УДК 517.954

© ***А. С. Волкова, В. В. Провоторов***

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ НА ГРАФЕ

В настоящей работе обосновывается существование граничных управляющих функций и представлен метод нахождения их в модельной задаче управления колебаниями упругой системы из m струн, закрепленных по типу графа–звезды, состоящей в переводе процесса колебаний системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние.

Ключевые слова: колебания на графе, граничные управления, полная управляемость.

В классе функций из C^2 представлен метод нахождения граничных управляющих воздействий в задаче управления колебаниями дифференциальной системой на графе, состоящей в переводе процесса колебаний системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние. Решение задачи представлено в явной аналитической форме.

Колебания на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени $t \in (0,T)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k} \tag{1}$$

внутри каждого ребра γ_k $(k = \overline{1,m-1})$ и соотношениями в узле ξ (условия непрерывности и гладкости)

$$\underset{(k=\overline{1,m-1})}{\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_k} = \Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_m}},\ \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_m},\ t \in (0,T). \tag{2}$$

К соотношениям (1), (2) добавим граничные условия в граничных узлах:

$$\Omega(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t)\ (k = \overline{1,m-1}), \quad \Omega(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

начальные и финальные условия:

$$\Omega(x,0) = \varphi(x), \ \ \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0) = \psi(x), \ \ x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$\Omega(x,T) = \tilde{\varphi}(x), \ \ \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,T) = \tilde{\psi}(x), \ \ x \in \Gamma. \tag{5}$$

Получим краевые задачи с начальными (1)–(3), (4) и финальными (1)–(3), (5) условиями; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ — функции класса $C(\Gamma)$.

Обозначим через Γ_0 объединение ребер графа, не содержащих концевых точек: $\Gamma_0 = \Gamma\backslash(\partial\Gamma \cup \{\xi\})$. Областью задания переменных уравнений (1) будем считать цилиндр Ц$= \Gamma_0 \times (0,T)$, соотношения (2) задаются на J(Ц)$= \{\xi\} \times (0,T)$. Решением краевой задачи (1)–(3), (4) (или (1)–(3), (5)) является функция $\Omega(x,t)$ класса $C^2(\Gamma \times [0,T])$, удовлетворяющая уравнениям (1) в Ц, соотношениям (2) в J(Ц), начальным условиям (4) при $t = 0$, $x \in \Gamma$ (или финальным условиям (5) при $t = T$, $x \in \Gamma$) и граничным условиям (3) при $x \in \partial\Gamma$, $t \in [0,T]$. Для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ имеют место естественные условия согласования, а также условия гладкости $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x) \in C^2(\Gamma_0)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x) \in C^1(\Gamma_0)$ и $\mu_k(t)$ $(k = \overline{1,m-1})$, $\nu(t) \in C^2[0,T]$.

З а д а ч а 1. Задача управления колебаниями дифференциальной системы (1)–(3) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$ $(k = \overline{1,m-1})$, $\nu(t)$ из граничных условий (3) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (4), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (5).

Для решения задачи 1 будут рассмотрены ее частные случаи.

З а д а ч а 2. Задача гашения колебаний дифференциальной системы (1)–(3) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$ $(k = \overline{1, m-1})$, $\nu(t)$ из граничных условий (3) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (4), а в момент времени $t = T$ выполнялись нулевые финальные условия (5): $\tilde{\varphi}(x) = 0$, $\tilde{\psi}(x) = 0$, $x \in \Gamma$.

З а д а ч а 3. Задача перевода покоящейся дифференциальной системы (1)–(3) в заданное состояние состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$ $(k = \overline{1, m-1})$, $\nu(t)$ из граничных условий (3) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись нулевые начальные условия (4) $(\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = 0,\ x \in \Gamma)$, а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (5).

Решение задачи 1 получается как сумма решений задач 2 и 3. Для анализа поставленной задачи может быть применен метод распространяющихся волн с учетом эффекта отражения в узлах сети; в работе, однако, используется спектральная техника (анализ Фурье): сравнительно легко преодолеваются сложности, порожденные геометрией графа, тем более в случае, когда граф является произвольным деревом. Главный результат исследования представлен в виде готовых формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

Поступила в редакцию 30.01.2012

A. S. Volkova, V. V. Provotorov

The problem of boundary control for a differential system on a graph

We substantiate the existence of boundary control functions and present a method of finding them in a model problem of controlling the vibrations of an elastic system of m strings attached to the graph type stars, which consists in the translation process of oscillation of the system from a given initial state to a given final state.

Keywords: fluctuations in the graph, the boundary control, complete controllability.

Mathematical Subject Classifications: 34H05

Волкова Анна Сергеевна, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394050, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1. E-mail: volan100@mail.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич, д.ф.-м.н., доцент, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394050, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1. E-mail: wwprov@mail.ru

Volkova Anna Sergeevna, post-graduate student, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394050, Russia

Provotorov Vyacheslav Vasil'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394050, Russia