УДК 517.917

© ***Т. С. Быкова***

СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И КОНЕЧНОМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СУЩЕСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с последействием и конечномерным пространством существенных решений. Приводятся условия их устойчивости.

Ключевые слова: линейная система с последействием, пространство существенных решений.

§ 1. Теорема о приводимости

Линейную систему с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

будем отождествлять с функцией A, ее задающей. Здесь $r > 0$ и функция $A : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям, которые обеспечивают существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (1) (см., например, [1, 2]). В качестве пространства начальных функций рассматриваеся стандартное пространство $\mathfrak{S} \doteq C([-r,0], \mathbb{R}^n)$. Запись $x_t(\cdot)$ (или просто x_t) означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, то есть элемент пространства $\mathfrak{S}$. Далее, L_2-показателем Ляпунова решения $t \to x_t(\cdot, u)$ системы (1) с начальным условием $x_0(\cdot, u) = u(\cdot)$ будем называть число

$$\lambda(u) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|x_t(\cdot, u)\|_2}{t}, \quad \text{где} \quad \|u\|_2 = \Big(\int_{-r}^{0} |u(s)|^2\, ds\Big)^{1/2}.$$

В силу условий, накладываемых на систему A, L_2-показатели этой системы ограничены сверху. Если $\lambda(u) > -\infty$, то решение $t \to x_t(\cdot, u)$ будем называть *существенным.*

Введём следующие обозначения: $\mathfrak{S}^- = \{u \in \mathfrak{S} : \lambda(u) = -\infty\}$, $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, т. е. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}$.

Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{S}^+$ линейное подпространство $\mathbb{S}_0^p$ размерности p и построим движение $t \to x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Будем говорить, что это движение порождено *сужением* системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ функцией $t \to B(t)$. Будем далее отождествлять систему (2) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \ldots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t, \tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если:

1)функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$;

2) при $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и

3) выполнено неравенство $\sup\limits_{t\geqslant 0}\big(\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathbb{L}_2}\big) < \infty$.

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны.*

Т е о р е м а 1 (см. [3,4]). *Пусть* $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. *Тогда:*

а) *найдется ортогональное* ($L^*(t)L(t) = I_p$) *обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B *с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$;

б) *если, кроме того, всякое решение системы* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *«продолжаемо влево», то есть найдется константа* $\alpha > 0$ *такая, что для каждого* $u \in \mathbb{S}_0^p$, *любого* $\tau \in [-r, 0]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство* $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, *то в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система* B *с ограниченной на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$.

§ 2. Пример системы с последействием и конечномерным пространством существенных решений

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} dC(t,s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = D(t)y(t). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, а функции $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m)$, $D : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(m)$ и $C : \mathbb{R}\times[-r,0] \to \mathbb{M}(n,m)$ удовлетворяют естественным условиям, обеспечивающим существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (3).

Т е о р е м а 2. *Для любой системы с последействием вида* (3) *размерность пространства* $\mathfrak{S}^+$ *равна* $n + m$.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему вида (3) при $n = m = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + \gamma(t)y(t) + \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)dg(t,s), \\ \dot{y}(t) = \beta(t)y(t). \end{cases} \tag{4}$$

Согласно теореме 2 подпространство $\mathfrak{S}^+$ для системы (4) имеет размерность два.

Функции

$$s \to u^1(s) = \mathrm{col}(1,0), \quad s \in [-1,0],$$
$$s \to u^2(s) = \mathrm{col}(0,1), \quad s \in [-1,0],$$

рассматриваемые как начальные для системы (4), имеют конечные показатели. Выберем в качестве пространства начальных условий пространство $\mathfrak{S}^+ = \mathrm{lin}(u^1, u^2)$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда при $t \geqslant 0$ компоненты соответствующих решений будут иметь вид

$$x^1(t) = \exp\Big(\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\Big), \quad y^1(t) = 0,$$

$$x^2(t) = \int_0^t \exp\Big(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\Big)\varphi(s)ds, \quad y^2(t) = \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big),$$

где $\varphi(t) = \gamma(t)\exp\Big(\displaystyle\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big) + \int_{-1}^0 \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big)dg(t,s)$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотически подобная системе (4), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{\dot{z}_{11}(t)}{z_{11}(t)}\,\xi + \dfrac{z_{11}(t)}{z_{22}(t)}\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{z_{12}(t)}{z_{11}(t)}\Big)\,\eta, \\ \dot{\eta} = \dfrac{\dot{z}_{22}(t)}{z_{22}(t)}\,\eta, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$z_{11}(t) = \|x_t^1\|_2, \quad z_{12}(t) = \|x_t^1\|_2^{-1} \int_{-1}^{0} x_t^1(s) x_t^2(s) ds, \tag{6}$$

$$z_{22}(t) = \left(\|x_t^2\|_2^2 + \|y_t^2\|_2^2 - \|x_t^1\|_2^{-2} \Big(\int_{-1}^{0} x_t^1(s) x_t^2(s) ds \Big)^2 \right)^{1/2}. \tag{7}$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln z_{11}(t)}{t} \doteq \lambda_1, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln z_{22}(t)}{t} \doteq \lambda_2,$$

где функции $t \to z_{11}(t)$ *и* $t \to z_{22}(t)$ *определены равенствами* (6) *и* (7), *тогда:*

а) *система обыкновенных дифференциальных уравнений* (5) *правильная и ее показатели, и, следовательно, показатели системы с последействием* (4) *исчерпываются значениями*

$$\lambda_0 = -\infty, \ \ \lambda_1, \ \ \lambda_2;$$

б) *если* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, *то нулевое решение системы* (4) *экспоненциально устойчиво.*

С л е д с т в и е 2. *Если система* (5) *не предполагается правильной, то:*

а) *нулевое решение системы с последействием* (4) *устойчиво тогда и только тогда, когда функции*

$$t \to z_{11}(t) \ \ и \ \ t \to \big(z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\big)$$

ограничены на полуоси $\mathbb{R}^+$;

б) *нулевое решение системы* (4) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to+\infty} \big(z_{11}^2(t) + z_{12}^2(t) + z_{22}^2(t)\big) = 0.$$

Список литературы

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
3. Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 731–737.
4. Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Асимптотическая теория линейных систем с последействием // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 2 (36). С. 21–26.

Поступила в редакцию 01.02.2012

T. S. Bykova

Systems with aftereffect and finite-dimensional space of essential solutions

Some systems of linear equations with aftereffect and finite-dimensional space of essential solutions are considered. The conditions for stability of these systems are given.

Keywords: linear system with aftereffect, space of essential solutions.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34D08

Быкова Татьяна Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Ижевский государственный технический университет, 426039, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7. E-mail: tsbykova@gmail.com

Bykova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia