УДК 517.988.6, 517.922, 517.927.4

© *Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова*

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Получены условия разрешимости периодической краевой задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Используются методы теории накрывающих отображений.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, не разрешенное относительно производной дифференциальное уравнение, накрывающее и условно накрывающее отображения.

Пусть $T>0$. Обозначим $\mathbb{R}^n$ — пространство вещественных n-мерных векторов с нормой $|\cdot|$; $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство существенно ограниченных функций $y\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty}=\operatorname{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}|y(s)|$.

Пусть заданы вектор $A_0\in\mathbb{R}^n$, функция $y\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Будем предполагать, что для произвольного $r>0$ существует $\Lambda>0$, для которого при почти всех $t\in[0,T]$, любых $x,u\in\mathbb{R}^n$ из неравенства $|u|+|x|\leqslant r$ следует оценка $|f(t,x,u)|\leqslant\Lambda$. Рассмотрим периодическую краевую задачу для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной,

$$f\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)=y(t),\quad t\in[0,T],\quad x(T)-x(0)=A_0. \tag{1}$$

Решение этой задачи будем искать в классе $AC_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ таких абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, что $\dot{x}\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Обозначим $z(t)=\dot{x}(t)+x(t)$. Определим функцию $\widehat{f}(t,x,u)=f(t,x,u-x)$. Используя W-подстановку Н.В. Азбелева [1, с. 53], преобразуем краевую задачу (1) в интегральное уравнение

$$(Fz)(t)\equiv\widehat{f}\Big(t,\,\frac{A_0\exp(t)}{\exp(T)-1}+\int_0^T W(t,s)\,z(s)\,ds,\,z(t)\Big)=y(t),\quad t\in[0,T], \tag{2}$$

где

$$W(t,s)=-\frac{1}{\exp(T)-1}\cdot\begin{cases}\exp(t-s), & \text{если } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T;\\ \exp(t-s+T), & \text{если } 0\leqslant t<s\leqslant T.\end{cases}$$

Полученные ниже условия разрешимости этого уравнения (и, соответственно, задачи (1)) существенно используют понятие накрывания отображений.

Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r>0$ в пространстве X, аналогичное обозначение введем в Y и других метрических пространствах, используемых ниже. Пусть задано число $\alpha>0$, множества $U\subseteq X$, $W\subseteq Y$.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [2]). Отображение $F:X\to Y$ называется *α-накрывающим относительно множеств* U, W, если для любых таких $u\in U$, $r>0$, что $B_X(u,r)\subseteq U$ и $F(u)\in W$, имеет место включение $B_Y(F(u),\alpha r)\bigcap W\subseteq F\big(B_X(u,r)\big)$.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [3]). Отображение $F:X\to Y$ называется *условно α-накрывающим относительно множеств* $U\subseteq X$, $W\subseteq Y$, если оно является α-накрывающим относительно множеств U и $W\bigcap F(U)$.

Пусть заданы $R>0$, $u_0\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$. Положим

$$x_0(t)=\frac{A_0\exp(t)}{\exp(T)-1}+\int_0^T W(t,s)\,u_0(s)\,ds.$$

При почти всех $t\in[a,b]$ определим множества $U(t)=B_{\mathbb{R}^n}(u_0(t),R)$, $V(t)=B_{\mathbb{R}^n}(x_0(t),R)$.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 11–01–00626), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт 14.740.11.0349).

Т е о р е м а 1. *Пусть существуют такие $\alpha > \beta \geqslant 0$, что имеет место неравенство*

$$\mathfrak{r}(y) \equiv \frac{\|y - Fu_0\|_{L_\infty}}{\alpha - \beta} \leqslant R,$$

и выполнены условия:
• *при почти всех $t \in [0,T]$ и любых $x \in V(t)$ отображение $\widehat{f}(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно множеств $U(t)$, $W(t,x) = B_{\mathbb{R}^m}(\widehat{f}(t,x,u_0(t)), \alpha R)$;*
• *при почти всех $t \in [0,T]$, любых $u \in U(t)$, $x_1, x_2 \in V(t)$ справедливо неравенство*

$$|\widehat{f}(t,x_1,u) - \widehat{f}(t,x_2,u)| \leqslant \beta |x_1 - x_2|;$$

• *при почти всех $t \in [0,T]$ и любых $x \in B_{\mathbb{R}^n}\big(x_0(t), \mathfrak{r}(y)\big)$ выполнено включение*

$$y(t) \in \widehat{f}\big(t,x,U(t)\big). \tag{3}$$

Тогда существует решение $z \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ уравнения (2), удовлетворяющее оценке

$$\|z - u_0\|_{L_\infty} \leqslant \mathfrak{r}(y).$$

Отметим, что если в формулировке приведенной теоремы потребовать, чтобы отображение $\widehat{f}(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ являлось «безусловно» α-накрывающим относительно множеств $U(t)$, $W(t,x)$, то тогда включение (3) станет следствием остальных предположений, то есть должно быть исключено из условий этого утверждения.

Аналогичное, основанное на теории накрывающих отображений исследование апериодической задачи для дифференциального уравнения (1) проведено в [4, 5].

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel‘man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5. № 1. P. 105–127.
3. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
4. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.
5. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1082–1085.

Поступила в редакцию 15.02.2012

E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova

On a periodic boundary value problem for an implicit differential equation

We derive the conditions of solvability of a periodic boundary value problem for a differential equation unsolved for the derivative. Methods of the theory of covering mappings are used.

Keywords: periodic boundary value problem, implicit differential equation, covering and conditionally covering mappings.

Mathematical Subject Classifications: 34B15, 47N20

Жуковский Евгений Семенович, д.ф.-м.н., профессор, директор Института математики, физики и информатики, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: zukovskys@mail.ru

Плужникова Елена Александровна, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Zhukovskii Evgenii Semenovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of Institute of Mathematics, Physics and Computer Science, Tambov State University, ul. Internatsional’naya, 33, Tambov, 392000, Russia

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, post-graduate student, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional’naya, 33, Tambov, 392000, Russia