УДК 517.911, 517.968

© *А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Панасенко*

ВОЗМУЩЕНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ[1]

Для вольтерровых включений с импульсными возмущениями рассматриваются вопросы локальной разрешимости, продолжаемости решений, доказано, что правая точка полуинтервала на котором все решения существуют полунепрерывно снизу зависит от параметров. Кроме того доказано, что если при некотором параметре включение априорно ограничено, то эта точка параметра не является изолированной с точки зрения априорной ограниченности, а также доказано, что множества решений (рассматриваемые как множества, зависящие от параметра) полунепрерывны сверху по Хаусдорфу в этой точке.

Ключевые слова: вольтерровы включения с импульсным оператором, продолжение решения.

Изучению функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями посвящены многие работы профессора Н.В. Азбелева и его учеников (см. [1]). В этом направлении им и его учениками получены глубокие и тонкие результаты. В нашем докладе мы развиваем идеи Н.В. Азбелева для исследования функциональных включений с вольтерровыми по А.Н. Тихонову многозначными отображениями и импульсными возмущениями.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$, $\mathrm{co}\,[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых выпуклых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $[a,c)$ $(c \leqslant \infty)$, и пусть последовательность чисел t_i, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию $a < t_1 < t_2 < \ldots < c$; если $c = \infty$, то последовательность может быть бесконечной, не имеющей предельных точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,c)$ пространство функций $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ непрерывных на интервалах $[a,t_1], (t_1,t_2], (t_2,t_3], \ldots$, имеющих в точках $t_1, t_2, t_3, \ldots$ правосторонние пределы.

Пусть $b \in (a,c)$. Через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ обозначим пространство всех сужений на $[a,b]$ функций $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,c)$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Пусть $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с аналогичной нормой. Через $\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ $(\Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]))$ обозначим множество всех непустых выпуклых компактов пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$ $(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$.

Рассмотрим семейство операторов $T_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$, $b \in (a,c)$ (b выступает как параметр). Будем предполагать, что это семейство обладает следующими свойствами:

1) для любого $b \in (a,c)$ множество $\Big\{(T_b x)(a) \subset \mathbb{R}^n : x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\Big\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$;

2) при каждом $b \in (a,c)$ для любого $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого $\nu \in (a,b)$ выполняется равенство $(T_b(x))\,|_a^\nu = T_\nu\left(x|_a^\nu\right)$, где $(T_b(x))\,|_a^\nu$ — множество сужений функций из множества $T_b(x)$ на отрезок $[a,\nu]$, $x|_a^\nu$ — сужение функции x на отрезок $[a,\nu]$ (таким образом при каждом $b \in (a,c)$ оператор $T_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову);

3) для любого $b \in (a,c)$ оператор $T_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ компактен и замкнут.

Пусть для точек t_i, $i = 1, 2, \ldots$, определенных выше, заданы непрерывные функции $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Для каждого $b \in (a,c)$ определим непрерывное отображение $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенствами:

$$(J_b x)(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [a,t_1]; \\ x(t_1) + I_1(x(t_1)), & \text{если } t \in (t_1,t_2]; \\ x(t_2) + I_2(x(t_2)), & \text{если } t \in (t_2,t_3]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ . \end{cases} \tag{1}$$

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты №№ 11–01–00–626, 11–01–00–645), Министерством образования и науки РФ (проект № 1.1877.2011, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», ГК № 14.740.11.0349).

Для каждого $b \in (a, c)$ рассмотрим включение

$$x \in T_b x + J_b x, \tag{2}$$

где под суммой в правой части включения (2) понимается алгебраическая сумма множеств.

Под решением включения (2) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, для которой существует такая функция $v \in T_b x$, что для любого $t \in [a, b]$ выполняется равенство

$$x(t) = v(t) + (J_b x)(t).$$

Отметим, что к включению (2) сводятся некоторые задачи, рассматриваемые в работах [1–5].

На наш взгляд, функции $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, естественно назвать *импульсными функциями*, а отображение $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, заданное равенствами (1), — *импульсным оператором*.

Из вольтерровости оператора $T_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(\mathbf{C}^n[a, b])$ вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Если все импульсные функции равны нулю, то для любого $b \in (a, c)$ множество решений включения* (2) *совпадает с множеством решений включения* (2) *с тождественным нулевым оператором J_b.*

Т е о р е м а 2. *Существует такое $b \in (a, c)$, что множество решений включения* (2) *является непустым компактом пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, если, кроме того, для любого $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ множество $(T_b x)(a) = 0$, то множество решений включения* (2) *и связно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$.*

Скажем, что функция $x : [a, \tau) \to \mathbb{R}^n$ является решением включения семейства включений (2) на $[a, \tau)$, если для произвольного $b \in (a, \tau)$ сужение функции x на отрезок $[a, b]$ является решением включения (2). Решение x семейства включений (2) на $[a, \tau)$ $(\tau \in (a, c))$ назовем *непродолжаемым*, если не существует такого решения y включения (2) $(b \in (\tau, c))$, что для любого $t \in [a, \tau)$ справедливо равенство $x(t) = y(t)$. Если x является решением семейства включений (2) на $[a, c)$, то будем считать решение x непродолжаемым.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы решение $x : [a, \tau) \to \mathbb{R}^n$ семейства включений* (2) *на $[a, \tau)$ было продолжаемым, необходимо и достаточно, чтобы x было ограничено на $[a, b)$.*

С л е д с т в и е 1. *Решение $x : [a, \tau) \to \mathbb{R}^n$ семейства включений* (2) *на $[a, \tau)$ $(\tau < c)$ непродолжаемо в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{t \to \tau - 0} |x(t)| = \infty$.*

Т е о р е м а 4. *Если функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ — решение включения* (2), *то существует такое непродолжаемое решение x семейства включений* (2) *на полуинтервале $[a, \tau) \subset [a, c)$, что x — продолжение решения y.*

Пусть K — метрическое пространство и импульсные функции $I_i : \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, непрерывны. Определим непрерывный импульсный оператор $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times K \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ равенствами (1), в которых значения импульсов зависят от параметра $\lambda \in K$, то есть $I_1(x(t_1), \lambda)$, $I_2(x(t_2), \lambda)$ и так далее. Для любого $b \in (a, c)$ рассмотрим включение

$$x \in T_b(x, \lambda) + J_b(x, \lambda), \tag{3}$$

где $\lambda \in K$, а отображение $T_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times K \to \Omega(\mathbf{C}^n[a, b])$ обладает свойствами:

4) для любых $b \in (a, c)$ и компактного $U \subset K$ множество

$$\Big\{ (T_b(x, \lambda))(a) \subset \mathbb{R}^n : x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b], \quad \lambda \in U \Big\}$$

ограничено в $\mathbb{R}^n$;

5) для любых $b \in (a, c)$ и $\lambda \in K$ отображение $T_b(\cdot, \lambda)$ вольтеррово по А.Н. Тихонову;

6) для любого ограниченного $U_1 \subset \widetilde{C}^n[a, b]$ и компактного $U_2 \subset K$ образ $T_b(U_1, U_2)$ предкомпактен в $C^n[a, b]$;

7) отображение $T_b : \widetilde{C}^n[a, b] \times K \to \Omega(C^n[a, b])$ замкнуто.

Пусть $H(\lambda)$ — множество всех непродолжаемых решений включения (3). Пусть $q(x) \in (a, c]$ — правая точка интервала, на котором определено решение $x \in H(\lambda)$.

Для любого $\lambda \in K$ обозначим

$$\begin{gathered}\nu(\lambda) = \sup \Big\{ b \in (a, c) : \forall x \in H(\lambda) \quad b < q(x) \\ \text{и множество} \quad \{x|_a^b : x \in H(\lambda)\} \quad \text{ограничено в пространстве} \quad \widetilde{C}^n[a, b] \Big\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Т е о р е м а 5. *Для любого $\lambda \in K$ существует $x \in H(\lambda)$, для которого справедливы соотношения*

$$q(x) = \nu(\lambda) = \inf \{q(y) : y \in H(\lambda)\} > a.$$

Отображение $\nu : K \to (a, c]$, заданное равенством (4), полунепрерывно снизу.

Пусть $H(\tau, \lambda)$ $(\tau \in (a, c))$ — множество всех решений включения (3). Будем говорить, что включение (3) априорно ограничено, если существует число $m > 0$, для которого для любого $\tau \in (a, b]$ не существует решения $y \in H(\tau, \lambda)$, удовлетворяющего неравенству

$$\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > m. \tag{5}$$

Если неравенство (5) выполняется для любого λ, принадлежащего некоторому множеству $U \subset K$, то в этом случае будем говорить, что включение (3) априорно ограничено на множестве $U \subset K$ в совокупности.

Из теоремы 5 вытекает

Т е о р е м а 6. *Пусть включение (3) $(b \in (a, c))$ априорно ограничено. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(\tau, \lambda)$ непусто, является компактом в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$, и для него выполняется равенство*

$$H(\tau, \lambda) = H(\lambda)|_a^\tau,$$

где $H(\lambda)|_a^\tau$ — множество сужений функций из $H(\lambda)$ на отрезок $[a, \tau]$. Кроме того, найдется такой шар с центром в точке $\lambda \in K$, что включение (3) априорно ограничено в совокупности на этом шаре.

З а м е ч а н и е 1. *Из теоремы 6 вытекает, что если включение (3) априорно ограничено, то точка $\lambda \in K$ не является изолированной с точки зрения априорной ограниченности.*

Из теоремы 6 вытекает

Т е о р е м а 7. *Пусть включение (3) априорно ограничено при $\lambda = \lambda_0 \in K$. Тогда множества решений $H(b, \lambda)$, рассматриваемые как множества, зависящие от параметра $\lambda \in K$, полунепрерывны сверху по Хаусдорфу в точке $\lambda_0 \in K$.*

Отметим, что изложенный подход исследования вольтерровых уравнений и включений с импульсными воздействиями несколько отличается от традиционных подходов изучения этих задач, поскольку здесь независимо от задачи определяется импульсный оператор $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и включение (2) рассматривается как включение, возмущенное этим оператором. На наш взгляд такой подход более удобен для исследования уравнений и включений с импульсными воздействиями, поскольку в рассмотренной задаче можно получить более общие результаты чем, например, методикой, опубликованной в работах [1, 3–5]. Кроме того, для исследования здесь задачи можно непосредственно применять классические результаты многозначного анализа.

Отметим также, что приведенные выше утверждения остаются справедливыми и в случае когда в (2) J_b — есть многозначный импульсный оператор. В этом случае для точек t_i, $i = 1, 2, \ldots$, определенных выше, заданы полунепрерывные сверху отображения $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathrm{co}[\mathbb{R}^n]$. Многозначный импульсный оператор $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$ определяется равенствами (1). При этом в равенствах (1) (и включении (2)) сумма понимается как алгебраическая сумма множеств. Таким образом $u \in J_b x$ $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ в том, и только в том случае, если найдутся такие элементы $u_i \in I_i(x(t_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, что функция $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенствам

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [a, t_1]; \\ x(t_1) + u_1, & \text{если } t \in (t_1, t_2]; \\ x(t_2) + u_2, & \text{если } t \in (t_2, t_3]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ . \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае под решением включения (3) с многозначным импульсным оператором $J_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b])$ понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существуют такая функция $v \in T_b x$ и функция $u \in J_b x$, представимая в виде (6), что для любого $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$x(t) = v(t) + u(t).$$

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. Булгаков А.И., Максимов В.П. Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 8. С. 1362–1374.
3. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
4. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010.
5. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001.

Поступила в редакцию 15.02.2012

A. I. Bulgakov, A. A. Grigorenko, E. A. Panasenko

Perturbation of Volterra inclusions by impulse operator

For Volterra inclusions with impulsive perturbations there are considered the problems of local solvability and extendability of solutions. It is proved that the right end-point of the interval on which all the solutions exist depends lower semi-continuously on the parameters. It is also shown that, if the inclusion is a-priori bounded for some parameter value, then this value can not be an isolated point, in the sense of a-priori boundedness, moreover the solutions sets (viewed as those depending on a parameter) are Hausdorff upper semicontinuous at this point.

Keywords: Volterra inclusions with impulse operator, extendability of solutions.

Mathematical Subject Classifications: 34H05, 34K35

Булгаков Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Григоренко Анна Александровна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: g.anya@mail.ru

Панасенко Елена Александровна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: panasenko@tsutmb.ru

Bulgakov Aleksandr Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia

Grigorenko Anna Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia

Panasenko Elena Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia