УДК 517.977

© ***А. Я. Нарманов, К. А. Щелчков***

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматривается дифференциальная игра двух лиц, описываемая системой вида

$$\dot{x} = f(x, v) + g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Множеством значений управлений убегающего является конечное подмножество фазового пространства. Множеством значений управлений преследователя является компактное подмножество фазового пространства. Целью убегающего является уклонение от встречи, то есть обеспечить состояние системы не ближе некоторой окрестности нуля. Получены достаточные условия разрешимости задачи уклонения в классе кусочно-программных стратегий убегающего на бесконечном и любом конечном интервалах времени. Условия накладываются на вектограмму скоростей в нулевой точке фазового пространства. В случае уклонения от встречи на бесконечном интервале времени эти условия обеспечивают некоторое преимущество на убегающего. Для доказательства полученных результатов существенную роль играют свойства положительного базиса.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейная система, уклонение от встречи, дискретное управление.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-06

Введение

Теория дифференциальных игр — раздел математической теории управления, который занимается изучением управления объектами в конфликтных ситуациях, описываемых дифференциальными уравнениями. Фундаментальный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Н. Н. Красовского и Л. С. Понтрягина. В работах Н. Н. Красовского и его учеников [1–3] развит позиционный подход к дифференциальным играм. Идею рассматривать дифференциальную игру с двух точек зрения предложил и развил Л. С. Понтрягин [4]. При таком подходе на первый план выдвигается один из игроков. Основополагающие результаты по решению линейных дифференциальных игр убегания принадлежат Л. С. Понтрягину и Е. Ф. Мищенко [5,6]. Они получили условия на параметры процесса, достаточные для разрешимости задачи уклонения на всем бесконечном полуинтервале времени. Метод Л. С. Понтрягина – Е. Ф. Мищенко получил название «метод маневра обхода». Нелинейная задача уклонения рассматривалась в работах [7–17], где были предложены новые подходы и методы ее решения. В частности, в работах [11, 12] был предложен метод решения задачи уклонения, получивший название «метод уклонения по направлению». Достаточно тонкие условия убегания дает метод инвариантных подпространств. Плодотворным оказался метод Ф. Л. Черноусько [13–17].

В работе [18] было введено понятие положительного базиса, которое в работах [18, 19] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. В работах [20–22] свойства положительного базиса использовались для исследования управляемых систем на многообразиях. В работах [23–27] свойства положительного базиса были использованы для исследования задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных дифференциальных играх с равными возможностями игроков. В работе [28] на основании свойств положительного базиса были получены условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре двух лиц.

В данной работе получены условия разрешимости задачи уклонения в нелинейных дифференциальных играх двух лиц, причем свойства положительного базиса при рассмотрении данной задачи играют существенную роль.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, v) + g(x, u), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $v_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $U \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f\colon \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ для каждого $v \in V$ липшицева по x. Функция $g\colon \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ — липшицева по совокупности переменных.

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_q < \ldots .$$

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\eta = T.$$

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией* W убегающего E называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, \infty)$ ($[0, T]$), а W_σ — семейство отображений d_r, $r = 0, 1, \ldots, \eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ точку $\overline{v}_r \in V$.

Под управлением преследователя будем понимать произвольную измеримую функцию $u\colon [0, \infty) \to U$. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит уклонение от встречи*, если существуют $\varepsilon > 0$ и кусочно-постоянная стратегия W убегающего E такие, что для любого допустимого управления преследователя $u(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| > \varepsilon$ для любого $\tau \in [0, \infty)$ ($[0, T]$).

Определение 3 ([18]). Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_n \geqslant 0$ такие, что

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i.$$

Введем следующие обозначения: $\operatorname{int} A$ — внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A; ∂A — граница множества A; $O_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x; $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиусом ε с центром в точке x; $H(q) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, q) \leqslant \|q\|^2\}$; $H(Q) = \bigcap\limits_{q \in Q} H(q)$; $d(Q) = \max\limits_{a \in Q} \|q\|$, где Q — компакт.

§ 2. Теорема об уклонении на полуоси

Теорема 1. *Пусть* $f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)$ *образуют положительный базис и*

$$-g(0, U) \subset \operatorname{int} H(f(0, V)).$$

Тогда в игре $\Gamma(x_0)$ *происходит уклонение от встречи для любого* $x_0 \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. В данном пункте строится некоторый набор конусов, который будет использоваться в дальнейшем.

Без ограничения общности можно считать, что все точки $f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)$ являются попарно различными вершинами выпуклого многогранника $\operatorname{co}\{f(0, v_1), \ldots, f(0, v_m)\}$. Отсюда и из свойств положительного базиса следует, что $f(0, v_j) \neq 0$ для всех j. Пусть L_2 — константа Липшица функции $g(\cdot, \cdot)$, $L_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,m} \overline{L}_j$, где $\overline{L}_j$ — константа Липшица для функции $f(\cdot, v_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

В силу свойств положительного базиса [18] для любого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, существует индекс $j = 1, \ldots, m$ такой, что $\langle f(0, v_j), p\rangle > 0$. По теореме Вейерштрасса, существует $\alpha_1 > 0$ такое, что

$$\alpha_1 = \min_{\|p\|=1} \max_{j=1,\ldots,m} \langle f(0, v_j), p\rangle.$$

Для каждого $j = 1, \ldots, m$ определим множество C_j следующим образом:

$$C_j = \left\{ \lambda p \,\middle|\, \lambda \geqslant 0,\, p \in \mathbb{R}^k,\, \|p\| = 1,\, \left\langle \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|}, p \right\rangle \geqslant \frac{\alpha_1}{d(f(0, V))} \right\}.$$

Отметим, что множества C_j, $j = 1, \ldots, m$, являются выпуклыми конусами и

$$\bigcup_{j=1,\ldots,m} C_j = \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^k$, $x \neq 0$. Тогда для точки $p = x/\|x\|$ существует индекс $j = 1, \ldots, m$ такой, что $\langle f(0, v_j), p\rangle \geqslant \alpha_1$. При этом $\langle f(0, v_j)/\|f(0, v_j)\|, p\rangle \geqslant \alpha_1/\|f(0, v_j)\| \geqslant \alpha_1/d(f(0, V))$. Поэтому, $x \in C_j$, и равенство (1) доказано.

2⁰. В данном пункте явно определим числа $\varepsilon_1 > 0$, $\mu_1 \in (0, 1)$, для которых включение $-g(x, U) \subseteq H(\mu_1 f(0, V))$ выполнено для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$.

Так как множество $g(0, U)$ — компакт и в силу условий теоремы справедливо включение $-g(0, U) \subset \operatorname{int} H(f(0, V))$, то имеет место следующее неравенство:

$$\min_{u \in U,\, q \in \partial H(f(0,V))} \|q - (-g(0, u))\| = h > 0.$$

Обозначим точки, на которых данный минимум достигается, $\overline{u} \in U$ и $q_\iota \in \partial H(f(0, v_\iota))$, где $\iota \in \{1, \ldots, m\}$. Отметим, что q_ι является проекцией точки $-g(0, \overline{u})$ на гиперплоскость $\partial H(f(0, v_\iota))$, следовательно,

$$\left\langle \frac{f(0, v_\iota)}{\|f(0, v_\iota)\|}, \frac{q_\iota - (-g(0, \overline{u}))}{\|q_\iota + g(0, \overline{u})\|} \right\rangle = 1.$$

Пусть

$$\mu_1 = \frac{d(f(0, V)) - 2h/3}{d(f(0, V))}, \quad H(\mu_1 f(0, V)) = \bigcap_{v \in V} H(\mu_1 f(0, v)).$$

Оценим величину $\mu_1 \|f(0, v_j)\|$ для произвольного $j = 1, \ldots, m$:

$$\mu_1 \|f(0, v_j)\| = \left(\frac{d(f(0, V)) - 2h/3}{d(f(0, V))} \right) \|f(0, v_j)\| = \|f(0, v_j)\| - \frac{\|f(0, v_j)\| 2h/3}{d(f(0, V))} \geqslant$$

$$\geqslant \|f(0, v_j)\| - \frac{d(f(0, V)) 2h/3}{d(f(0, V))} = \|f(0, v_j)\| - 2h/3.$$

Пусть $q \in \partial H(\mu_1 f(0, v_j))$, $j = 1, \ldots, m$, и $u \in U$. Отметим, что

$$\left\langle q + (1 - \mu_1) f(0, v_j), \frac{\mu_1 f(0, v_j)}{\|\mu_1 f(0, v_j)\|} \right\rangle = \left\langle q, \frac{\mu_1 f(0, v_j)}{\|\mu_1 f(0, v_j)\|} \right\rangle + \left\langle (1 - \mu_1) f(0, v_j), \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|} \right\rangle =$$

$$= \|\mu_1 f(0, v_j)\| + (1 - \mu_1)\|f(0, v_j)\| = \|f(0, v_j)\|.$$

Поэтому, по определению, $q + (1 - \mu_1) f(0, v_j) \in \partial H(f(0, v_j))$. Тогда

$$\|q - (-g(0, u))\| = \|q + (1 - \mu_1) f(0, v_j) - (-g(0, u)) - (1 - \mu_1) f(0, v_j)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|q + (1 - \mu_1) f(0, v_j) - (-g(0, u))\| - \|(1 - \mu_1) f(0, v_j)\| \geqslant$$

$$\geqslant h - \|f(0,v_j)\| + (\|f(0,v_j)\| - 2h/3) = h/3.$$

Из неравенства

$$\left\langle -g(0,u), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|}\right\rangle = \left\langle q, \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|}\right\rangle - \left\langle q-(-g(0,u)), \frac{\mu_1 f(0,v_j)}{\|\mu_1 f(0,v_j)\|}\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu_1 f(0,v_j)\| - \|q-(-g(0,u))\| < \|\mu_1 f(0,v_j)\|,$$

получаем включение $-g(0,U) \subset \operatorname{int} H(\mu_1 f(0,v_j))$. Поэтому

$$-g(0,U) \subset \operatorname{int} H(\mu_1 f(0,V)).$$

Отметим, что

$$\min_{u\in U,\, q\in\partial H(\mu_1 f(0,V))} \|q-(-g(0,u))\| \geqslant \frac{h}{3} > 0. \tag{2}$$

Определим число $\varepsilon_1 = h/(3L_2)$. Тогда, в силу (2) и липшицевости функции $g(\cdot,\cdot)$, для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$ справедливо неравенство $\|g(0,u)-g(x,u)\| \leqslant L_2\|x\| \leqslant L_2 h/(3L_2) = h/3$ для любого $u \in U$, и поэтому

$$-g(x,U) \subseteq H(\mu_1 f(0,V)). \tag{3}$$

3^0. В данном пункте укажем число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ справедливо включение

$$-g(x,U) \subseteq H(f(x,V)).$$

Пусть $\mu_2 = \big(d(f(0,V)) - h/3\big)/\big(d(f(0,V))\big)$. Так как $\mu_2 > \mu_1$, то справедливо включение $-g(x,U) \subseteq H(\mu_2 f(0,V))$ для любого $x \in D_{\varepsilon_1}(0)$.

Определим число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого $x \in D_{\varepsilon_2}(0)$ справедливо включение

$$-g(x,U) \subseteq H(\mu_2 f(0,V)) \subseteq H(f(x,V)). \tag{4}$$

Возьмем произвольную гиперплоскость $\partial H(\mu_2 f(0,v_j))$ и вектор $\xi \in H(\mu_2 f(0,v_j))$. Рассмотрим следующее неравенство:

$$\langle \xi, f(x,v_j)\rangle \leqslant \|f(x,v_j)\|^2. \tag{5}$$

Оценим правую часть неравенства (5):

$$\|f(x,v_j)\|^2 = \|f(0,v_j) + f(x,v_j) - f(0,v_j)\|^2 \geqslant \|f(0,v_j)\|^2 - L_1^2\|x\|^2. \tag{6}$$

Оценим левую часть неравенства (5):

$$\begin{aligned} &\langle \xi, f(x,v_j)\rangle = \langle \xi, f(x,v_j) - f(0,v_j) + f(0,v_j)\rangle \leqslant \\ &\leqslant \|\mu_2 f(0,v_j)\|^2/\mu_2 + \|\xi\|\|f(x,v_j) - f(0,v_j)\| \leqslant \\ &\leqslant \mu_2\|f(0,v_j)\|^2 + d\big(H(\mu_2 f(0,V))\big) L_1\|x\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Докажем, что $H(\mu_2 f(0,V)) = \mu_2 H(f(0,V))$. Пусть $w \in H(f(0,V))$, тогда для любого $j=1,\ldots,m$ справедлива следующая оценка:

$$\langle \mu_2 w, \mu_2 f(0,v_j)\rangle \leqslant \mu_2^2\|f(0,v_j)\| = \|\mu_2 f(0,v_j)\|^2.$$

Поэтому, по определению, $\mu_2 w \in H(\mu_2 f(0,V))$, то есть $\mu_2 H(f(0,V)) \subset H(\mu_2 f(0,V))$. Докажем включение в обратную сторону. Пусть $w \in H(\mu_2 f(0,V))$, тогда для любого $j = 1,\ldots,m$ справедливо неравенство

$$\langle w, \mu_2 f(0,v_j)\rangle \leqslant \|\mu_2 f(0,v_j)\|^2 = \mu_2^2\|f(0,v_j)\|.$$

Отсюда точка $(1/\mu_2)w \in H(f(0,V))$. Следовательно, точка $\mu_2(1/\mu_2)w = w \in \mu_2 H(f(0,V))$, то есть $H(\mu_2 f(0,V)) \subset \mu_2 H(f(0,V))$. Таким образом, доказано равенство $H(\mu_2 f(0,V)) = \mu_2 H(f(0,V))$.

Тогда из (6) и (7) получаем следующее неравенство:

$$d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr)L_1\|x\| + \mu_2\|f(0,v_j)\|^2 \leqslant \|f(0,v_j)\|^2 - L_1^2\|x\|^2.$$

Рассмотрим функцию $p(\|x\|) = L_1^2\|x\|^2 + d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr)L_1\|x\| + (\mu_2 - 1)\|f(0,v_j)\|^2$. Тогда $p(0) < 0$. Так как коэффициент при $\|x\|^2$ положительный, то квадратный трехчлен имеет два корня: один отрицательный, второй положительный. Положительный корень имеет вид

$$\chi_2 = \frac{-\,d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr)L_1 + \sqrt{L_1^2 d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr)^2 - 4L_1^2(\mu_2 - 1)\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1^2}.$$

Отметим, что $\mu_2 < 1$ и оценим χ_2 снизу:

$$\chi_2 = \frac{-\,d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr) + \sqrt{\mu_2^2 d\bigl(H(f(0,V))\bigr)^2 + 4(1-\mu_2)\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{-\,d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr) + \sqrt{\mu_2^2 d\bigl(H(f(0,V))\bigr)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\ldots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1} > 0.$$

Таким образом, (5) справедливо при

$$\|x\| \leqslant \frac{-\,d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr) + \sqrt{\mu_2^2 d\bigl(H(f(0,V))\bigr)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\ldots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1}.$$

Возьмем

$$\varepsilon_2 = \frac{-\,d\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr) + \sqrt{\mu_2^2 d\bigl(H(f(0,V))\bigr)^2 + 4(1-\mu_2)\min\limits_{i=1,\ldots,m}\|f(0,v_j)\|^2}}{2L_1}.$$

В силу того, что $\xi \in H(\mu_2 f(0,v_j))$, выполняется включение (4), то данное ε_2 является искомым.

Обозначим $d_{\min} = (\mu_2 - \mu_1)\min\limits_{j=1,\ldots,m}\|f(0,v_j)\|$. Докажем, что справедливо следующее неравенство:

$$\min_{v\in V,\, u\in U,\, x\in D_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(0)} \|f(x,v) + g(x,u)\| \geqslant d_{\min}. \tag{8}$$

Так как выполнены включения (3), (4), $H(\mu_1 f(0,V)) \subset \operatorname{int}\bigl(H(\mu_2 f(0,V))\bigr)$ и для любого $\lambda > 0$ справедливо равенство $H(\lambda f(0,V)) = \lambda H(f(0,V))$, то

$$\|f(x,v) + g(x,u)\| \geqslant \min_{w\in\partial H(\mu_2 f(0,V)),\, q\in\partial H(\mu_1 f(0,V))} \|w - q\|.$$

В силу того, что $H(\lambda f(0,V)) \subset H(\lambda f(0,v_j))$ для любого $j = 1,\ldots,m$, то достаточно оценить норму разности между точками $w \in \partial H(\mu_2 f(0,v_j))$, $q \in \partial H(\mu_1 f(0,v_j))$ для каждого $j = 1,\ldots,m$:

$$\|w - q\| \geqslant \left\langle w - q, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|}\right\rangle = \mu_2\|f(0,v_j)\| - \mu_1\|f(0,v_j)\|.$$

Отсюда (8) доказано.

Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, d_{\min}/(2L_1)\}$. Тогда для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ справедливо следующее неравенство:

$$\|f(x,v_j) - f(0,v_j)\| \leqslant L_1\|x\| \leqslant L_1\varepsilon = \frac{d_{\min}}{2}. \tag{9}$$

Далее, определим $d_{\max} = d\bigl(H(f(0,V))\bigr) + d\bigl(H(\mu_1 f(0,V))\bigr) + L_1\varepsilon$. Отсюда для любого $x \in D_\varepsilon(0)$ выполнено

$$\max_{v\in V,\, u\in U,\, x\in D_\varepsilon(0)} \|f(x,v) + g(x,u)\| \leqslant d_{\max}. \tag{10}$$

Так как ε_2 соответствует (4), то искомой величиной в данном пункте считаем определенное выше ε.

4^0. В данном пункте строится выигрышная стратегия убегающего.

Пусть выполнены все построения и введены соответствующие обозначения предыдущих пунктов. Зафиксируем начальное положение $x_0 \neq 0$. В силу (1) существует индекс $j = 1, \ldots, m$ такой, что $x_0 \in C_j$.

Определим число Δ из следующего равенства:

$$\frac{d_{\min}}{2} \cdot \Delta + 2\Delta d_{\max} = \varepsilon. \tag{11}$$

Отсюда $\Delta = \varepsilon/(2d_{\max} + d_{\min}/2)$.

Далее, введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ вида $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \Delta i$, $i = 1, 2 \ldots, \infty$. Зададим управление убегающего, в соответствии с данным разбиением, следующим образом: если $x(\tau_i) \in C_j$, тогда $v(t) = v_j$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, \infty$.

Пусть $x \in D_\varepsilon(0)$. Имеем

$$f(x, v_j) + g(x, u) = f(x, v_j) - f(0, v_j) + f(0, v_j) + g(x, u).$$

Представим $g(x, u)$ в виде

$$g(x, u) = g_j(x, u) + g_j^{\perp}(x, u).$$

Здесь $-g_j(x, u) = \lambda(x) f(0, v_j)$, $g_j^{\perp}(x, u) \in \partial\big(H(\mu_1 f(0, v_j)) - \mu_1 f(0, v_j)\big) = H$. Такое представление возможно, так как H — линейное подпространство, а его ортогональное дополнение $H^{\perp}$ имеет вид $H^{\perp} = \{\lambda f(0, v_j),\ \lambda \in \mathbb{R}^1\}$. Так как $-g(x, U) \subset H(\mu_1 f(0, v_j))$, то справедлива оценка

$$\left\langle -g_j(x, u) - g_j^{\perp}(x, u), \frac{\mu_1 f(0, v_j)}{\|\mu_1 f(0, v_j)\|} \right\rangle = \lambda(x) \|f(0, v_j)\| \leqslant \|\mu_1 f(0, v_j)\|.$$

Поэтому $\lambda(x) \leqslant \mu_1$.

Пусть $u(\cdot)$ — произвольное управление преследователя. Рассмотрим точку $x(\tau_1)$:

$$x(\tau_1) = x_0 + \int_0^{\tau_1} \big(f(x(t), v_j) + g(x(t), u(t))\big)\, dt =$$

$$= x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t), u(t))\, dt + \int_0^{\tau_1} \big(f(0, v_j) + g_j(x(t), u(t))\big)\, dt + \int_0^{\tau_1} (f(x(t), v_j) - f(0, v_j))\, dt.$$

Далее, оценим следующее скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
&\left\langle x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t), u(t))\, dt + \int_0^{\tau_1} (f(0, v_j) + g_j(x(t), u(t)))\, dt,\ f(0, v_j) \right\rangle = \\
&= \langle x_0, f(0, v_j) \rangle + \int_0^{\tau_1} \left\langle g_j^{\perp}(x(t), u(t)), f(0, v_j) \right\rangle\, dt + \int_0^{\tau_1} \big(1 - \lambda(x(t))\big) \langle f(0, v_j), f(0, v_j) \rangle\, dt = \\
&= \langle x_0, f(0, v_j) \rangle + 0 + \|f(0, v_j)\|^2 \int_0^{\tau_1} \big(1 - \lambda(x(t))\big)\, dt \geqslant \\
&\geqslant \langle x_0, f(0, v_j) \rangle + (1 - \mu_1)\Delta \|f(0, v_j)\|^2 > \langle x_0, f(0, v_j) \rangle \geqslant \frac{\alpha_1 \|x_0\| \|f(0, v_j)\|}{d(f(0, V))}.
\end{aligned} \tag{12}$$

При этом $\langle 0, f(0, v_j) \rangle < \langle x_0, f(0, v_j) \rangle$, то есть точка 0 и точка

$$z = x_0 + \int_0^{\tau_1} g_j^{\perp}(x(t), u(t))\, dt + \int_0^{\tau_1} (f(0, v_j) + g_j(x(t), u(t)))\, dt \tag{13}$$

строго отделимы гиперплоскостью $\partial\big(H(\mu_1 f(0, v_j)) - \mu_1 f(0, v_j) + x_0\big)$. Следовательно, в силу (12) и (8), можем оценить расстояние от нуля до точки z из (13):

$$\|z\| \geqslant \left\langle z, \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|} \right\rangle = \left\langle x_0, \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|} \right\rangle + 0 + \left\langle \int_0^{\tau_1} (f(0, v_j) + g_j(x(t), u(t)))\, dt, \frac{f(0, v_j)}{\|f(0, v_j)\|} \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left\langle x_0, \frac{f(0,v_j)}{\|f(0,v_j)\|} \right\rangle + d_{\min}\Delta.$$

Поэтому если $x_0 \in D_r(0)$, $r = \Delta d_{\min}/2 + \Delta d_{\max}$, то в силу (9) имеем следующую оценку:

$$\|x(\tau_1)\| \geqslant \langle x_0, f(0,v_j)/\|f(0,v_j)\|\rangle + \Delta d_{\min} - \Delta \cdot \frac{d_{\min}}{2} = \langle x_0, f(0,v_j)/\|f(0,v_j)\|\rangle + \Delta \cdot \frac{d_{\min}}{2}. \quad (14)$$

Если же $\|x_0\| > r$, то в силу оценки нормы скорости (10) и выбора длины отрезка разбиения из (11) имеем $\|x(\tau_1)\| \geqslant r - \Delta d_{\max} = \Delta d_{\min}/2$.

При рассмотрении произвольного интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ производится вышеописанная процедура, считая начальной точку $x(\tau_i)$.

Таким образом, в силу (14) и (12) радиус искомой $\overline{\varepsilon}$-окрестности нуля, ближе которой состояние системы не может оказаться при описанной выше стратегии убегающего, имеет следующий вид:

$$\overline{\varepsilon} = \min\left\{ \frac{\alpha_1\|x_0\| \min\limits_{j=1,\ldots,m} \|f(0,v_j)\|}{d(f(0,V))}, \frac{\Delta d_{\min}}{2} \right\}.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 является конструктивной, представлен прямой алгоритм нахождения необходимых величин и множеств. Расстояние между соседними точками разбиения фиксировано и аналитически выписано (см. (11)).

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x,v) = \begin{pmatrix} -a(x_1 - b/d) + c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_1 \\ b(x_2 - c/a) - d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_2 \end{pmatrix}, \quad g(x,u) = \begin{pmatrix} c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_1 \\ -d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a, b, c, d > 0$. Пусть

$$V = \{(1 - a^2/c^2, -1), (-1 - a^2/c^2, -1), (-a^2/c^2, -2), (-a^2/c^2, 0)\},$$

$$U = [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha], \quad \alpha \in (0,1).$$

Функция $f(\cdot, v_j)$ является локально липшицевой для каждого $j = 1,2,3,4$. Функция $g(\cdot,\cdot)$ является локально липшицевой по совокупности переменных. Определим константы L_1, L_2 как и в теореме 1, только в данном случае на шаре $D_1(0)$.

$$f(0,V) = \{(bc^2/(ad), 0), (-bc^2/(ad), 0), (0, bc/a), (0, -bc/a)\},$$

$$H(f(0,V)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant bc^2/(ad),\ x \geqslant -bc^2/(ad),\ y \leqslant bc/a,\ y \geqslant -bc/a\},$$

$$g(0,U) = [-\alpha bc^2/(ad), \alpha bc^2/(ad)] \times [-\alpha bc/a, \alpha bc/a].$$

Отсюда выполнено включение $-g(0,U) \subset \operatorname{int} H(f(0,V))$. Следовательно, выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, явное вычисление которой показано в теореме 1, из которой происходит поимка.

§ 3. Теорема об уклонении от встречи на отрезке

Т е о р е м а 2. *Пусть $f(0,v_1), \ldots, f(0,v_m)$ образуют положительный базис и*

$$-g(0,U) \subseteq \operatorname{int} H(f(0,V)).$$

Тогда для любого $T > 0$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит уклонение от встречи на отрезке $[0,T]$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что точки $f(0,v_1),\dots,f(0,v_m)$ являются попарно различными вершинами выпуклого многогранника co $\{f(0,v_1),\dots,f(0,v_m)\}$. Пусть L_1, L_2 — константы Липшица функций $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ соответственно. Так же, определим число α_1 и множества C_j, $j=1,\dots,m$, как и в теореме 1. Заметим, что в силу условий теоремы для любого $u\in U$ справедливо следующее неравенство:

$$\langle f(0,v_j)+g(0,u),p\rangle\geqslant 0,$$

где единичный вектор p выбран так, что выполнено неравенство $\langle f(0,v_j),p\rangle\geqslant\alpha_1$.

Без ограничения общности считаем, что начальное положение $x_0\in D_{\alpha_1/(2(L_1+L_2))}(0)$. Введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ интервала $[0,\infty)$, где $\tau_i=\dfrac{i}{4(L_1+L_2)}$, $i=0,1,\dots,\infty$. Обозначим шаг разбиения $\delta=\dfrac{1}{4(L_1+L_2)}$. Управление убегающего на интервале $[\tau_i,\tau_{i+1})$ данного разбиения будем выбирать следующим образом: $v(t)=v_j$, $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$, если $x(\tau_i)\in C_j$.

Пусть $x_i=x(\tau_i)$, $x_i\in D_{\alpha_1/(2(L_1+L_2))}(0)$, $u(\cdot)$ — произвольное управление преследователя. Тогда

$$\|x_i\|=\left\langle x_i,\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\rangle\geqslant\left\langle x_i,\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle=\left\langle x_{i-1}+\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\big(f(x(t),v_j)+g_j(x(t),u(t))\big)\,dt,\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle=$$

$$=\left\langle x_{i-1}+\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\big(f(0,v_j)+g_j(0,u(t))\big)\,dt,\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle+$$

$$+\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left\langle f(x(t),v_j)-f(0,v_j)+g_j(x(t),u(t))-g_j(0,u(t)),\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle dt\geqslant$$

$$\geqslant\left\langle x_{i-1},\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle-\delta(L_1+L_2)2\|x_{i-1}\|=\|x_{i-1}\|-\frac{\|x_{i-1}\|}{2}=\frac{\|x_{i-1}\|}{2}.$$

Оценка $\|x(t)\|$, $t\in(\tau_{i-1},\tau_i)$, производится аналогично.

$$\|x(t)\|\geqslant\left\langle x_{i-1},\frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}\|}\right\rangle-\overline{\delta}(L_1+L_2)2\|x_{i-1}\|>\|x_{i-1}\|-\frac{\|x_{i-1}\|}{2}=\frac{\|x_{i-1}\|}{2},$$

где $\overline{\delta}=t-\tau_{i-1}<\delta$.

Таким образом, $\|x_1\|\geqslant\dfrac{\|x_0\|}{2}$, $\|x_2\|\geqslant\dfrac{\|x_1\|}{2}\geqslant\dfrac{\|x_0\|}{4}$, $\|x_3\|\geqslant\dfrac{\|x_2\|}{2}\geqslant\dfrac{\|x_1\|}{4}\geqslant\dfrac{\|x_0\|}{8}$ и так далее. Следовательно, для любого $\tau\in[0,T]$ $x(\tau)\geqslant\dfrac{\|x_0\|}{2^j}$, где индекс j такой, что $T\in(\tau_{j-1},\tau_j]$. Следовательно, поимки на любом отрезке $[0,T]$ не происходит.

Теорема доказана. □

Финансирование. Работа первого автора поддержана грантом MRU-10/17. Работа второго автора поддержана грантами РФФИ (18–51–41005_Узб, 16–01–00346).

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
5. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача убегания одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.
6. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 436–445.

7. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
8. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1992. 261 с.
9. Гусятников П.Б. Теория дифференциальных игр. М.: МФТИ, 1982. 99 с.
10. Чикрий А.А. Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1975. № 3. С. 65–68.
11. Rzymowski W. Method of construction of the evasion strategy for differential game with many pursuers. Warszawa: PWN, 1986. 43 p.
12. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН СССР. 1977. Т. 143. С. 105–128.
13. Chernousko F.L., Zak V.L. On differential games of evasion from many pursuers // Journal of Optimization Theory and Applications. 1985. Vol. 46. No. 4. P. 461–470. DOI: 10.1007/BF00939151
14. Ibragimov G.I., Hasim R.M. Pursuit and evasion differential games in Hilbert space // International Game Theory Review. 2010. Vol. 12. No. 3. P. 239–251. DOI: 10.1142/S0219198910002647
15. Kumkov S.S., Ménec S.L., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. Issue 4. P. 609–633. DOI: 10.1007/s13235-016-0209-z
16. Brooks R.R., Pang Jing-En, Griffin C. Game and information theory analysis of electronic countermeasures in pursuit-evasion games // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans. 2008. Vol. 38. Issue 6. P. 1281–1294. DOI: 10.1109/TSMCA.2008.2003970
17. Петров Н.Н., Щелчков К.А. О взаимосвязи двух задач уклонения со многими убегающими // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 473–479.
18. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
19. Петров Н.Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.
20. Нарманов А.Я., Петров Н.Н. Нелокальные проблемы теории оптимальных процессов. I // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 4. С. 605–614.
21. Нарманов А.Я. О стабильности вполне управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1336–1344.
22. Нарманов А.Я. О стабильности вполне управляемых систем // Математические труды. 2001. Т. 4. № 1. С. 94–110.
23. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
24. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
25. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. DOI: 10.20537/vm170105
26. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186.
27. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
28. Щелчков К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 111–118. DOI: 10.20537/vm180110

Поступила в редакцию 30.09.2018

Нарманов Абдигаппар Якубович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра геометрии, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.
E-mail: narmanov@yandex.ru

Щелчков Кирилл Александрович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: incognitobox@mail.ru

A. Ya. Narmanov, K. A. Shchelchkov
The evasion problem in a nonlinear differential game with discrete control

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 75–85 (in Russian).

Keywords: differential game, nonlinear system, avoidance of an encounter, discrete control.

MSC2010: 49N70, 49N75

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-06

A two-agent differential game is considered. The game is described by the following system of differential equations: $\dot{x} = f(x, v) + g(x, u)$, where $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. The evader's admissible control set is a finite subset of phase space. The pursuer's admissible control set is a compact subset of phase space. The pursuer's purpose is to avoid an encounter, that is, to ensure a system position no closer than some neighborhood of zero. Sufficient conditions for avoidance of an encounter in the class of piecewise open-loop strategies on infinite and any finite-time intervals are obtained. The conditions are superimposed on the velocity vectogram at the zero point of phase space. When the game is considered on an infinite time interval, the conditions provide the evader with some advantage. The properties of a positive basis play a major role in proving the theorems.

Funding. The work of the first author was supported by the grant of MRU-10/17. The work of the second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. (18–51–41005, 16–01–00346).

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differetial games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
4. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Volume 2), Moscow: Nauka, 1988, 575 p.
5. Pontryagin L.S. Mishchenko E.F. A problem on the escape of one controlled object from another, *Sov. Math. Dokl.*, 1969, vol. 10, pp. 1488–1490. https://zbmath.org/?q=an:0277.90109
6. Pontryagin L.S., Mishchenko E.F. Evasion problem in a linear differential games, *Differ. Uravn.*, 1971, vol. 7, no. 3, pp. 436–445 (in Russian).
7. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solving the problem of avoiding encounter in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000, 176 p.
8. Pshenichnyi B.N., Ostapenko V.V. *Differentsial'nye igry* (Differential games), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 261 p.
9. Gusyatnikov P.B. *Teoriya differentsial'nikh igr* (Differential game theory) Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology, 1982, 99 p.
10. Chikrii A.A. Evasion problem in nonlinear differential games, *Kibernetika*, 1975, no. 3, pp. 65–68 (in Russian).
11. Rzymowski W. Method of construction of the evasion strategy for differential game with many pursuers. Warszawa: PWN, 1986, 43 p.
12. Mishchenko E.F., Nikol'skii M.S., Satimov N.Yu. The problem of avoiding encounter in n-person differential games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1980, vol. 143, pp. 111–136.
13. Chernousko F.L., Zak V.L. On differential games of evasion from many pursuers, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1985, vol. 46, no. 4, pp. 461–470. DOI: 10.1007/BF00939151
14. Ibragimov G.I., Hasim R.M. Pursuit and evasion differential games in Hilbert space, *International Game Theory Review*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 239–251. DOI: 10.1142/S0219198910002647
15. Kumkov S.S., Ménec S.L., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 4, pp. 609–633. DOI: 10.1007/s13235-016-0209-z
16. Brooks R.R., Pang Jing-En, Griffin C. Game and information theory analysis of electronic countermeasures in pursuit-evasion games, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 2008, vol. 38, issue 6, pp. 1281–1294. DOI: 10.1109/TSMCA.2008.2003970
17. Petrov N.N., Shchelchkov K.A. On the interrelationship of two problems on evasion with many evaders, *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, vol. 80, issue 4, pp. 333–338. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.09.008

18. Petrov N.N. On the controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).
19. Petrov N.N. Local controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 7, pp. 1218–1232 (in Russian).
20. Narmanov A.Ya., Petrov N.N. Nonlocal problems in the theory of optimal processes. I, *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 4, pp. 398–406. https://zbmath.org/?q=an:0601.93006
21. Narmanov A.Ya. Stability of completely controllable systems, *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 10, pp. 1475–1483. DOI: 10.1007/BF02757386
22. Narmanov A.Ya. On stability of totally controlled systems, *Siberian Adv. Math.*, 2001, vol. 11, no. 4, pp. 110–125. https://zbmath.org/?q=an:1048.37078
23. Bannikov A.S., Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. 41–52. DOI: 10.1134/S0081543810070047
24. Petrov N.N. A certain simple pursuit problem with phase constraints, *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 5, pp. 639–642.
25. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170105
26. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182. DOI: 10.1134/S0081543816050163
27. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two coordinated evaders in a linear recurrent differential games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).
28. Shchelchkov K.A. A nonlinear pursuit problem with discrete control and incomplete information, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 111–118 (in Russian). DOI: 10.20537/vm180110

Received 30.09.2018

Narmanov Abdigappar Yakubovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: narmanov@yandex.ru

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: incognitobox@mail.ru