УДК 517.929

© ***Ю. Ф. Долгий, Д. С. Быков***

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ[1]

Изучаются спектральные свойства оператора, порождающего неиндефинитную метрику пространства состояний для линейного функционально-дифференциального уравнения. Полученные результаты могут найти приложение в теории канонических разложений функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейное функционально-дифференциальное уравнение, индефинитная метрика, каноническое разложение функционально-дифференциального уравнения

Линейное функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} d\eta\,(s)\,x\,(t+s)\,, \quad t \in \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)\,, \tag{1}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве состояний $\mathbb{H} = \mathbb{H}\,([-\tau, 0]\,, \mathbb{C}^n)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \psi^*\,(0)\,\varphi\,(0) + \int_{-\tau}^{0} \psi^*\,(\vartheta)\,\varphi\,(\vartheta)\;d\vartheta \tag{2}$$

описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_t}{dt} = Ax_t \tag{3}$$

с замкнутым оператором A, определяемым формулами $(Ax)\,(\vartheta) = dx\,(\vartheta)\,/d\vartheta$ при $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(Ax)\,(0) = \int_{-\tau}^{0} d\eta\,(s)\,x\,(s)$, его область определения $\mathcal{D}\,(A) = \mathbb{W}_2^1\,([-\tau, 0]\,, \mathbb{C}^n)$ [1]. Здесь $\eta : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественнозначная функция с ограниченной вариацией, $\eta\,(0) = 0$, и при переходе от (1) к (3) мы использовали расширение из вещественной в комплексную область.

В теории канонических разложений функционально-дифференциальных уравнений используется метрика, порождаемая полуторалинейной формой [2–5]

$$[\varphi, \psi] = \psi^*\,(0)\,\varphi\,(0) + \int_{-\tau}^{0} \psi^*\,(\vartheta) \int_{-\tau}^{\vartheta} d\eta\,(s)\,\varphi\,(s-\vartheta)\;d\vartheta. \tag{4}$$

При выполнении условия $d\eta\,(s) = d\eta^T\,(s)$, $s \in [-\tau, 0)$, метрика (4) индефинитна. Общие геометрические свойства пространств с индефинитной метрикой хорошо изучены [6–8], в отличие от пространств с неиндефинитной метрикой. В настоящей работе изучается такое пространство со специальной метрикой (4), определяемой функциально-дифференциальным уравнением (1). Связь введенных выше метрик (2) и (4) определяется следующим образом

$$[\varphi, \psi] = (\mathfrak{N}\varphi, \psi)\,,$$

где оператор $\mathfrak{N}$ задается формулами: $(\mathfrak{N}\varphi)\,(0) = \varphi\,(0)$, $(\mathfrak{N}\varphi)\,(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} d\eta\,(s)\,\varphi\,(s-\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $\mathcal{D}\,(\mathfrak{N}) = C\,([-\tau, 0]\,, \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathfrak{N}$ является самосопряженным, если $d\eta\,(s) = d\eta^T\,(s)$, $s \in [-\tau, 0)$.

Пусть $d\eta\,(s) = d\eta_d\,(s) + d\eta_c\,(s)$, $s \in [-\tau, 0)$, где дискретная мера $d\eta_d$ задается непрерывной слева ступенчатой функцией $\eta_d\,(s) = -\sum_{j=0}^{k-1} A_j$, $s \in (-r_k, -r_{k-1})$, $\eta_d\,(-r_m) = -\sum_{j=0}^{m} A_j$,

[1]Работа поддержана Программой Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 12–П–1–1019).

$r_{k-1} < r_k$; A_0, A_k — вещественные $n \times n$-матрицы, $k = 1, \ldots, m$; $r_0 = 0$, $r_m = r$; непрерывная мера $d\eta_c$ задается абсолютно непрерывной функцией $\eta_c(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} B(s)\, ds$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $B \in \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$. В этом случае оператор $\mathfrak{N} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является непрерывным и представим в виде $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_d + \mathfrak{N}_c$, где непрерывный оператор $\mathfrak{N}_d : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулами: $(\mathfrak{N}_d\varphi)(0) = \varphi(0)$, $(\mathfrak{N}_d\varphi)(\vartheta) = \sum_{j=k}^{m} A_j\varphi(-r_j - \vartheta)$, $\vartheta \in (-r_k, -r_{k-1})$, $k = 1, \ldots, m$; $(\mathfrak{N}_d\varphi)(-r_{k-1}) = (\mathfrak{N}_d\varphi)(-r_{k-1} - 0)$, $k = 2, \ldots, m$, $(\mathfrak{N}_d\varphi)(-r_m) = 0$; а вполне непрерывный оператор $\mathfrak{N}_c : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулой $(\mathfrak{N}_c\varphi)(0) = 0$, $(\mathfrak{N}_c\varphi)(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} B(s)\varphi(s - \vartheta)\, ds$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$. Если $A_j^T = A_j$, $j = 1, \ldots, m$, и $B^T(\vartheta) = B(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, то оператор $\mathfrak{N}$ является самосопряженным.

Спектральное множество $\sigma(\mathfrak{N}_d)$ содержит все предельные точки спектра оператора $\mathfrak{N}$. Поэтому все точки спектра оператора $\mathfrak{N}$ в множестве $\mathbb{C}\backslash\sigma(\mathfrak{N}_d)$ являются нормальными собственными числами и для их нахождения можно использовать теорию определителей возмущения.

Опишем спектр оператора $\mathfrak{N}_d$, в случае соизмеримых чисел r_k, $k = 1, \ldots, m$. Без ограничения общности полагаем, что $r_k = k\Delta$, $k = 1, \ldots, m$, $\Delta > 0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть числа r_k, $k = 1, \ldots, m$, соизмеримы, тогда спектр оператора $\mathfrak{N}_d$ состоит из собственных чисел. Собственное число $\lambda = 1$ имеет конечномерное собственное подпространство; собственные числа, совпадающие с собственными числами матрицы $\mathcal{A}$ или $-\mathcal{A}$, имеют бесконечномерные собственные подпространства. Здесь матрица A имеет следующее блочное представление $\mathcal{A} = \|\mathcal{A}_{ij}\|_1^m$, где $\mathcal{A}_{ij} = A_{i+j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant m + 1 - i$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $\mathcal{A}_{ij} = 0$, если $2 \leqslant i \leqslant m$, $m + 2 - i \leqslant j \leqslant m$.*

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.
2. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. №1. С. 102–116.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
5. Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 20–34.
6. Понтрягин Л.С. Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8. С. 243–280.
7. Иохвидов И.С., Крейн М.Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I // Тр. Моск. мат. о–ва. 1965. Т. 5. С. 367–432.
8. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. 353 с.

Поступила в редакцию 10.02.2012

Yu. F. Dolgii, D. S. Bykov

Linear functional differential equations in space with unindefinite metric

We study the spectral properties of operator generating unindefinite metric of state space for linear functional differential equation. The results can find application in the theory of canonical decompositions of functional differential equations.

Keywords: linear functional differential equation, indefinite metric, canonical decomposition of functional differential equation.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K20

Долгий Юрий Филиппович, профессор, кафедра механики и математического моделирования, Уральский федеральный университет; ведущий научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: yurii.dolgii@usu.ru

Быков Данил Сергеевич, математик, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики УрО РАН, 624000, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: bykovdanila@gmail.com

Dolgii Yurii Filippovich, Professor, Department of Mechanics and Mathematical modeling, Ural Federal University; Leading Researcher, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia

Bykov Danil Sergeevich, Mathematician, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia