УДК 517.988.6, 517.929.7

© ***Е. С. Жуковский, Т. В. Жуковская***

# ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО АБСТРАКТНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Исследуется нелинейное абстрактное функционально-дифференциальное уравнение в метрическом пространстве. При соответствующем выборе метрического пространства к такому уравнению могут быть сведены не обязательно разрешенные относительно производной «классические» функционально-дифференциальные уравнения, сингулярные, импульсные и другие уравнения. Получены условия разрешимости краевых задач. Используются методы теории накрывающих отображений.

*Ключевые слова:* нелинейное абстрактное функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, накрывающее отображение метрических пространств.

В 80-е годы 20 века при исследовании линейных функционально-дифференциальных уравнений участниками Пермского семинара профессора Н.В. Азбелева была отмечена общность теоретических проблем, идентичность методов и схем доказательств для различных классов уравнений. Прежде всего, разнообразные функционально-дифференциальные уравнения порождаются отображениями, область определения которых есть банахово пространство, изоморфное произведению пространства значений на конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$. Этот факт определяет постановку краевых задач, открывает возможность применения методов линейных уравнений в банаховом пространстве. Н.В. Азбелевым и его сотрудниками была разработана теория абстрактного линейного функционально-дифференциального уравнения [1], результаты которой, при соответствующем выборе функционального пространства, применимы к многочисленным конкретным различных классам уравнений. Абстрактная теория стала эффективным инструментом исследования, позволила переосмыслить на современной основе многие результаты, объединить различные ранее казавшиеся несвязанными типы линейных функционально-дифференциальных уравнений. Безусловно, в теории нелинейных уравнений гораздо более существенное значение имеет специфика конкретных уравнений. Тем не менее, постановки краевых задач, вопросы разрешимости, непрерывной зависимости от параметров могут быть рассмотрены в самой общей постановке. Ниже предлагаются некоторые подходы к исследованию краевых задач для абстрактного нелинейного функционально-дифференциального уравнения с отображениями, действующими в метрических пространствах.

Пусть заданы метрические пространства $(X,\rho_X)$, $(U,\rho_U)$, множество $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, и пусть пространство $X$ гомеоморфно произведению $U\times\Omega$. Пусть определены непрерывные взаимно обратные отображения $\Lambda: U\times\Omega\to X$, $\Lambda^{-1}=(\delta,l): X\to U\times\Omega$. Таким образом, любой элемент $x\in X$ представим в виде
$$x=\Lambda(\delta x, lx). \tag{1}$$
Пусть, кроме того, заданы метрическое пространство $Y$, элемент $y\in Y$ и отображение $F: U\times X\to Y$. Абстрактным функционально-дифференциальным уравнением называем уравнение
$$F(\delta x, x)=y, \tag{2}$$
относительно неизвестного $x\in X$. Используя представление (1), запишем уравнение (2) в виде
$$F\big(\delta x,\, \Lambda(\delta x, lx)\big)=y.$$
Пусть, далее, определены множество $\Theta\subseteq\mathbb{R}^m$, точка $A_0\in\Theta$ и функционал $\varphi: U\times\Omega\to\Theta$. Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего краевому условию
$$\varphi(\delta x, lx)=A_0. \tag{3}$$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 11–01–00626), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт 14.740.11.0349).

Обозначим $B_U(u,r)$ — замкнутый шар с центром в точке $u$ радиуса $r>0$ в пространстве $U$.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [2,3]). Пусть задано $\alpha>0$. Отображение $\Psi:U\to Y$ называется *$\alpha$-накрывающим*, если для любого $r>0$ и любого $u\in U$ имеет место включение $\Psi(B_U(u,r))\supseteq B_Y(\Psi(u),\alpha r)$. Если же выполнено $\Psi(B_U(u,r))\supseteq B_Y(\Psi(u),\alpha r)\cap\Psi(U)$, то отображение $\Psi:U\to Y$ будем называть *условно $\alpha$-накрывающим.*

Применяя результаты работы [4] о накрывающих отображениях в произведении метрических пространств к краевой задаче (2), (3), получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство $X$ является полным, множество $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ — замкнутым. Пусть существуют неотрицательные числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, такие что $\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\beta_1\gamma_1-\beta_1\beta_2\gamma_2>0$, и выполнены условия:*

• *при любых $x\in X$ отображение $F(\cdot,x):U\to Y$ является условно $\alpha_1$-накрывающим, замкнутым и $y\in F(U,x)$; при любых $u\in U$ отображение $F(u,\cdot):X\to Y$ является $\beta_1$-липшицевым;*

• *при любых $\omega\in\Omega$ отображение $\Lambda(\cdot,\omega):U\to X$ является $\gamma_1$-липшицевым; при любых $u\in U$ отображение $\Lambda(u,\cdot):\Omega\to X$ является $\gamma_2$-липшицевым;*

• *при любых $\omega\in\Omega$ отображение $\varphi(\cdot,\omega):U\to\Theta$ является условно $\alpha_2$-накрывающим, замкнутым и $A_0\in\varphi(U,\omega)$; при любых $u\in U$ отображение $\varphi(u,\cdot):\Omega\to\Theta$ является $\beta_2$-липшицевым.*

*Тогда краевая задача (2), (3) разрешима. Более того, можно определить такую норму $\|\cdot\|^*$ в $\mathbb{R}^2$, что для произвольных $u_0\in U$, $\omega_0\in\Omega$ существует решение $x\in X$ этой краевой задачи, удовлетворяющее оценке*

$$\big\|(\rho_U(\delta x,u_0),\ \|lx-\omega_0\|_{R^n})\big\|^*\leqslant\frac{1}{1-\varrho}\Big\|\Big(\frac{\rho_Y\big(F\,(u_0,\ \Lambda(u_0,\omega_0))\,,\ y\big)}{\alpha_1},\ \frac{\|\varphi(u_0,\omega_0)-A_0\|_{R^m}}{\alpha_2}\Big)\Big\|^*,$$

*где* $\varrho=\dfrac{\beta_1\gamma_1}{2\alpha_1}+\Big(\dfrac{{\beta_1}^2{\gamma_1}^2}{4{\alpha_1}^2}+\dfrac{\beta_1\beta_2\gamma_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)^{1/2}$.

**Список литературы**


1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
3. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
4. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.



Поступила в редакцию 15.02.2012



***E. S. Zhukovskii, T. V. Zhukovskaya***


**On solvability conditions of a boundary value problem for a nonlinear abstract functional-differential equation**


A nonlinear abstract functional-differential equation in metric space is under discussion. To equations as such there can be brought, under a proper choice of a metric space, «classical» functional-differential equations not necessarily explicit, singular equations, impulsive equations, and others. The solvability conditions for boundary value problems are derived. The methods of covering mappings theory are used.



*Keywords:* nonlinear abstract functional-differential equation, boundary value problem, covering mapping of metric spaces.

Mathematical Subject Classifications: 34K05, 34K10, 34K30



Жуковский Евгений Семенович, д.ф.-м.н., профессор, директор Института математики, физики и информатики, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: zh-imfi@tsu.tmb.ru

Жуковская Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики, Тамбовский государственный технический университет, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Советская, 106. E-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovskii Evgenii Semenovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of Institute of Mathematics, Physics and Computer Science, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia

Zhukovskaya Tat'yana Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Tambov State Technical University, ul. Sovetskaya, 106, Tambov, 392000, Russia