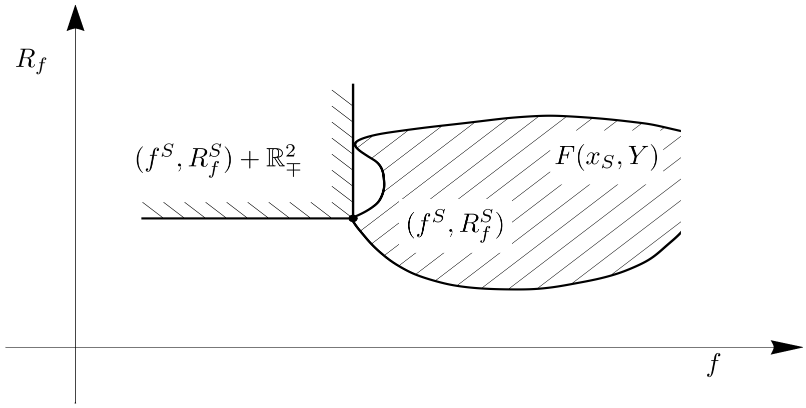

Рис. 2

Аналогично: согласно второму требованию определения 1 точки множества $F(X, y_S)$ не могут попасть внутрь угла $(f^S, R_f^S)+\mathbb{R}^2_{\pm}$ (рис. 1). Этот угол есть сдвиг четвертой координатной четверти $\mathbb{R}^2_{\pm}$ на вектор $(f^S = f(x^S), R_f^S = R_f(x^S, y_S))$. Здесь, аналогично (14),

$$F(X, y_S) \cap \operatorname{int}\left((f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)) + \mathbb{R}^2_{\pm}\right) = \varnothing.$$

Наконец, в заключение этого параграфа отметим, что слова «слабо гарантированный» появились потому, что в основе определения 1 стоит максимальность по Слейтеру (синонимы — слабая эффективность, слабый максимум по Парето).

§ 2. Достаточные условия

Способ построения слабо гарантированного решения. Предположим, что для задачи 1 найдена функция

$$\max_{z \in X} f(z, y). \tag{15}$$

Заметим, что функция (15) непрерывна на Y, если $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$ и множество X есть непустой компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда непрерывной на $X \times Y$ будет и функция риска $R_f(x, y)$ (как разность непрерывных функций).

Утверждение 1. *Если существуют постоянные $\alpha, \beta \in [0, 1]$ и пара $(x^S, y_S) \in X \times Y$ такие, что*

$$\max_{x \in X}\left(f(x, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S)\right) = f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S), \tag{16}$$

$$\min_{y \in Y}\left(f(x^S, y) - \beta \max_{z \in X} f(z, y_S)\right) = f(x^S, y_S) - \beta \max_{z \in X} f(z, y_S), \tag{17}$$

то слабо гарантированное по выигрышам решение задачи (1) *имеет вид*

$$(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)).$$

Deductio ad absurdum (доказательство от противного (лат.)): предположим, что нашлись постоянные $\alpha, \beta \in [0, 1]$ и соответствующая пара $(x^S, y_S) \in X \times Y$, для которых имеют место равенства (16) и (17), но эта пара не удовлетворяет одному из требований определения 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Выполнено (16), но первое требование определения 1 не имеет место. Тогда найдется стратегия $\overline{x} \in X$, для которой

$$f(\overline{x}, y_S) > f(x^S, y_S) = f^S, \quad R_f(\overline{x}, y_S) < R_f(x^S, y_S) = R_f^S,$$

или, что эквивалентно,

$$f(\overline{x}, y_S) > f(x^S, y_S), \quad -R_f(\overline{x}, y_S) > -R_f(x^S, y_S). \tag{18}$$

Умножая первое из этих неравенств на число $1-\alpha$ (постоянная $\alpha \in [0,1]$ участвует в (16)), второе — на α и складывая отдельно левые и правые части (18), приходим к

$$(1-\alpha)f(\overline{x}, y_S) - \alpha R_f(\overline{x}, y_S) > (1-\alpha)f(x^S, y_S) - \alpha R_f(x^S, y_S), \tag{19}$$

где знак строгого неравенства следует из следующего условия: постоянные $\alpha \in [0,1]$ и $1-\alpha$ одновременно в ноль не обращаются. С учетом явного вида функции риска

$$R_f(x, y_S) = \max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y) \quad (\text{при всех } x \in X)$$

получим из (19)

$$(1-\alpha)f(\overline{x}, y_S) - \alpha \left(\max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y) \right) = f(\overline{x}, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S) >$$
$$> (1-\alpha)f(x^S, y_S) - \alpha \left(\max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y) \right) = f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, x).$$

Поэтому справедливо строгое неравенство

$$f(\overline{x}, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, x) > f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S),$$

которое противоречит (16).

Случай 2. Выполнено равенство (17), но второе требование определения 1 не имеет место. В этом случае существует неопределенность $\overline{y}$, для которой

$$f(x^S, \overline{y}) < f(x^S, y_S), \quad R_f(x^S, \overline{y}) > R_f(x^S, y_S).$$

Опять-таки умножая первое из этих неравенств на число $1-\beta \in [0,1]$, фигурирующее в (17), второе — на $-\beta$ и складывая, получаем аналогично случаю 1, что

$$f(x^S, \overline{y}) - \beta \max_{z \in X} f(z, \overline{y}) < f(x^S, y_S) - \beta \max_{z \in X} f(z, y_S).$$

Это строгое неравенство противоречит (17).

Итак, при выполнении равенств (16) справедливо первое требование определения 1, а из (17) следует второе требование. Тогда тройка $(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)) = (x^S, f^S, R_f^S)$ и является слабо гарантированным по выигрышам и рискам решением задачи (1). Acta est fabula! (Пьеса сыграна! Употребляется в значении «все кончено», «конец наступил» (лат.)). $\square$

З а м е ч а н и е 4. Из утверждения 1 получаем следующий *способ* нахождения слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения (x^S, f^S, R_f^S) задачи (1).

Шаг 1^o: найти вектор-функцию $x(y)\colon Y \to X$, исходя из равенства

$$\max_{z \in X} f(z, y) = f(x(y), y) \quad \forall y \in Y. \tag{20}$$

Шаг 2^o: с помощью найденной $x(y)$ построить две функции:

$$F_\alpha(x, y) = f(x, y) - \alpha f(x(y), y), \quad F_\beta(x, y) = f(x, y) - \beta f(x(y), y), \tag{21}$$

где постоянные $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$.

Шаг 3^o: найти постоянные $\alpha^*, \beta^* \in [0,1]$ и пару $(x^S, y_S) \in X \times Y$, при которых

$$\max_{x \in X} F_{\alpha^*}(x, y_S) = F_{\alpha^*}(x^S, y_S), \quad \min_{y \in Y} F_{\beta^*}(x^S, y) = F_{\beta^*}(x^S, y_S). \tag{22}$$

Шаг 4^o: с помощью этой пары (x^S, y_S) выписать гарантированное по выигрышам и рискам решение в виде

$$(x^S, f^S, R_f^S) = (x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)).$$

Сведение к нахождению седловой точки.

Замечание 5. Если в способе нахождения слабо гарантированного решения (из замечания 4) потребовать, чтобы постоянные $\alpha = \beta \in [0,1]$, то равенства (22) перейдут в

$$\max_{x\in X} F_{\alpha^*}(x, y_S) = F_{\alpha^*}(x^S, y_S) = \min_{y\in Y} F_{\alpha^*}(x^S, y). \tag{23}$$

Выполнение цепочки равенств (23) означает, что пара $(x^S, y_S) \in X \times Y$ является седловой точкой антагонистической игры

$$\langle X, Y, F_{\alpha^*}(x,y)\rangle. \tag{24}$$

В игре (24) первый игрок за счет выбора стратегии $x \in X$ стремится к возможно *большему* значению скалярной функции выигрыша $F_{\alpha^*}(x,y)$, а второй, наоборот, стремится предельно *уменьшить* $F_{\alpha^*}(x,y)$ с помощью своей стратегии $y \in Y$. Решением игры (24) является седловая точка (x^S, y_S), определяемая цепочкой равенств (23). Алгоритм построения слабо гарантированного решения, предложенный в замечаниях 4 и 5, будет применен далее при получении его явного вида для одного достаточно общего класса задач вида (1).

Замечание 6. Так как

$$\max_{z\in X} f(z, y_S)$$

не зависит от $x \in X$, то стратегия $x^S \in X$, найденная из равенства (16), совпадает со стратегией x^S, удовлетворяющей равенству

$$\max_{x\in X} f(x, y_S) = f(x^S, y_S).$$

Поэтому утверждение 1 представимо в эквивалентном виде:

если существуют постоянная $\beta \in [0,1]$ и пара $(x^S, y_S) \in X \times Y$ такие, что

$$\max_{x\in X} f(x, y_S) = f(x^S, y_S), \quad \min_{y\in Y}(f(x^S, y) - \beta \max_{x\in X} f(x,y)) = f(x^S, y_S) - \beta \max_{x\in X} f(x, y_S),$$

то слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение задачи (1) *имеет вид:*

$$(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)).$$

§ 3. Линейно-квадратичная задача с ограничением на неопределенности

Постановка задачи. Так же как и в [14], рассматриваем линейно-квадратичный вариант ОЗН, но, в отличие от [14],

во-первых, неопределенность y — скалярная величина (в [14] использовался m-вектор $y \in \mathbb{R}^m$);

во-вторых, неопределенность $y \in \mathbb{R}$ является скалярной и изменяется в заданных границах $Y = [y_1, y_2]$, то есть может реализоваться любое y из отрезка $[y_1, y_2]$.

Итак, рассматриваем однокритериальную линейно-квадратичную задачу при скалярной ограниченной неопределенности (ОЗН), которая задана упорядоченной тройкой

$$\langle \mathbb{R}^n, Y, f(x,y)\rangle, \tag{25}$$

где $\mathbb{R}^n$ — евклидово n-мерное пространство стратегий x с евклидовой нормой $\|x\| = \sqrt{x'x}$, множество $Y = [y_1, y_2]$ неопределенностей y (заданы границы $y_1 < y_2$) и функция выигрыша

$$f(x,y) = x'Ax + 2(x'b)y + Cy^2 + 2a'x + 2cy + d. \tag{26}$$

В (26) постоянная $n \times n$-матрица A симметрична; n-векторы a и b постоянны; заданы числа C, c и d; штрих сверху означает операцию транспонирования.

В задаче (25), (26) ЛПР выбором подходящей стратегии $x \in \mathbb{R}^n$ стремится максимально увеличить выигрыш (значение функции выигрыша $f(x,y)$) и одновременно уменьшить риск.

При этом ЛПР ориентируется на возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$ ($Y = [y_1, y_2]$).

Построим явный вид слабо гарантированного по выигрышам и рискам решения (x^S, f^S, R_f^S) задачи (25), (26) (определение 1). При этом используем алгоритм, сводящийся к выполнению шагов $\mathbf{1^o}$–$\mathbf{4^o}$, перечисленных в замечании 4, где вместо шага $\mathbf{3^o}$ будем искать седловую точку (x^S, y_S), удовлетворяющую цепочке равенств (23) (замечание 5).

Шаг $\mathbf{1^o}$. Итак, исходя из равенства (20), найдем n-вектор-функцию $x(y)$, а именно, справедлива

Л е м м а 1. *Если $A < 0$, то*

$$\max_{z \in \mathbb{R}^n} f(z, y) = f(x(y), y) = (C - b'A^{-1}b)y^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y + (d - a'A^{-1}a) \quad \forall y \in [y_1, y_2], \tag{27}$$

где

$$x(y) = -A^{-1}(by + a). \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство

$$\max_{z \in \mathbb{R}^n} f(z, y) = f(x(y), y) \quad \forall y \in [y_1, y_2]$$

имеет место, если

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x(y)} = 2Ax(y) + 2by + 2a = 0_n \quad \forall y \in [y_1, y_2], \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x(y)} = 2A < 0.$$

(0_n — ноль-n-вектор, $A < 0 \Leftrightarrow$ квадратичная форма $x'Ax$ отрицательно определена.)

Отсюда, с учетом цепочки импликаций $A < 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, получаем (28). Подставляя (28) в (26), приходим к справедливости (27) при всех $y \in [y_1, y_2]$. □

Шаг $\mathbf{2^o}$. Построим функцию $F_\alpha(x, y)$ из (21), используя (27).

Л е м м а 2. *Если $A < 0$, то*

$$\begin{aligned} F_\alpha(x, y) = f(x, y) - \alpha f(x(y), y) = x'Ax + 2a'x + 2(x'b)y + \big((1-\alpha)C + \alpha b'A^{-1}b\big)\, y^2 + \\ + 2\,\big((1-\alpha)c + \alpha a'A^{-1}b\big)\, y + \big((1-\alpha)d + \alpha a'A^{-1}a\big). \end{aligned} \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, (29) сразу следует из (27) и (28). □

Шаг $\mathbf{3^o}$. Согласно замечанию 5 найдем постоянную α^* и седловую точку (x^S, y_S) функции $F_{\alpha^*}(x, y)$, то есть для α^* и (x^S, y_S) должна иметь иместо цепочка равенств

$$\max_{x \in X} F_{\alpha^*}(x, y_S) = F_{\alpha^*}(x^S, y_S) = \min_{y \in [y_1, y_2]} F_{\alpha^*}(x^S, y).$$

Л е м м а 3. *При $A < 0$ равенство*

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} F_\alpha(x, y) = F_\alpha(x(y), y) \quad \forall y \in [y_1, y_2], \alpha \in [0, 1] \tag{30}$$

справедливо, если

$$x(y) = -A^{-1}(by + a) \quad \forall y \in [y_1, y_2].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для (29) и при $A < 0$ равенство (30) выполнено, если

$$\left(\frac{dF_\alpha}{dx}\right)\Bigg|_{x(y)} = 2Ax(y) + 2by + 2a = 0_n \quad \forall y \in [y_1, y_2],$$

откуда получаем (28).

Итак, левое равенство в (23) имеет место для $x^S = -A^{-1}(by_S + a)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$, если только $A < 0$. Перейдем к правому равенству в (23):

$$\min_{y \in Y} F_{\alpha^*}(x^S, y) = F_{\alpha^*}(x^S, y_S).$$

А именно, найдем постоянную $\alpha^* \in [0,1]$ и неопределенность $y = y_S$, при которой

$$\min_{y\in[y_1,y_2]} F_{\alpha^*}(x(y),y) = F_{\alpha^*}(x(y_S),y_S),$$

где с учетом (29) и (18)

$$\begin{aligned} F_\alpha(x(y),y) = (b'y+a')A^{-1}(by+a) - 2a'A^{-1}(by+a) - 2(b'y+a')A^{-1}by + \\ + \left((1-\alpha)C + \alpha b'A^{-1}b\right)y^2 + 2\left((1-\alpha)c + \alpha a'A^{-1}b\right)y + \left((1-\alpha)d + \alpha a'A^{-1}a\right) = \\ = (1-\alpha)\left((C-b'A^{-1}b)y^2 + 2(c-a'A^{-1}b)y + (d-a'A^{-1}a)\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Постоянная $\alpha = 1$.

Л е м м а 4. *Если $A < 0$, то пара $(x(y),y)$, где n-вектор-функция $x(y)$ определена в* (28) *и неопределенность y принимает любые значения из $Y = [y_1,y_2]$, реализует слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение $(x(y), f(x(y),y), R_f(x(y),y))$ задачи* (25), (26), *при этом*

$$x(y) = -A^{-1}(by+a), \quad R_f(x(y),y) = \max_{z\in\mathbb{R}^n} f(z,y) - f(x(y),y) = 0,$$
$$f(x(y),y) = (C-b'A^{-1}b)y^2 + 2(c-a'A^{-1}b)y + (d-a'A^{-1}a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для пары $(x(y),y)$ при любых $y \in Y$ и вектор-функции $x(y)$, определенной в (28), и для $\alpha^* = 1$ имеет место цепочка равенств (23). Значение $f(x(y),y)$ получаем сразу из (27), а $R_f(x(y),y) = 0$, так как в силу (27) для всех $y \in Y$ имеет место равенство

$$\max_{z\in\mathbb{R}^n} f(z,y) = f(x(y),y).$$

$\square$

З а м е ч а н и е 7. Случай 1 соответствует варианту «информированного» ЛПР.

Случай 2. $0 \leqslant \alpha < 1$ (постоянная α может быть любой из $[0,1)$). Остается рассмотреть задачу

$$\min_{y\in[y_1,y_2]} \psi(y) = \psi(y_S), \quad \alpha \in [0,1), \tag{32}$$

где с учетом (31)

$$\psi(y) = \frac{F_\alpha(x(y),y)}{1-\alpha} = (C-b'A^{-1}b)y^2 + 2(c-a'A^{-1}b)y + (d-a'A^{-1}a). \tag{33}$$

Обозначим

$$M = C - b'A^{-1}b, \quad m = c - a'A^{-1}b, \quad k = d - a'A^{-1}a, \tag{34}$$

и выделим в задаче (32), (33) три случая: $M > 0$, $M < 0$ и $M = 0$ (см. приведенные далее леммы 5, 6 и 7 соответственно).

Л е м м а 5. *Если в задаче* (32), (33)

$$C > b'A^{-1}b, \tag{35}$$

то для (32)

(a) *при* $-\frac{m}{M} > y_2$ *будет* $y_S = y_2$,

(b) *при* $-\frac{m}{M} < y_1$ *будет* $y_S = y_1$,

(c) *при* $-\frac{m}{M} \in [y_1,y_2]$ *будет* $y_S = -\frac{m}{M}$.

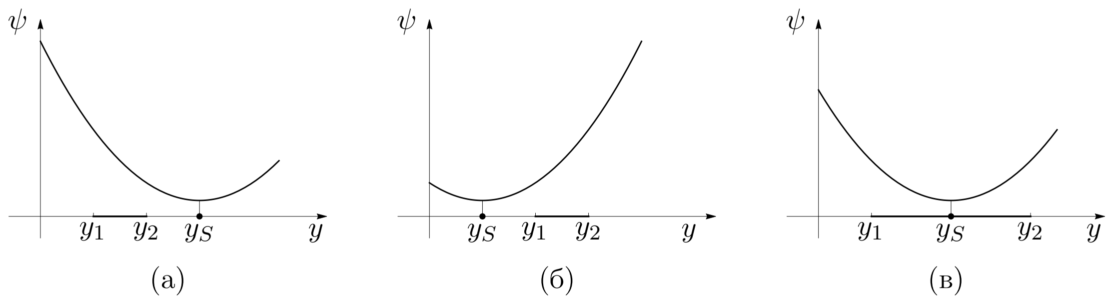

Рис. 3

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, с учетом (33) и (34) задачу (32) можно представить в виде

$$\min_{y\in[y_1,y_2]}(My^2+2my+k)=M(y_S)^2+2my_S+k,$$

причем согласно (35) будет $M>0$. Следовательно, минимум функции $\psi(y)$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке $y^*=-\frac{m}{M}$ и функция $\psi(y)$ строго выпукла по $y\in\mathbb{R}$. Тогда справедливость утверждений (a), (b) и (c) сразу следует из рис. 3, *а*, *б*, *в* соответственно.

□

Л е м м а 6. *Если в задаче* (32), (33)

$$C<b'A^{-1}b, \tag{36}$$

то для (32)

(a) *при* $y_2+y_1\geqslant-\frac{2m}{M}$ *будет* $y_S=y_2$,

(b) *при* $y_2+y_1<-\frac{2m}{M}$ *будет* $y_S=y_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (36) постоянная $M<0$. Тогда функция $\psi(y)$, определенная в (33), будет [16] строго вогнутой по y на отрезке $[y_1,y_2]$, а строго вогнутая на отрезке функция достигает своего максимума на концах отрезка [17, с. 55]. Поэтому [17, с. 54]

$$\min_{y\in[y_1,y_2]}\psi(y)=\psi(y_S)=\min\{\psi(y_1),\psi(y_2)\}.$$

Составим разность $\psi(y_2)-\psi(y_1)$, которую с помощью (33) и обозначений (34) представим в виде

$$\psi(y_2)-\psi(y_1)=(y_2-y_1)(M(y_2+y_1)+2m). \tag{37}$$

Пусть теперь $y_2+y_1\geqslant-\frac{2m}{M}$ и $M<0$. Отсюда

$$M(y_2+y_1)+2m\leqslant 0,$$

и поэтому согласно (37) будет $\psi(y_2)\leqslant\psi(y_1)$, откуда сразу следует справедливость утверждения (a) леммы 6.

Если же $y_2+y_1<-\frac{2m}{M}$, то $M(y_2+y_1)+2m>0$, и из (37) получаем $\psi(y_2)>\psi(y_1)$, поэтому в (32) будет $y_S=y_1$. □

Л е м м а 7. *Если в задаче* (32), (33)

$$C=b'A^{-1}b,$$

то для (32)

(a) *при* $m>0$ *будет* $y_S=y_1$,

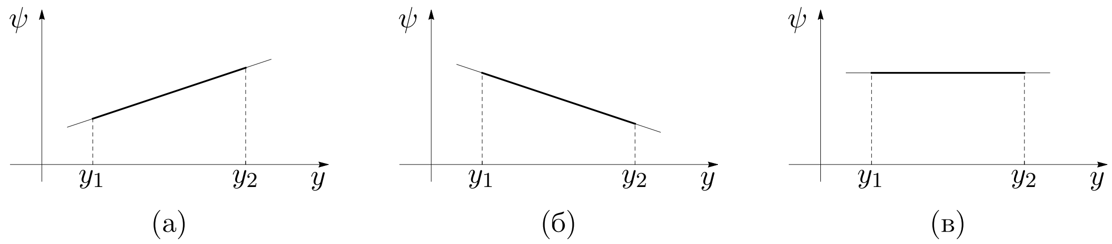

Рис. 4

(b) *при* $m < 0$ *будет* $y_S = y_2$,

(c) *при* $m = 0$ *будет* $y_S = \forall y \in [y_1, y_2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (32) имеет место равенство $M = 0$. Согласно (33) тогда задачу (32) представим в виде

$$\min_{y\in[y_1,y_2]}(my + k) = my_S + k.$$

Справедливость утверждений (a), (b), (c) леммы 7 получаем из рис. 4, *а*, *б*, *в* соответственно. □

З а м е ч а н и е 8. Остановимся подробнее на ограничении (35) при выполнении требования $A < 0$ (по лемме 6).

Условие $C > b'A^{-1}b$, диктуемое требованием (35) леммы 7, имеет место, если $C > 0$. Действительно, имеет место цепочка импликаций $A < 0 \Rightarrow A^{-1} < 0 \Rightarrow b'A^{-1}b \leqslant 0$ при всех $b \in \mathbb{R}^n$, и поэтому при $C > 0$ будет $C > 0 \geqslant b'A^{-1}b$.

При $C < 0$ требование $C > b'A^{-1}b$ выполняется в случае, если норма $\|C\|$ достаточно мала.

Аналогичные рассуждения нетрудно провести по поводу ограничения (36).

Шаг 4^o. Объединим теперь результаты лемм 4–7. При этом будем использовать стратегии

$$x^{(l)} = -A^{-1}(by_l + a), \quad x^{(3)} = -A^{-1}(b\frac{m}{M} + a) \quad (l = 1, 2),$$

числа

$$\frac{m}{M} = \frac{c - a'A^{-1}b}{C - b'A^{-1}b}, \quad k = d - a'A^{-1}a,$$

выигрыши

$$f(x(y), y) = My^2 + 2my + k, \ y \in [y_1, y_2]$$

и функцию риска

$$\begin{aligned}
&R_f(x, y) = f(x(y), y) - f(x, y) = \\
&= (C - b'A^{-1}b)y^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y + d - a'A^{-1}a - x'Ax - 2(x'b)y - 2a'x - Cy^2 - 2cy - d = \\
&\qquad = -x'Ax - 2(x'b)y - 2a'x - b'A^{-1}by^2 - 2a'A^{-1}by - a'A^{-1}a,
\end{aligned}$$

причем

$$R_f(x(y), y) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} R_f(x, y) = \max_{z\in\mathbb{R}^n} f(z, y) - \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x, y) = 0$$

при всех $y \in [y_1, y_2]$.

Следующее утверждение объединяет леммы 3–7.

У т в е р ж д е н и е 2. *Предположим, что в задаче* (25), (26) *матрица* $A < 0$. *Тогда слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение* (x^S, f^S, R^S_f) *этой задачи имеет следующий вид:*

(1) *при любых* $y \in [y_1, y_2]$

$$\begin{aligned}
&x^S = -A^{-1}(by + a), \quad R^S_f = 0,\\
&f^S = (C - b'A^{-1}b)y^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y + (d - a'A^{-1}a);
\end{aligned}$$

(2) *если* $C > b'A^{-1}b$, *то*

(a) *при* $\frac{c-a'A^{-1}b}{C-b'A^{-1}b} > y_2$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_2 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (C - b'A^{-1}b)(y_2)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y_2 + (d - a'A^{-1}a);$$

(b) *при* $\frac{c-a'A^{-1}b}{C-b'A^{-1}b} < y_1$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_1 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (C - b'A^{-1}b)(y_1)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y_1 + (d - a'A^{-1}a);$$

(c) *при* $-\frac{c-a'A^{-1}b}{C-b'A^{-1}b} \in [y_1, y_2]$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(-b\frac{c - a'A^{-1}b}{C - b'A^{-1}b} + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = -\frac{(c - a'A^{-1}b)^2}{C - b'A^{-1}b} + (d - a'A^{-1}a);$$

(3) *если* $C < b'A^{-1}b$, *то*

(a) *при* $y_1 + y_2 \geqslant -2\frac{c-a'A^{-1}b}{C-b'A^{-1}b}$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_2 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (C - b'A^{-1}b)(y_2)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y_2 + (d - a'A^{-1}a);$$

(b) *при* $y_1 + y_2 \leqslant -2\frac{c-a'A^{-1}b}{C-b'A^{-1}b}$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_1 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (C - b'A^{-1}b)(y_1)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y_1 + (d - a'A^{-1}a);$$

(4) *если* $C = b'A^{-1}b$, *то*

(a) *при* $c - a'A^{-1}b > 0$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_1 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (c - a'A^{-1}b)y_1 + (d - a'A^{-1}a);$$

(b) *при* $c - a'A^{-1}b < 0$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by_2 + a), \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = (c - a'A^{-1}b)y_2 + (d - a'A^{-1}a);$$

(c) *при* $c - a'A^{-1}b = 0$ *будет*

$$x^S = -A^{-1}(by + a), \quad \forall y \in [y_1, y_2], \quad R_f^S = 0,$$
$$f^S = d - a'A^{-1}a.$$

$\square$

§ 4. Заключение

Простейшей конфликтной задачей при неопределенности была и остается «игра с природой», где следует выбрать действие (стратегию), оптимизирующее заданный критерий (например, прибыль). При этом каждое действие сопровождается неполнотой или неточностью информации (неопределенностью) о результатах такого действия. Одновременно возникает вопрос о риске, сопровождающем достигнутый результат. Целое направление исследований такого плана выделяется специальным видом неопределенностей, о которых известны лишь границы изменения, но отсутствуют статистические характеристики.

Примером таких неопределенностей может служить задача о диверсификации между различными валютами годового вклада [18].

Неопределенности, о которых известны лишь границы изменения, в России получили название «дурные неопределенности» из-за непредсказуемости их реализаций. Именно для оценки «действий» таких неопределенностей и используется функция риска по Нихансу–Сэвиджу, значение которой при конкретной стратегии и является мерой риска (ЛПР стремится уменьшить риск), и наилучшее для ЛПР значение характеризуется нулевым риском.

Кроме того, напомним, что экономисты подразделяют ЛПР на три группы. К первой относятся те, кто не любит рисковать (рискофобы), вторые — любители риска (рискофилы) и, наконец, третьи, кто решил учитывать как выигрыши, так и риски (рисконейтралы). В определении 1 мы ограничились ЛПР-*рисконейтралом*, хотя несомненный интерес представляло бы рассмотрение случаев в играх, когда разные игроки относятся к разным категориям. Эти вопросы надеемся рассмотреть в дальнейшем при переносе подхода на многокритериальные и игровые задачи при неопределенности.

Процесс принятия решения в ОЗН $\Gamma^{(1)}$ развертывается следующим образом. ЛПР выбирает и использует свою стратегию $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Независимо от действий ЛПР, в $\Gamma^{(1)}$ реализуется неопределенность y (может быть любая из множества Y). На всех таких парах $(x, y) \in X \times Y$ определена функция выигрыша $f(x, y)$. На содержательном уровне и до статьи [14] задача ЛПРа заключалась в выборе такой своей стратегии (при приведенном правиле развертывания $\Gamma^{(1)}$), чтобы его выигрыш стал как можно большим. При этом ЛПР должен учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$. Последнее требование приводит к необходимости для ЛПРа оценивать множество

$$f(x, Y) = \bigcup_{y \in Y} f(x, y).$$

Подобная неоднозначность $f(x, y)$, в свою очередь, приводит к необходимости выбора такой функции $f[x]$, которая обладала бы *свойством гарантии*. Согласно [19, с. 194] **гарантия — это условие, обеспечивающее осуществление, исполнение чего-либо**. Самой очевидной и наглядной гарантией для ЛПРа в $\Gamma^{(1)}$ является так называемая [11] *сильная гарантия*, реализуемая скалярной функцией

$$f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y). \tag{38}$$

Действительно, из (38) сразу следует, что для каждой ситуации $x \in X$ имеет место

$$f[x] \leqslant f(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Итак, $f[x]$ является гарантией потому, что при любых неопределенностях $y \in Y$ и в каждой ситуации $x \in X$ значение $f(x, y)$ не может стать меньше $f[x]$. Мы же предложили в [14] построить еще одну гарантию $\min\limits_{y}(-R_f(x, y)) = -R_f[x]$, где $R_f(x, y)$ является функцией риска по Нихансу–Сэвиджу (2). Наконец, сильно гарантирующая стратегия x^P, входящая в сильно гарантирующее решение $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ является максимумом по Парето в двухкритериальной задаче «сильных гарантий» $\Gamma_2 = \langle X, f[x], -R_f[x] \rangle$, и мы свели задачу к построению максимизатора x^P в $\max_x(f[x] - R_f[x]) = f[x^P] - R_f[x^P]$, тем самым реализуя аналог максимина, предложенный в [11] первым автором. В этом подходе, «с точки зрения максимина», внутренний минимум заменен на два минимума: $\min\limits_{y\in Y} f(x,y)$ и $\min\limits_{y\in Y} -R_f(x,y)$, а внешний максимум — на максимум по Парето в Γ_2. В [11] установлено существование $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ при компактности X и Y, а также непрерывности $f(x,y)$ на $X\times Y$. Подчеркнем еще раз, что в [11] мы ограничились лишь сильными гарантиями $f[x], -R_f[x]$. Они называны «сильными», ибо они самые «нижние» из возможных. Можно было бы использовать и так называемые векторные гарантии, что и сделано в настоящей статье: компоненты $f[x], -R_f[x]$ образуют *векторную гарантию* для вектора $(f(x,y), -R_f(x,y))$, если при $\forall y\in Y$ и для каждого $x\in X$ не могут реализоваться одновременно два строгих неравенства:

$$f(x,y) < f[x], \quad -R_f(x,y) < -R_f[x],$$

иначе говоря, векторную гарантию $(f[x], -R_f[x])$ нельзя сразу по всем компонентам уменьшить за счет выбора $y\in Y$ с помощью двухкомпонентной вектор-функции $(f(x,y), -R_f(x,y))$. С точки зрения теории векторной оптимизации для каждой ситуации $x\in X$ вектор $(f[x], -R_f[x])$ является минимумом по Слейтеру (слабоэффективным) в двухкритериальной задаче

$$\Gamma(x) = \langle Y, \{f(x,y), -R_f(x,y)\}\rangle\,.$$

Аналогично используя другие векторные оптимумы (точнее, минимумы по Парето, Борвейну, Джоффриону, конусную оптимальность), можно ввести целый набор векторных гарантий (соответственно по Парето, Борвейну и так далее). Эти гарантии обладают тем свойством, что их значение, *во-первых*, не меньше, чем соответствующие компоненты вектора сильных гарантий $(f[x], -R_f[x])$, но, *во-вторых*, могут быть и большими. А ведь мы стремимся к возможному увеличению выигрышей каждого игрока (что достигается, в частности, и увеличением их гарантий!). В этом отношении перечисленные векторные гарантии предпочтительнее сильных. Однако при этом не следует забывать: чтобы осуществлять переход от $\langle X, Y, \{f(x,y), -R_f(x,y)\}\rangle$ при неопределенности к задаче гарантий $\langle X, \{f[x], -R_f[x]\}\rangle$ и затем воспользоваться замечаниями 4–6, необходимо, чтобы новые критерии-гарантии $f[x], -R_f[x]$ были непрерывными на X.

Наконец, используемый в настоящей статье способ «борьбы с неопределенностями» для ОЗН является воплощением метода «аналог седловой точки» из [10], где в определении седловой точки минимум заменен на минимум по Слейтеру, а максимум — на максимум по Слейтеру.

Почему же в качестве «хорошего» решения ОЗН предлагается слабо гарантированное по выигрышам и рискам решение?

Во-первых, оно отвечает на исконно русский вопрос: «Что делать?», когда сильные гарантии из [14] уж «слишком плохие»; в ответ предлагается следовать тройке $(x^S, f[x^S], R_f[x^S])$, формализованной определением 1.

Во-вторых, эта стратегия x^S «обеспечит» для ЛПРа исходы $f(x^S, y)$ не меньше $f[x^S]$ с риском $R_f(x^S, y)$ не более $R_f[x^S]$ при реализации любой неопределенности $y\in Y$ (то есть x^S устанавливает нижние границы для реализующихся при $x = x^S$ исходов и верхние границы для рисков, сопровождающих эту реализацию).

В-третьих, ситуация x^S реализует «самые большие» (в «векторном смысле») — максимальные по Слейтеру — исходы и соответствующие им «минус»-риски; иначе говоря, не существует другой стратегии $x\neq x^S$, при которой бы увеличивалась гарантия по исходам и одновременно уменьшалась гарантия $R_f[x^S]$ по рискам.

В-четвертых, улучшение гарантированных выигрышей для ЛПРа (по сравнению с $f[x^S]$) неизбежно вызовет увеличение гарантированного риска (опять-таки по сравнению с $R_f[x^S]$), а уменьшение такого риска опять-таки автоматически «спровоцирует» уменьшение гарантированного выигрыша.

В-пятых, если потребовать компактность X, Y и непрерывность $f(x,y)$ на $X\times Y$, то гарантии $f[x]$ и $R_f[x]$ существуют и непрерывны на X. Поэтому вопрос существования решения, формализованного определением 1, «упирается» в вопрос существования седловой точки для антагонистической игры «гарантий» (24); здесь уже возникает возможность широкого применения многочисленных теорем существования седловой точки, в том числе из [20] и продолжателей.

Авторы благодарят участников семинара факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ «Риски в сложных системах управления» за обсуждение работы и замечания.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14–00–90408 и НАН Украины, проект № 03–01–14.

Список литературы

1. Найт Ф.Х. Риск, неопределенность и прибыль. М.: Дело, 2003. 360 с.
2. Череминов Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: Инфо-М, 2008. 842 с.
3. Жуковский В.И. Риски при неопределенных ситуациях. М.: URSS, Ленанд, 2011. 328 с.
4. Гранитулов В.Н. Экономический риск. М.: Дело и сервис, 1990. 112 с.
5. Уткин Э.А. Риск-менеджмент. М.: ЭКМОС, 1998. 288 с.
6. Сиразетдинов Т.К., Сиразетдинов Р.Т. Проблема риска и его моделирование // Проблемы человеческого риска. 2007. Вып. 1. С. 31–43.
7. Шахов В.В. Введение в страхование. Экономический аспект. М.: Финансы и статистика, 2001. 286 с.
8. Цветкова Е.В., Арлюкова Н.О. Риск в экономической деятельности. СПб.: ИВЭСЭП, 2002. 64 с.
9. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The vector-valued maximin. New York etc.: Academic Press, 1994. 403 p.
10. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 27–44.
11. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 2. С. 3–45.
12. Zhukovskiy V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G. Existence of Berge equilibrium in conflicts under uncertainty // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. Issue 4. P. 640–655. DOI: 10.1134/S0005117916040093
13. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, Красанд, 2002. 368 с.
14. Zhukovskiy V.I., Sachkov S.N., Sachkova E.N. Niehans–Savage risk in solution of one-criterion problem // East European Science Journal. 2018. Vol. 37. Issue 9. P. 42–51.
15. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
16. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2003. 824 с.
17. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Книжный дом «Либроком», URSS, 2009. 286 с.
18. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Topchishvili A.L. Problem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2014. Vol. 20. No. 1. P. 1–14.
19. Кузнецов С.А. Большой толковый словарь русского языка. СПб.: Норинт, 2003. 1535 с.
20. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984. 495 с.

Поступила в редакцию 27.07.2018

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет, 119234, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Болдырев Михаил Владиславович, студент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет, 119234, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52.
E-mail: m_boldyrev@list.ru

Кириченко Михаил Михайлович, студент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет, 119234, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52.
E-mail: moyomylo11@gmail.com

V. I. Zhukovskii, M. V. Boldyrev, M. M. Kirichenko

A solution guaranteed for a risk-neutral person to a one-criterion problem: an analog of the vector saddle point

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 13–32 (in Russian).

Keywords: strategy, uncertainty, criterion, Slater optimum, Pareto optimum, vector saddle point.

MSC2010: 91A10

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-02

What can be people's attitude towards risk? In a series of financial economics publications, three main attitudes towards risk are distinguished:

1) risk-averse;
2) risk-neutral;
3) risk-loving.

It is inherent for risk-averse decision makers to follow the principle of guaranteed results (maximin). Risk-loving decision makers are prone to following the principle of Niehans–Savage's principle of minimax regret. This article defines the concept of a solution, weakly guaranteed simultaneously for outcomes and risks, to a one-criterion problem with uncertainty (OCPU) (the formalization is based on the concept of a vector saddle point from the theory of multicriteria problems with uncertainty) for risk-neutral decision makers. Sufficient conditions are established with the help of which an explicit form of the introduced solution for a sufficiently general form of OCPU with a limited uncertainty is found.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14–00–90408) and National Academy of Sciences of Ukraine (project no. 03–01–14).

REFERENCES

1. Knight F.H. *Risk, Uncertainty and Profit*, New York: The Riverside Press, 1921. Translated under the title *Risk, neopredelennost' i pribyl'*, Moscow: Delo, 2003, 360 p.
2. Chereminov Yu.N. *Mikroekonomika. Prodvinutyi uroven'* (Microeconomics. Advanced level), Moscow: Info-M, 2008, 842 p.
3. Zhukovskii V.I. *Riski pri neopredelennykh situatsiyakh* (Risks in uncertain situations), Moscow: URSS, Lenand, 2011, 328 p.
4. Granitulov V.N. *Ekonomicheskii risk* (Economical risk), Moscow: Delo i servis, 1990, 112 p.
5. Utkin E.A. *Risk-menedzhment* (Risk management), Moscow: EKMOS, 1998, 288 p.
6. Sirazetdinov T.K., Sirazetdinov R.T. Problem of risk and its modeling, *Problemy chelovecheskogo riska*, 2007, issue 1, pp. 31–43.
7. Shakhov V.V. *Vvedenie v strakhovanie. Ekonomicheskii aspekt* (Introduction into insurance. Economical aspect), Moscow: Finansy i statistika, 2001, 286 p.
8. Tsvetkova E.V., Arlyukova N.O. *Risk v ekonomicheskoi deyatel'nosti* (Risk in economical activities), Saint Petersburg: IVESEP, 2002, 64 p.
9. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The vector-valued maximin*, New York etc.: Academic Press, 1994, 403 p.
10. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. I. Analogue of a saddle-point, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya*, 2013, vol. 5, issue 1, pp. 27–44 (in Russian).
11. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. II. Analogue of a maximin, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya*, 2013, vol. 5, issue 2, pp. 3–45 (in Russian).
12. Zhukovskiy V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G. Existence of Berge equilibrium in conflicts under uncertainty, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 4, pp. 640–655. DOI: 10.1134/S0005117916040093
13. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N., Smirnova L.V. *Garantirovannye resheniya konfliktov i ikh prilozeniya* (Guaranteed solutions of conflicts and their applications), Moscow: URSS, Krasand, 2002, 368 p.
14. Zhukovskiy V.I., Sachkov S.N., Sachkova E.N. Niehans–Savage risk in solution of one-criterion problem, *East European Science Journal*, 2018, vol. 37, issue 9, pp. 42–51.
15. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* (Pareto optimal solutions of multicriteria problems), Moscow: Fizmatlit, 2007, 256 p.
16. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* (Methods of optimization), Moscow: Faktorial Press, 2003, 824 p.
17. Morozov V.V., Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* (Research operations in tasks and exercises), Moscow: Librokom, URSS, 2009, 286 p.
18. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Topchishvili A.L. Problem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 1–14.
19. Kuznetsov S.A. *Bol'shoi tolkovyi slovar' russkogo yazyka* (Big thesaurus of the Russian language), Saint Petersburg: Norint, 2003, 1535 p.

20. Vorob'ev N.N. *Osnovy teorii igr. Beskoalitsionnye igry* (Basics of the game theory. Non-coalitional games), Moscow: Nauka, 1984, 495 p.

Received 27.07.2018

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 52, Moscow, 119234, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Boldyrev Mikhail Vladislavovich, Student, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 52, Moscow, 119234, Russia.
E-mail: m_boldyrev@list.ru

Kirichenko Mikhail Mikhailovich, Student, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, bld. 52, Moscow, 119234, Russia.
E-mail: moyomylo11@gmail.com