

УДК 517.925:517.977

© А. К. Деменчук

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ЧАСТОТ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается линейная периодическая система управления в случае совпадения рангов матрицы при управлении и расширенной матрицы. Предполагается, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Ключевые слова: линейная периодическая управляемая система, асинхронный спектр.

В середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях, проводимых под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [1], изучалось параметрическое воздействие на двухконтурные параметрические системы. В частности, при включении в цепь питания электромотора некоторой емкости для компенсации переменной индуктивности, были установлены следующие факты: 1) скорость вращения электромотора не синхронна с частотой тока питания; 2) плавное изменение этой скорости с изменением собственной частоты колебательного контура. В отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была получена новая своеобразная трансформация частоты вращения мотора практически в любом отношении с частотой контура. Тем самым была продемонстрирована возможность возбуждения колебаний на частотах, несоизмеримых с частотой изменения параметров системы.

Тем не менее изучение периодических решений периодических дифференциальных систем достаточно длительное время, вплоть до конца сороковых годов прошлого века, основывалось на гипотезе о соизмеримости периодов решения и системы. По-видимому, первым, кто указал на ошибочность такого предположения, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [2]. В дальнейшем это направление развивалось Я. Курцвейлем и О. Вейвдой, Н. П. Еругиным, И. В. Гайшуном, Э. И. Грудю и др. Впоследствии такие периодические решения и описываемые ими колебания названы сильно нерегулярными [3], подчеркивая тем самым их отличие от ранее изучавшихся.

К началу 70-х гг. прошлого века в физике был известен ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные, частота которых практически не зависит от частоты источника [4,5]. В таких системах реализуется задаваемое определенным образом воздействие на колебания, приводящее к периодическому вкладу энергии от внешнего гармонического источника, с целью генерирования, усиления или преобразования колебаний. Так в [4] исследован случай, когда гармоническая сила, с которой поле конденсатора действует на пролетающий заряд, имеет частоту, несоизмеримую с частотой собственных колебаний заряда. При этом возможно установление устойчивых незатухающих колебаний на собственной частоте, то есть сильно нерегулярных колебаний.

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом [5,6]. Задачу синтеза асинхронных режимов линейных систем сформулируем в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний.

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где $A(t)$ — непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, B — постоянная $(n \times n)$ -матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x$$

с непрерывной ω -периодической $(n \times n)$ -матрицей $U(t)$. Задачу выбора такой матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L (целевым множеством) будем называть задачей управления асинхронным спектром с целевым множеством L .

Поставленная задача является обобщением задачи о назначении спектра для нестационарного случая. Отметим, что для регулярных колебаний выбор частот, отличных от кратных частот правой части системы (1), невозможен. В [7] дано решение задачи управления асинхронным спектром с вырожденной матрицей B и нулевым средним значением \hat{A} матрицы коэффициентов $A(t)$. В настоящем докладе рассматривается случай совпадения рангов матрицы B и расширенной $(n \times 2n)$ -матрицы, составленной из B и \hat{A} , то есть при выполнении условия

$$\text{rank } B = \text{rank } \{B, \hat{A}\} \quad (2)$$

Пусть Q — постоянная невырожденная $(n \times n)$ -матрица такая, что у матрицы QB будет $n - r$ нулевых первых строк, в то время как остальные r строк — линейно независимыми, $r = \text{rank } B$. Обозначим через $C_{d,r}^{(12)}(t)$ правый верхний блок размерности $d \times r$ матрицы $(A(t) - \hat{A})Q^{-1}$. Под столбцовым рангом непрерывной $(n \times n)$ -матрицы будем понимать наибольшее число ее линейно независимых столбцов.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Для системы (1) с совпадением рангов (2) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\begin{aligned} \text{rank}_{col} C_{d,r}^{(12)} &= r_1 < r, \\ |L| &\leq [(r - r_1)/2]. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Папалекси Н.Д. Об одном случае параметрически связанных систем // Journ. Of Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.
2. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4. № 1. P. 37–45.
3. Demenchuk A.K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126. № 1. P. 221–228.
4. Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б., Козаков М.И. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1065–1066.
5. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И., Вермель А. С., Галкин Ю. В. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.
6. Ланда П.С., Дубошинский Я.Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физич. наук. 1989. Т. 158. Вып. 4. С. 729–742.
7. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.
8. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний линейных систем с нулевым усреднением матрицы коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1381–1387.

Поступила в редакцию 15.02.2012

A. K. Demenchuk

Frequency spectrum control problem of linear periodic systems

We consider the linear control periodic system with reverse communication and equal rank. The necessary and sufficient conditions of control problem of asynchronous spectrum are given.

Keywords: linear control periodic system, asynchronous spectrum.

Mathematical Subject Classifications: 34C25, 34H05

Деменчук Александр Константинович, к.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси, 220072, Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11. E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Demenchuk Aleksandr Konstantinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Associate Professor, Department of Differential Equation, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, ul. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus