УДК 519.6

© ***А. Г. Ченцов***

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

Рассматриваются ультрафильтры (максимальные фильтры) и максимальные сцепленные системы на π-системах с «нулем» и «единицей». Обсуждаются различные варианты топологического оснащения и получающиеся на их основе битопологические пространства. Отмечается, что битопологическое пространство ультрафильтров может рассматриваться как подпространство битопологического пространства максимальных сцепленных систем. Устанавливаются необходимые и достаточные условия максимальности фильтров, а также свойства, характеризующие максимальные сцепленные системы, не являющиеся ультрафильтрами, и выясняются некоторые условия, достаточные для существования таких систем. Указаны условия, при которых битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем являются вырожденными (топологии, определяющие соответствующее битопологическое пространство, совпадают), а также условия, гарантирующие невырожденность. Приведен новый вариант свойства плотности исходного множества в пространстве ультрафильтров с топологией волмэновского типа. Данный вариант может использоваться при построении расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера.

Ключевые слова: битопологическое пространство, максимальная сцепленная система, ультрафильтр.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-07

Введение

Настоящая работа продолжает серию исследований автора (см., в частности, [1–4]), связанных с изучением ультрафильтров (у/ф) и максимальных сцепленных систем (МСС) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Данные пространства определялись в виде множеств, на которых задавались π-системы [5, с. 14] подмножеств (п/м), то есть семейства подмножеств, замкнутые относительно конечных пересечений; предполагалось также, что рассматриваемые π-системы являются семействами с «нулем» и «единицей», то есть содержат всякий раз пустое и объемлющее множества. Для каждого такого (широко понимаемого) ИП у/ф являются МСС соответствующей π-системы; в то же время имеются, вообще говоря, МСС, не являющиеся у/ф. В [1, 3, 4] построены два битопологических пространства (БТП), связанные с исходной π-системой. Точками одного из этих БТП являются у/ф, а точками другого — МСС данной π-системы (БТП понимается здесь как множество, оснащенное парой сравнимых топологий). Оказывается [1, 3, 4], что первое БТП всякий раз может рассматриваться как своеобразное подпространство второго: топологии на множестве у/ф индуцируются соответствующими топологиями на множестве МСС. Следует отметить, что частными случаями π-систем являются алгебры и полуалгебры множеств, топологии, семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП). Топологии, используемые в [1–4] (в конструкциях БТП), на идейном уровне связываются с построениями Стоуна и Волмэна, применяемыми обычно в случаях пространств у/ф алгебры множеств (отметим в этой связи исследования [6–8]) и семейства замкнутых множеств в T_1-пространстве [9, раздел 1.5] соответственно. Весьма общий подкласс π-систем составляют решетки множеств, для которых были реализованы [1, 3] первоначально многие построения настоящей работы.

Случай МСС решетки замкнутых множеств в ТП активно исследовался в связи с понятиями суперрасширения (данного ТП) и суперкомпактности; см. в этой связи [10–12], а также [13, гл. VII, § 4]. Особо отметим принципиальный результат [12] о суперкомпактности метризуемых компактов.

В настоящей работе многие положения [10–12; 13, гл. VII, § 4] распространяются на случай МСС на произвольной π-системе с «нулем» и «единицей». В этом отношении настоящая работа является непосредственным продолжением [4].

§ 1. Общие определения и обозначения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для каждого объекта z полагаем $\{z\} \triangleq \{z; z\}$, получая синглетон, содержащий z. Каждое множество — объект. С учетом этого, следуя [14, с. 67], полагаем для любых двух объектов α и β, что $(\alpha, \beta) \triangleq \{\{\alpha\}; \{\alpha; \beta\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом α и вторым элементом β. Если же z — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) X и полагаем $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м X. В качестве X может, конечно, использоваться семейство. Следуя обозначениям [4, раздел 2], полагаем для каждого непустого семейства $\mathfrak{X}$, что

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\}, \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\},$$
$$\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\}, \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\},$$

получая четыре семейства, элементами которых являются п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; каждое из упомянутых семейств содержит $\mathfrak{X}$. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то в виде

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

имеем семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.1}$$

есть след семейства $\mathcal{A}$ на B. Если U и V — множества, то через V^U обозначаем (как и в [14]) множество всех отображений из U в V; при $f \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$ в виде $f^1(W) \triangleq \{f(x) : x \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ имеем образ W при действии f, $f^1(W) \neq \varnothing$ при $W \neq \varnothing$.

Если $\mathcal{H}$ — семейство, а S — множество, то $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} | S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Наконец, если $\mathbb{X}$ — непустое множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$, то $(\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) | \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\}$ есть семейство всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$.

Некоторые специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество $\mathbf{I}$. Рассматриваем подсемейства $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.2}$$

имеем (непустое) семейство всех π-систем [5, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей»; π-системы, являющиеся элементами семейства

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \exists\, \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}, \tag{1.3}$$

называем отделимыми. Если $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ и $L \in \mathcal{I}$, то $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, множества из $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ называем квазиокрестностями L; пересечение всех множеств из $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ содержит L. Введем в рассмотрение семейство

$$\pi^\natural[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]\ \forall L \in \mathcal{I}\}. \tag{1.4}$$

Из (1.4) легко следует, что справедливо равенство $\pi^{\natural}[\mathbf{I}] = \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \exists\, \Lambda_0 \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)\colon \Lambda_0 \subset\ \Lambda\ \forall\, \Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)\}$; в этой связи семейства — элементы (1.4) — называем π-системами с наименьшими квазиокрестностями (всех своих множеств). В виде

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathfrak{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathfrak{L}\ \forall A \in \mathfrak{L}\ \forall B \in \mathfrak{L}\}$$

получаем семейство всех решеток п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей» (имеется в виду решеточность в смысле упорядоченности по включению). Пусть

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\}, \tag{1.5}$$

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}, \tag{1.6}$$

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}\ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\}; \tag{1.7}$$

легко видеть, что $(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \subset \tilde{\pi}^0\ [\mathbf{I}]$. Семейства — элементы (1.5) — алгебры п/м $\mathbf{I}$ и только они; в (1.6) мы имеем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$. Семейства — элементы (1.7) — двойственны по отношению к топологиям; иными словами, это семейства замкнутых множеств в ТП. Введем, наконец, при $\mathcal{I} \in \pi\ [\mathbf{I}]$ семейство

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) | \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}\ \forall \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]; \tag{1.8}$$

элементами (1.8) являются непустые центрированные подсемейства $\mathcal{I}$ и только они.

Элементы топологии. Напомним, что $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] = \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$; топологии и семейства замкнутых множеств (замкнутые топологии) находятся в естественной двойственности. Пусть

$$\begin{gathered}(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B)\ \&\ (\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \beta\colon \\ (x \in B_3)\ \&\ (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\},\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} \in \beta)\ \&\ (\bigcap_{B \in \beta} B = \varnothing) \& \\ \&\ (\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2)\ \exists B_3 \in \beta : (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\ \&\ (x \notin B_3))\}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

В (1.9) имеем семейство всех баз открытых п/м $\mathbf{I}$, а в (1.10) — семейство всех баз замкнутых п/м $\mathbf{I}$ (имеются в виду открытость и замкнутость относительно некоторой топологии на $\mathbf{I}$). При $\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ имеем свойство $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, а при $\tilde{\beta} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ непременно $\{\cap\}(\tilde{\beta}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}]$. Пусть

$$(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\}\ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}].$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $\beta \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$, то β есть (открытая) база конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Аналогичным образом вводим семейства замкнутых баз того или иного ТП, полагая

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] = \{\cap\}(\beta)\}\ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}].$$

Перейдем к описанию предбаз. Пусть

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{x}) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathbf{x}} \mathbb{X}\}$$

(семейство всех предбаз открытых п/м $\mathbf{I}$); аналогично определяется семейство предбаз замкнутых п/м $\mathbf{I}$: $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cup\}_{\sharp}(\mathbf{x}) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\}$ (последнюю конструкцию используем ниже при условии $\varnothing \in \mathbf{x}$).

Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то определяем предбазы открытых и замкнутых множеств в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$:

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \overset{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\},$$

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau] \overset{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\}.$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N^0_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists\, G \in N^0_\tau(x)\colon G \subset H\}$$

(семейство всех окрестностей x в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, понимаемых в смысле Бурбаки); если же $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$, то $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$:

$$\mathrm{cl}(A,\tau) \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbf{I} \mid A \cap G \neq \varnothing\ \forall G \in N^0_\tau(x)\} = \{x \in \mathbf{I} \mid A \cap H \neq \varnothing\ \forall H \in N_\tau(x)\}.$$

Условимся о следующем обозначении, связанном с суперкомпактными ТП:

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \exists\, \mathcal{S} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \\ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \mathcal{S}]\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}\end{gathered} \tag{1.11}$$

есть семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП (см. [10–13]).

§ 2. Фильтры и ультрафильтры π-систем

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E. Рассматриваем π-системы из множества $\pi[E]$, добавляя по мере надобности дополнительные предположения. Если $\mathcal{I} \in \pi[E]$, то в виде

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\& \\ \&(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall I \in \mathcal{I}:\ (F \subset I) \Longrightarrow (I \in \mathcal{F}))\},\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \mid \forall I \in \mathcal{I}\ (I \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (I \in \mathcal{U})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{gathered} \tag{2.2}$$

имеем семейства всех фильтров и всех у/ф π-системы $\mathcal{I}$ соответственно.

Отметим, в частности, что при $\mathcal{I} \in \pi[E]$ и $\mathbf{x} \in E$

$$(\mathcal{I}-\mathrm{triv})[\mathbf{x}] \overset{\triangle}{=} \{I \in \mathcal{I} \mid \mathbf{x} \in I\} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}). \tag{2.3}$$

При этом $((\mathcal{I}-\mathrm{triv})[\mathbf{x}] \in \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{I})\ \forall \mathbf{x} \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[E])$, см. [15, (5.9)]; данное свойство используем ниже без дополнительных пояснений. Легко видеть, что (проверяется с использованием леммы Цорна)

$$\forall \mathcal{I} \in \pi[E]\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{I})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что $\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{I}) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{I} \in \pi[E]$. Если $\mathcal{J} \in \pi[E]$, то полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(J) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{J}) \mid J \in \mathcal{U}\}\ \forall J \in \mathcal{J}; \tag{2.5}$$

с учетом (2.5) получаем следующее положение:

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{J}}(L)\colon L \in \mathcal{J}\} \in \pi[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{J})], \tag{2.6}$$

а тогда, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{J})]$ и, как следствие,

$$\mathbf{T}^\star_{\mathcal{J}}[E] \overset{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{J})]. \tag{2.7}$$

При этом (см. (2.5)–(2.7); [15, § 2]) в виде

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^\star[E]) \tag{2.8}$$

имеем нульмерное [9, 6.2] T_2-пространство. Отметим, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}] \in (\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^\star[E] - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})] \colon (\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^\star[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^\star[E]]; \tag{2.9}$$

если $\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (2.8) — нульмерный компакт (компактное T_2-пространство), пространство Стоуна, а последнее вложение в (2.9) превращается в равенство, см. [16, замечание 3.3].

Рассмотрим теперь другую конструкцию, фиксируя до конца настоящего раздела $\mathcal{J} \in \pi[E]$: при $H \in \mathcal{P}(E)$ полагаем

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J} \mid H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) \mid \exists\, U \in \mathcal{U} \colon U \subset H\}. \tag{2.10}$$

Если $J \in \mathcal{J}$, то

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J} \mid E \setminus J] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) \setminus \Phi_{\mathcal{J}}(J). \tag{2.11}$$

Как следствие, получаем следующее свойство:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J} \mid \Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{J}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{J}]] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}); \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^\star[E]]. \tag{2.12}$$

Из (2.9) и (2.12) вытекает, в частности, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) = \bigcap_{\mathbb{F} \in\, [\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural\, [\mathcal{J}]]\ (\Phi_{\mathcal{J}}(L))} \mathbb{F} \qquad \forall L \in \mathcal{J}. \tag{2.13}$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если* $L \in \mathcal{J}$ *и* $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{J}]$, *то*

$$(L \subset \Lambda) \iff (\Phi_{\mathcal{J}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J} \mid \Lambda]).$$

Доказательство приведено в [4, предложение 3.1]. В качестве следствия отметим, что (см. [4, (3.8), предложение 3.2]) $[\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ при $L \in \mathcal{J}$,

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}]](\Phi_{\mathcal{J}}(L)) = \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}|\Lambda] \colon \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L)\}$$

и при этом имеет место цепочка равенств

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) = \bigcap_{\Lambda \in\, [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L)} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}|\Lambda] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}| \bigcap_{\Lambda \in\, [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L)} \Lambda]. \tag{2.14}$$

Т е о р е м а 2.1. *Множество* $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$ *допускает следующее представление:*

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{J}) | \forall J \in \mathcal{J}\ (J \in \mathcal{U}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](J) \colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{U})\}. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (2.15). Требуется установить равенство $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) = \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$. Тогда, в частности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{J})$. Выберем произвольно $D \in \mathcal{J}$. Тогда согласно (2.5) $\Phi_{\mathcal{J}}(D) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) | D \in \mathcal{U}\}$. В силу (2.14)

$$\Phi_{\mathcal{J}}(D) = \bigcap_{\Lambda \in\, [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D)} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}|\Lambda]. \tag{2.16}$$

При этом $(D \in \mathcal{V}) \vee (D \notin \mathcal{V})$. Допустим, что $D \notin \mathcal{V}$. Тогда $\mathcal{V} \notin \Phi_{\mathcal{J}}(D)$, а потому (см. (2.16)) для некоторого множества $W \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D)$

$$\mathcal{V} \notin \mathbb{F}_{\mathbf{C}}[\mathcal{J}|W]. \tag{2.17}$$

При этом $E \setminus W \in \mathcal{J}$ реализует W в виде $E \setminus (E \setminus W)$. Тогда согласно (2.11)

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) \setminus \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{J}|W] = \Phi_{\mathcal{J}}(E \setminus W).$$

С учетом (2.17) $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{J}}(E \setminus W)$ и, следовательно (см. (2.5)), $E \setminus W \in \mathcal{V}$. Итак, установлена импликация

$$(D \notin \mathcal{V}) \Longrightarrow (\exists\, \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D) \colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{V}).$$

В итоге $(D \in \mathcal{V}) \bigvee (\exists\, \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D) \colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{V})$. Поскольку выбор D был произвольным, установлено, что $\mathcal{V} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) \subset \Omega. \tag{2.18}$$

Пусть $\mathfrak{U} \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{J})$, причем $\forall J \in \mathcal{J}$

$$(J \in \mathfrak{U}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](J) \colon E \setminus \Lambda \in \mathfrak{U}). \tag{2.19}$$

Покажем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$. Допустим противное: $\mathfrak{U} \notin \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$. Тогда для некоторого фильтра $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{J})$

$$(\mathfrak{U} \subset \mathcal{W}) \& (\mathfrak{U} \neq \mathcal{W}). \tag{2.20}$$

Это означает, что $\mathcal{W} \setminus \mathfrak{U} \neq \varnothing$. Пусть $\tilde{W} \in \mathcal{W} \setminus \mathfrak{U}$. Тогда, в частности, $\tilde{W} \in \mathcal{J}$, а потому (см. (2.19))

$$(\tilde{W} \in \mathfrak{U}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](\tilde{W}) \colon E \setminus \Lambda \in \mathfrak{U}). \tag{2.21}$$

По выбору $\tilde{W}$ имеем из (2.21), что для некоторой квазиокрестности $\Gamma \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](\tilde{W})$

$$E \setminus \Gamma \in \mathfrak{U}. \tag{2.22}$$

Заметим, что $\Gamma \in \mathbf{C}_E[\mathcal{J}]$ и $\tilde{W} \subset \Gamma$. При этом (см. (2.20), (2.22)) $E \setminus \Gamma \in \mathcal{W}$. По выбору $\tilde{W}$ имеем из (2.1) свойство

$$\tilde{W} \cap (E \setminus \Gamma) \neq \varnothing,$$

что невозможно, так как $E \setminus \Gamma \subset E \setminus \tilde{W}$, где $\tilde{W} \cap (E \setminus \tilde{W}) = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$, чем завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$. С учетом (2.18) получаем требуемое утверждение. □

Отметим, что из (1.4) вытекает следующее свойство: если $\mathcal{J} \in \pi^\natural[E]$ и $L \in \mathcal{J}$, то

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L)} \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](L) \tag{2.23}$$

есть наименьшая (по включению) квазиокрестность L.

Т е о р е м а 2.2. *При $\mathcal{J} \in \pi^\natural[E]$ справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{J}) |\ \forall J \in \mathcal{J}\ (J \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus (\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](J)} \Lambda) \in \mathcal{U})\}. \tag{2.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{J} \in \pi^\natural[E]$. Обозначим через Ω семейство в правой части (2.24). Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J})$. Покажем, что $\mathcal{V} \in \Omega$. В самом деле, пусть $D \in \mathcal{J}$. Тогда в силу (2.23)

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D)} \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D). \tag{2.25}$$

При этом согласно теореме 2.1

$$(D \in \mathcal{V}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D) \colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{V}). \tag{2.26}$$

Рассмотрим вторую возможность в (2.26): пусть $\Lambda_0 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D)$ обладает свойством

$$E \setminus \Lambda_0 \in \mathcal{V}. \tag{2.27}$$

Тогда в силу (2.25) $\mathbf{D} \subset \Lambda_0$, а потому $E \setminus \Lambda_0 \subset E \setminus \mathbf{D}$. Поскольку $E \setminus \mathbf{D} \in \mathcal{J}$ (см. (2.25)), имеем из (2.1) и (2.27), что $E \setminus \mathbf{D} \in \mathcal{V}$. Итак, установлена импликация

$$(\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](D) \colon E \setminus \Lambda \in \mathcal{V}) \Longrightarrow (E \setminus \mathbf{D} \in \mathcal{V}).$$

Получили (см. (2.26)) свойство $(D \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus \mathbf{D} \in \mathcal{V})$. Поскольку D выбиралось произвольно, имеем с учетом (2.25), что $\mathcal{V} \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}) \subset \Omega$.

Проверка противоположного вложения практически очевидна в силу теоремы 2.1 и (2.23). □

§ 3. Некоторые частные случаи

Отметим два важных частных случая π-систем из множества $\pi^{\natural}[E]$. Речь пойдет об алгебрах п/м E и топологиях на E.

Предложение 3.1. *Каждая алгебра п/м E является π-системой с наименьшими квазиокрестностями:* $(\mathrm{alg})[E] \subset \pi^{\natural}[E]$.

Доказательство очевидным образом следует из равенства $\mathbf{C}_E[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ (см. (1.5)). При этом, конечно, имеем для $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $A \in \mathcal{A}$ равенство

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{A}]](A)} \Lambda = A.$$

Предложение 3.2. *Каждая топология на E является π-системой с наименьшими квазиокрестностями:* $(\mathrm{top})[E] \subset \pi^{\natural}[E]$.

Доказательство. Фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, получая, в частности, что $\tau \in \pi[E]$. В виде $\mathbf{C}_E[\tau]$ имеем семейство всех замкнутых в ТП (E, τ) п/м E. Если $G \in \tau$, то

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\tau]](G)} \Lambda = \mathrm{cl}(G, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau], \tag{3.1}$$

откуда в силу (1.4) следует требуемое свойство. □

Заметим, что (3.1) определяет наименьшую квазиокрестность открытого в смысле (E, τ) п/м E: таковой квазиокрестностью является замыкание данного п/м E.

Теорема 3.1. *Если $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, то $\mathbf{C}_E[\tau] \in (\mathrm{LAT})_0[E]$ обладает свойством*

$$\mathbb{F}_0^{\star}(\mathbf{C}_E[\tau]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}(\mathbf{C}_E[\tau]) \mid \forall F \in \mathbf{C}_E[\tau] \ \ (F \in \mathcal{U}) \vee (\exists\, G \in [\tau](F) \colon E \setminus G \in \mathcal{U})\}. \tag{3.2}$$

Доказательство легко извлекается из теоремы 2.1, но все же рассмотрим соответствующую схему. Используем теорему 2.1 при условии $\mathcal{J} = \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда в силу равенства $\mathbf{C}_E[\mathcal{J}] = \tau$, получаем требуемое утверждение (3.2) прямо из (2.15), поскольку в нашем случае при $J \in \mathcal{J}$ имеет место равенство

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{J}]](J) = [\tau](J); \tag{3.3}$$

в связи с (3.3) отметим, что множества из $[\tau](J)$ — суть открытые окрестности J и только они (открытые множества, содержащие J)

До конца настоящего параграфа полагаем, что

$$\mathcal{J} \in (\mathrm{LAT})_0[E]. \tag{3.4}$$

Тогда (см. [17, § 6]) $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{J}] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{J})]$ и определена топология

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[E] \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{J})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{J}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{J})]; \tag{3.5}$$

при этом (см. [17, § 6]) в виде

$$(\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{J}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[E]) \tag{3.6}$$

имеем компактное T_1-пространство. Отметим в связи с (3.4), что, как легко видеть, при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{J})$

$$\bigcup_{J \in \mathcal{K}} J \in \mathcal{J} : \Phi_{\mathcal{J}}(\bigcup_{J \in \mathcal{K}} J) = \bigcup_{J \in \mathcal{K}} \Phi_{\mathcal{J}}(J). \tag{3.7}$$

Отметим также здесь, что согласно [17, (6.6)] $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{J}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{J})]$. В виде (3.5) имеем топологию волмэновского типа (случай традиционного расширения Волмэна отвечает ситуации, когда $\mathcal{J} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где топология $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ такова, что (E, τ) есть T_1-пространство).

§ 4. Топология волмэновского типа, 1

В настоящем параграфе конструкция (3.5), (3.6) распространяется на случай π-систем. В этой связи фиксируем в пределах настоящего раздела и далее π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$. Введем в рассмотрение семейство

$$(\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E] | \mathcal{E} \subset \mathfrak{L}\} \tag{4.1}$$

всех решеток п/м E, содержащих π-систему $\mathcal{E}$. Разумеется $\mathcal{P}(E) \in (\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}]$, а потому $(\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}] \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[E])$. В частности, (4.1) есть непустое семейство и определена решетка

$$\mathfrak{C} \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}]} \mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E|\mathcal{E}], \tag{4.2}$$

порожденная π-системой $\mathcal{E}$. С учетом замкнутости $\mathcal{E}$ относительно конечных пересечений легко проверяется, что

$$\mathfrak{C} = \{\bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\} = \{\cup\}_\sharp(\mathcal{E}); \tag{4.3}$$

итак (см. (4.3)), решетка (4.2) совпадает с семейством всех конечных объединений множеств из $\mathcal{E}$. Напомним (см. (3.4), (3.5)), что

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}), \mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]) \tag{4.4}$$

есть непустое компактное T_1-пространство, для которого

$$(\mathbb{UF})[E; \mathfrak{C}] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}); \mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]]. \tag{4.5}$$

Рассмотрим схему построения аналога ТП (4.4) для множества $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$. Иными словами, рассмотрим построение топологии волмэновского типа для пространства с «единицей» $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$. Для этого заметим (см. [4, раздел 5]), что (см. (2.12)), как легко проверить, $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{E}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]$, а тогда $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{E}]) \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]$ и, как следствие, определена топология волмэновского типа (см. [4, (5.7)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]. \tag{4.6}$$

Для дальнейшего исследования представляется полезным напомнить конструкции [1–4], связанные с МСС. В настоящем изложении это делается (в § 5) в краткой форме и касается изучения ТП

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle). \tag{4.7}$$

При этом в отношении $\mathcal{E}$ предполагается только, что $\mathcal{E} \in \pi[E]$.

Т е о р е м а 4.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{E} \colon \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})\}. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $\mathcal{E} \subset \mathfrak{C}$ (см. (4.2)). При этом справедливо свойство, следующее из (3.7): если $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{C})$, то

$$\bigcup_{C \in \mathcal{K}} C \in \mathfrak{C} : \Phi_{\mathfrak{C}}(\bigcup_{C \in \mathcal{K}} C) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Phi_{\mathfrak{C}}(C). \tag{4.9}$$

Обозначим через Ω семейство в правой части (4.8). Покажем, что

$$\Omega \subset \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}). \tag{4.10}$$

В самом деле, пусть $\tilde{\mathcal{W}} \in \Omega$, а $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})$ обладает свойством $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cap \mathcal{E}$. При этом $E \in \tilde{\mathcal{W}}$, а потому $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$. Далее в силу (2.1), (2.2)

$$(\varnothing \notin \tilde{\mathcal{W}})\&(\forall A \in \tilde{\mathcal{W}}\ \forall B \in \tilde{\mathcal{W}} \colon A \cap B \in \tilde{\mathcal{W}})\&(\forall H \in \tilde{\mathcal{W}}\ \forall L \in \mathcal{E} \colon (H \subset L) \Longrightarrow (L \in \tilde{\mathcal{W}})).$$

Итак, $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})$. Отметим, что согласно (2.2)

$$(\tilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})) \iff (\forall I \in \mathcal{E}\ (I \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \tilde{\mathcal{W}}) \Longrightarrow (I \in \tilde{\mathcal{W}})). \tag{4.11}$$

Пусть $D \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $D \in \mathfrak{C}$. По выбору $\mathcal{W}$ имеем (см. (2.2)), что

$$(D \cap H \neq \varnothing\ \forall H \in \mathcal{W}) \Longrightarrow (D \in \mathcal{W}). \tag{4.12}$$

Пусть $D \cap \mathbf{H} \neq \varnothing\ \forall \mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{W}}$. Выберем произвольно $W \in \mathcal{W}$, после чего, используя (4.3), подберем $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ со свойством

$$W = \bigcup_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma. \tag{4.13}$$

Поскольку также $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{C})$, то справедливо (см. (4.9)) равенство

$$\Phi_{\mathfrak{C}}(W) = \bigcup_{C \in \mathfrak{K}} \Phi_{\mathfrak{C}}(C). \tag{4.14}$$

При этом $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathfrak{C}}(W)$. В силу (4.14) получаем, что для некоторого $\mathbb{K} \in \mathfrak{K}$

$$\mathcal{W} \in \Phi_{\mathfrak{C}}(\mathbb{K}). \tag{4.15}$$

Поэтому $\mathbb{K} \in \mathcal{W}$. По выбору $\mathfrak{K}$ имеем, что $\mathbb{K} \in \mathcal{E}$, а тогда $\mathbb{K} \in \tilde{\mathcal{W}}$. Поэтому $D \cap \mathbb{K} \neq \varnothing$ по предположению. Согласно (4.13) $\mathbb{K} \subset W$. Тогда $D \cap \mathbb{K} \subset D \cap W$ и, стало быть, $D \cap W \neq \varnothing$. Поскольку $W \in \mathcal{W}$ выбиралось произвольно, установлено, что $D \cap H \neq \varnothing\ \forall H \in \mathcal{W}$. В силу (4.12) $D \in \mathcal{W}$ и, как следствие, $D \in \tilde{\mathcal{W}}$ по выбору D. Получили импликацию

$$(D \cap H \neq \varnothing\ \forall H \in \tilde{\mathcal{W}}) \Longrightarrow (D \in \tilde{\mathcal{W}}).$$

Коль скоро выбор D был произвольным, установлено (см. (4.11)), что $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$, чем и завершается проверка (4.10).

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$ и $\mathfrak{W} \overset{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathfrak{C} | \exists L \in \mathcal{V}\colon L \subset \Lambda\}$. Тогда $\mathfrak{W} \in \mathbb{F}^\star(\mathfrak{C})$, что легко проверяется с учетом (2.1). Выберем произвольно $\mathbb{V} \in \mathcal{V}$. Тогда, в частности, $\mathbb{V} \in \mathfrak{C}$ и, как следствие, $\mathbb{V} \in \mathfrak{W} \cap \mathcal{E}$. Итак,

$$\mathcal{V} \subset \mathfrak{W} \cap \mathcal{E}. \tag{4.16}$$

С другой стороны (см. (2.1)), $\mathfrak{W} \cap \mathcal{E} \subset \mathcal{V}$, а тогда (см. (4.16))

$$\mathcal{V} = \mathfrak{W} \cap \mathcal{E}. \tag{4.17}$$

С учетом (2.4) имеем, однако, для некоторого $\tilde{\mathfrak{W}} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})$ свойство

$$\mathfrak{W} \subset \tilde{\mathfrak{W}}. \tag{4.18}$$

Легко видеть, что $\tilde{\mathfrak{W}} \cap \mathcal{E} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})$. Поэтому истинна импликация

$$(\mathcal{V} \subset \tilde{\mathfrak{W}} \cap \mathcal{E}) \Longrightarrow (\mathcal{V} = \tilde{\mathfrak{W}} \cap \mathcal{E}).$$

Но в силу (4.17) и (4.18) $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathfrak{W}} \cap \mathcal{E}$, а тогда $\mathcal{V} = \tilde{\mathfrak{W}} \cap \mathcal{E} \in \Omega$. Итак, $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) \subset \Omega$, что с учетом (4.10) доставляет утверждение теоремы. □

§ 5. Максимальные сцепленные системы множеств из π-системы $\mathcal{E}$

Напомним, что семейство $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ называется сцепленным, если

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \qquad \forall \Sigma_1 \in \mathcal{S} \qquad \forall \Sigma_2 \in \mathcal{S}.$$

Тогда

$$(\mathrm{link})[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) | \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \quad \forall \Sigma_1 \in \mathcal{S} \quad \forall \Sigma_2 \in \mathcal{S}\}$$

есть (непустое) семейство, элементами которого являются непустые сцепленные подсемейства $\mathcal{P}(E)$. Если $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то семейство

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle [E] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathcal{X} \in (\mathrm{link})[E] | \mathcal{X} \subset \mathfrak{X} \} \tag{5.1}$$

состоит из всевозможных сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$. В качестве $\mathfrak{X}$ может, в частности, использоваться π-система. Заметим, что (при $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$) в виде

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathcal{X} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle [E] | \ \forall \mathcal{Y} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle [E] \ (\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}) \Longrightarrow (\mathcal{X} = \mathcal{Y}) \} \tag{5.2}$$

имеем семейство всех МСС из (5.1). Отметим, что, как легко проверить,

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] = \{ \mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle [E] | \ \forall L \in \mathcal{E} \ (L \cap S \neq \varnothing \ \forall S \in \mathcal{S}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{S}) \} \neq \varnothing. \tag{5.3}$$

При этом $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) \subset \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]$, и с учетом леммы Цорна проверяется свойство

$$\forall \mathfrak{L}_1 \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle [E] \ \exists \mathfrak{L}_2 \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] \colon \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2. \tag{5.4}$$

Если $L \in \mathcal{E}$, то $\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|L] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathfrak{L} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] | L \in \mathfrak{L} \}$. Зависимость

$$L \mapsto \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|L] \colon \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E])$$

очевидным образом изотонна (см. (5.4) и [4, раздел 4]). Пусть, кроме того,

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}} [E|H] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathfrak{L} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] | \ \exists L \in \mathfrak{L} \colon L \subset H \} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{5.5}$$

Отметим, что $\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|H] = \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}} [E|H] \cap \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$ при $H \in \mathcal{P}(E)$. Напомним также, что (см. [4, (4.9)])

$$\begin{gathered} \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{ \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}} [E|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}] \} : \\ \hat{\mathfrak{C}}^\star_0[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{ \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|L] \colon L \in \mathcal{E} \} = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]} [\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]]. \end{gathered} \tag{5.6}$$

При этом $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]$ и определена топология

$$\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]$$

со свойством суперкомпактности:

$$\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]];$$

см. [4, раздел 5]. Итак,

$$(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E], \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle) \tag{5.7}$$

есть суперкомпактное ТП, для которого

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]; \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle]. \tag{5.8}$$

Дополнительно заметим, что (5.7) есть T_1-пространство (см. [4, раздел 5]). Итак, (5.7) является суперкомпактным T_1-пространством. Заметим, наконец, что $\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}] = \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]|_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}$ (см. [4, (5.8)]), откуда с учетом (4.6) и (5.8) вытекает, что (4.7) есть подпространство ТП (5.7), поскольку [4, предложение 5.3]

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}} \langle E \rangle = \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle |_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}. \tag{5.9}$$

Из (5.9) имеем, в частности, тот факт, что (4.7) является T_1-пространством.

Заметим теперь, что, как легко проверить, $\hat{\mathfrak{C}}^\star_0[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]$ и, следовательно, $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^\star_0[E;\mathcal{E}]) \in (\mathrm{BAS})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]$; определена топология

$$\mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^\star_0[E;\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]].$$

Более того, согласно [4, предложение 6.4] имеем, что

$$(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle) \tag{5.10}$$

есть нульмерное T_2-пространство, причем (2.8) является [4, предложение 6.5] подпространством ТП (5.10):

$$\mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E] = \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle |_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E})}. \tag{5.11}$$

В связи с ТП (5.7) и (5.10) напомним, что (см. [4, предложение 7.1])

$$\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle \subset \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle. \tag{5.12}$$

Как следствие (см. (5.9), (5.11)), $\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle \subset \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]$. Мы получили два БТП:

$$(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle, \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]), (\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle, \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle), \tag{5.13}$$

первое из которых является (см. (5.9), (5.11)) подпространством второго. Отметим некоторые положения, касающиеся условий вырожденности и, напротив, условий невырожденности данных БТП.

Т е о р е м а 5.1. *Если* $\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]$, *то* $\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle = \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]$. Тогда (см. (1.4), (2.12), (2.14), (2.23)) при $L \in \mathcal{E}$ имеем, что

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{E}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]$$

и, как следствие, $\Phi_{\mathcal{E}}(L) \in \mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]$. Тогда (см. (2.6)) $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]$. Тем более имеем свойство

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \subset \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]). \tag{5.14}$$

Из (2.7), (2.9), (4.6) и (5.14) вытекает, что

$$\mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E] \subset \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle. \tag{5.15}$$

Из (5.9), (5.11), (5.12) и (5.15) следует требуемое равенство. □

Итак, установлена импликация

$$(\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]) \Longrightarrow (\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle = \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]). \tag{5.16}$$

Далее, из положений [4, раздел 7] вытекает, что

$$((\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]) \vee (\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E])) \Longrightarrow (\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle = \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle). \tag{5.17}$$

Итак, при $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$ или $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$ в виде

$$(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{E} \rangle) = (\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_\star \langle E | \mathcal{E} \rangle)$$

имеем нульмерный суперкомпакт (то есть нульмерное суперкомпактное T_2-пространство). При $\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]$ в виде

$$(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle) = (\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]) \tag{5.18}$$

получаем нульмерное T_2-пространство; если дополнительно $\mathcal{E} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$, то (5.18) есть нульмерный компакт (нульмерное компактное T_2-пространство). Здесь учитываем [4, (8.4); предложение 6.1]. Мы покажем, однако, что данное свойство распространяется и на общий случай $\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]$.

В заключение раздела отметим некоторые свойства МСС, не являющихся у/ф (напомним, что всякий у/ф π-системы является МСС). Соответствующие доказательства легко извлекаются из определений. Прежде всего, МСС, не являющиеся у/ф, обладают свойством пустого пересечения всех своих множеств:

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma = \varnothing \quad \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}) \tag{5.19}$$

(рассматриваемые в (5.19) МСС подобны свободным у/ф). При этом

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}) = \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^\star(\mathcal{E}). \tag{5.20}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Справедливо равенство*

$$\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})=\{\mathcal{S}\in\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]|\exists A\in\mathcal{S}\ \exists B\in\mathcal{S}\ \exists C\in\mathcal{S}:\ A\cap B\cap C=\varnothing\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из (5.3). Отметим в качестве очевидного следствия следующее свойство: МСС π-системы $\mathcal{E}$, для которой пересечение любых трех множеств данной МСС непусто, непременно является у/ф упомянутой π-системы. В связи с вопросом о существовании МСС, не являющихся у/ф, обратимся к примеру 4.18 в [13, гл. VII].

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\exists x\in E\ \exists y\in E\ \exists z\in E$:

$$(x\neq y)\&(y\neq z)\&(x\neq z)\&(\{x;y\}\in\mathcal{E})\&(\{y;z\}\in\mathcal{E})\&(\{x;z\}\in\mathcal{E}).\tag{5.21}$$

Тогда, как легко проверить с учетом (5.4), множество (5.20) непусто (используем также вышеупомянутый пример 4.18 из [гл. VII]10). Заметим в этой связи, что в силу (1.2) для $x\in E$, $y\in E$ и $z\in E$ со свойствами (5.21) непременно $\{x\}\in\mathcal{E}$, $\{y\}\in\mathcal{E}$ и $\{z\}\in\mathcal{E}$. □

Имеет смысл отметить естественные частные случаи, в которых можно ограничиться первыми тремя условиями в (5.21). Итак, до конца настоящего раздела полагаем, что

$$\exists x\in E\ \exists y\in E\ \exists z\in E\colon (x\neq y)\&(y\neq z)\&(x\neq z)\tag{5.22}$$

(иными словами, полагаем, что E содержит не менее трех элементов).

1. Пусть $\mathcal{E}\in(\mathrm{alg})[E]$ и при этом $\{x\}\in\mathcal{E}\ \ \forall x\in E$ (условие (5.22) также выполнено). Тогда

$$\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})\in\mathbb{T}_\star\langle E|\mathcal{E}\rangle\setminus\{\varnothing\}$$

(используем (1.5), (5.11) и свойства, отмеченные в связи с (5.18); см. также предложение 3.1).

2. Пусть $\mathcal{E}=\mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau\in(\mathrm{top})[E]$, и при этом (E,τ) есть нормальное [6, § 1.5] ТП. Тогда

$$\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})\in\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle\setminus\{\varnothing\}\tag{5.23}$$

(в силу (5.12) и (5.23) имеем также $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})\in\mathbb{T}_\star\langle E|\mathcal{E}\rangle\setminus\{\varnothing\}$).

Итак, в двух характерных частных случаях МСС, не являющиеся у/ф, образуют в совокупности непустые открытые множества.

§ 6. Топология волмэновского типа, 2

Вернемся к рассмотрению ТП (4.7); уже отмечалось, что (4.7) есть T_1-пространство. Напомним свойства (4.2)–(4.5). При этом семейство $\mathcal{E}\in\pi[E]$ не является, вообще говоря, решеткой. Однако в силу (4.6) и соотношений двойственности

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E});\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle].\tag{6.1}$$

Итак, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]$ есть замкнутая предбаза ТП (4.7). Тогда

$$\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}])\in(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E});\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle];\tag{6.2}$$

получили замкнутую базу ТП (4.7).

В силу (6.2)

$$\{\cap\}(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]))\in(\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})],$$

и, более того, справедливо (см. § 1) равенство

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle=\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\{\cap\}(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]))].\tag{6.3}$$

С учетом теоремы 4.1 введем в рассмотрение сюръекцию

$$\Psi\overset{\triangle}{=}(\mathcal{U}\cap\mathcal{E})_{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}\in\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})^{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}.\tag{6.4}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если $D\in\mathcal{E}$, то $\Psi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(D))=\Phi_{\mathfrak{C}}(D)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что $D \in \mathfrak{C}$ (см. (4.2), (4.3)) и $\Phi_{\mathfrak{C}}(D)$ соответствует (2.5). Заметим, что

$$\Omega \stackrel{\triangle}{=} \Psi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(D)) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}) | \mathcal{U} \cap \mathcal{E} \in \Phi_{\mathcal{E}}(D)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})). \tag{6.5}$$

Пусть $\mathcal{U}_\star \in \Omega$. Тогда в силу (6.5) $\mathcal{U}_\star \in \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})$ и при этом $\mathcal{U}_\star \cap \mathcal{E} \in \Phi_{\mathcal{E}}(D)$.

В частности, $D \in \mathcal{U}_\star$. Тогда (см. (2.5)) $\mathcal{U}_\star \in \Phi_{\mathfrak{C}}(D)$. Итак, установлено, что $\Omega \subset \Phi_{\mathfrak{C}}(D)$. Пусть, напротив, $\mathcal{U}^\star \in \Phi_{\mathfrak{C}}(D)$. Тогда $D \in \mathcal{U}^\star$ и, как следствие, $D \in \mathcal{U}^\star \cap \mathcal{E}$, где $\mathcal{U}^\star \cap \mathcal{E} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$ в силу теоремы 4.1. Следовательно, $\mathcal{U}^\star \cap \mathcal{E} \in \Phi_{\mathcal{E}}(D)$; см. (2.5). С учетом (6.5) получаем, что $\mathcal{U}^\star \in \Omega$, чем завершается проверка вложения $\Phi_{\mathfrak{C}}(D) \subset \Omega$, а следовательно, и равенства $\Omega = \Phi_{\mathfrak{C}}(D)$. $\square$

С л е д с т в и е 6.1. *Если* $\mathbb{M} \in \{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}])$, *то* $\Psi^{-1}(\mathbb{M}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По выбору $\mathbb{M}$ имеем, что

$$\mathbb{M} = \bigcup_{M \in \mathcal{K}} M \tag{6.6}$$

для некоторого семейства $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}])$. При этом согласно (2.6) и предложению 6.1 $\Psi^{-1}(M) \in (\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}]$, где $M \in \mathcal{K}$. Тогда (см. (6.6))

$$\Psi^{-1}(\mathbb{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{K}} \Psi^{-1}(M). \tag{6.7}$$

С учетом (4.5) имеем, в частности, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]],$$

а тогда по свойствам замкнутых множеств имеем из (6.7), что $\Psi^{-1}(\mathbb{M}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]]$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. На самом деле в силу (3.7) и предложения 6.1

$$\Psi^{-1}(\mathbb{M}) \in (\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}] \quad \forall \mathbb{M} \in \{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]).$$

В самом деле, фиксируем $\mathbb{M}$ в соответствии с условиями следствия 6.1. Тогда имеем (6.7), где $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}])$. Подберем $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ так, что (см. (2.6)) $\mathcal{K} = \{\Phi_{\mathcal{E}}(L) \colon L \in \mathfrak{K}\}$. Согласно (6.7) и предложению 6.1 имеем цепочку равенств

$$\Psi^{-1}(\mathbb{M}) = \bigcup_{L \in \mathfrak{K}} \Psi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(L)) = \bigcup_{L \in \mathfrak{K}} \Phi_{\mathfrak{C}}(L) = \Phi_{\mathfrak{C}}(\bigcup_{L \in \mathfrak{K}} L) \in (\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}],$$

где учтены (2.6), (3.7) и (4.2). $\square$

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если* $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle]$, *то* $\Psi^{-1}(\mathbf{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем замкнутое множество $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle]$. С учетом (6.1) имеем тот факт, что

$$\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E});\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle].$$

Тогда $\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]))$, а потому

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{X} \in \kappa} \mathbb{X}, \tag{6.8}$$

где $\kappa \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]))$. Учтем следствие 6.1. Тогда (см. (6.8))

$$\Psi^{-1}(\mathbf{F}) = \bigcap_{\mathbb{F} \in \eta} \mathbb{F}, \tag{6.9}$$

где $\eta \stackrel{\triangle}{=} \{\Psi^{-1}(\mathbb{X}) \colon \mathbb{X} \in \kappa\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})}[\mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E]])$. Требуемое утверждение получаем из (6.9) по свойствам замкнутых множеств (см. (1.7)). $\square$

Из предложения 6.2 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 6.1. *Отображение* Ψ *непрерывно в смысле ТП* $(\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}), \mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E])$ *и* $(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle)$*:*

$$\Psi^{-1}(\mathbf{C}) \in \mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E] \ \ \forall \mathbf{C} \in \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle.$$

Учитывая сюръективность Ψ (6.4), получаем, что ТП (4.7) есть непрерывный образ компактного ТП (4.4). Тогда ТП (4.7) само компактно (см. [9, п. 3.1.10]). Учитывая (5.9), получаем (см. [9, п. 2.1.6]) следующее положение.

Т е о р е м а 6.2. *В виде* (4.7) *реализуется компактное* T_1*-пространство.*

Подчеркнем, что теорема 6.2 установлена при условии, что в (4.7) $\mathcal{E} \in \pi[E]$, то есть в очень общем случае.

Т е о р е м а 6.3. *Если* $\mathcal{E} \in \pi^\natural[E]$, *то ТП* (5.18) *является нульмерным компактом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации (5.16) и теоремы 6.2.

З а м е ч а н и е 3. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{E} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и при этом (E,τ) есть T_1-пространство. Итак, обсуждается вариант, используемый при построении расширения Волмэна (см. [6, раздел 3.6]). Тогда [1; 4, раздел 8] при $\tau \neq \mathcal{P}(E)$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \neq \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E].$$

Итак, в случае, когда исходное T_1-пространство (E,τ) не является дискретным, первое в (5.13) БТП не вырождено; в силу (5.9) и (5.11) невырожденным является и второе в (5.13) БТП.

§ 7. Свойства плотности и некоторые представления множеств притяжения

В настоящем разделе предполагается, что $\mathcal{E} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (рассматривается случай отделимой π-системы). Тогда (см. § 2) $(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})\ \forall x \in E$. В виде

$$(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot] \overset{\triangle}{=} ((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x])_{x\in E} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})^E \tag{7.1}$$

имеем оператор погружения исходного множества E в первое из упоминаемых в (5.13) БТП. Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то $(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}))$ и для данного множества определены замыкания в смысле топологий $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]$; известно [15, предложение 1], что

$$\mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) | A \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{7.2}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Если* $\Sigma \in \mathcal{E}$, *то справедлива цепочка равенств*

$$\mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle) = \mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]) = \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]$, имеем вложения

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) = \mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]) \subset \mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle) \tag{7.3}$$

(учли также [15, (3.5)]). Отметим естественный аналог (4.5). С учетом (2.12) и (4.6) устанавливается, что

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]))$$

(при этом $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}^0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle]$), а тогда

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle]. \tag{7.4}$$

При этом $(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma) \subset \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)$. Как следствие (см. (7.4)),

$$\mathrm{cl}((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle) \subset \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma),$$

чем и завершается (см. (7.3)) доказательство. □

Поскольку $\Phi_{\mathcal{E}}(E) = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$, имеем из предложения 7.1 цепочку равенств

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle) = \mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]). \tag{7.5}$$

Из предложения 7.1 и (7.5) следует, что (в общем случае $\mathcal{E} \in \tilde{\pi}^0[E]$) топологии $\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle$ и $\mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]$ в некотором смысле близки по свойствам, а точнее, по свойствам, связанным с погружением E (в $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$) в виде всюду плотного множества.

В связи с конструкциями расширения абстрактных задач о достижимости полезно связать предложение 7.1 с множествами

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\tilde{\mathcal{C}}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) | \tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{U}\} \ \forall \tilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}). \tag{7.6}$$

Рассмотрим данный вопрос подробнее, фиксируя $\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$ и рассматривая $\mathcal{C}$ в качестве ограничений асимптотического характера на выбор $x \in E$. Заметим прежде всего, что

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\mathcal{C}) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{C}} \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]); \tag{7.7}$$

(7.6) полезно связать [15, предложение 2] с представлением множеств притяжения (МП). Полезно учесть при этом очевидное равенство

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\mathcal{C}) = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})), \tag{7.8}$$

легко следующее из (2.1), (2.2). Будем использовать определение МП в [17, определение 3.1], получая (в обозначениях [17]) множества

$$((\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}))),$$
$$((\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot], \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})));$$

с учетом [17, (3.6)] получаем совпадение двух вышеупомянутых МП:

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})]. \tag{7.9}$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})]. \tag{7.10}$$

При этом согласно [15, предложение 2]

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = \mathbb{F}_0^\star(E|\mathcal{C}). \tag{7.11}$$

С другой стороны, в силу (1.2), (7.9) и [17, (3.8)] получаем, что $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$ и

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = \bigcap_{C\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})} \mathrm{cl}((\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(C), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle) = \bigcap_{C\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})} \Phi_{\mathcal{E}}(C) \tag{7.12}$$

(мы учитываем предложение 7.1 и то, что $\forall \Sigma_1 \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}) \ \forall \Sigma_2 \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}) \ \exists \Sigma_3 \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})$: $\Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$). При этом подобно (7.7) имеем равенство

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})) = \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C})} \Phi_\Sigma(\mathcal{E}),$$

а тогда с учетом (7.8) и (7.12) получаем равенство

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\mathcal{C}). \tag{7.13}$$

Из (7.11) и (7.13) вытекает очевидная теперь теорема.

Т е о р е м а 7.1. *Множество $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\mathcal{C})$ определяет МП, универсальное в следующем смысле:*

$$\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\mathcal{C}) = (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^\star_{\mathcal{E}}[E]; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}] = (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle; (\mathcal{E}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{C}].$$

Список литературы

1. Ченцов А.Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. DOI: 10.20537/vm170307
2. Ченцов А.Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 55–79. DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03
3. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. Issue 2. P. 100–121. DOI: 10.15826/umj.2017.2.012
4. Ченцов А.Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
5. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
6. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.
7. Грызлов А.А., Бастрыков У.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. DOI: 10.20537/vm100302
8. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. DOI: 10.20537/vm130102
9. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
10. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wiss., 1969. P. 89–90.
11. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. 238 p.
12. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fundamenta Mathematicae. 1975. Vol. 89. Issue 1. P. 81–91. DOI: 10.4064/fm-89-1-81-91
13. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. DOI: 10.20537/vm140108
16. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
17. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112

Поступила в редакцию 14.08.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru.

A. G. Chentsov

Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian).

Keywords: bitopological space, maximal linked systems, ultrafilter.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-07

Ultrafilters (maximal filters) and maximal linked systems on π-systems with “zero” and “unit” are considered. Different variants of topological equipment and the resulting bitopological spaces are discussed. It is noted that the bitopological space of ultrafilters can be considered as a subspace of the bitopological space of the maximal linked systems. Necessary and sufficient conditions for maximality of the filters and the properties characterizing maximal linked systems which are not ultrafilters are established. Some conditions sufficient for existence of such systems are clarified. Conditions under which bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems are degenerate (topologies defining the corresponding bitopological space coincide) and the conditions that guarantee nondegeneracy are found. A new variant of the density property of the initial set in the ultrafilter space with topology of Wallman type is given. This variant can be used in constructing extensions for abstract attainability problems with asymptotic constraints.

REFERENCES

1. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388. DOI: 10.20537/vm170307
2. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 49, pp. 55–79. DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03
3. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems, *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, issue 2, pp. 100–121. DOI: 10.15826/umj.2017.2.012
4. Chentsov A.G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
5. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
6. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25.
7. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17. DOI: 10.20537/vm100302
8. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16. DOI: 10.20537/vm130102
9. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p.
10. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wiss., 1969, pp. 89–90.
11. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p.
12. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fundamenta Mathematicae*, 1975, vol. 89, issue 1, pp. 81–91. DOI: 10.4064/fm-89-1-81-91
13. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006, 336 p.
14. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Warsawa: PWN, 1968, vii+417 p.
15. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 87–101. DOI: 10.20537/vm140108
16. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 12–39. DOI: 10.1134/S0081543811090021
17. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112

Received 14.08.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Chief Researcher, Department of Control Systems, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 600002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru.