УДК 517.925.51

© *В. А. Зайцев*

СТАБИЛИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Получены достаточные условия равномерной глобальной асимптотической стабилизации положения равновесия билинейной нестационарной управляемой системы, в частности, системы с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: равномерная глобальная асимптотическая устойчивость, билинейная управляемая система, периодические системы.

Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{y} = (F(t) + u_1G_1(t) + \ldots + u_rG_r(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Нулевое решение $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ системы (1) будем называть *равномерно глобально асимптотически стабилизируемым*, если существует непрерывное управление $u = u(t, y)$, $u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}^n$, такое что нулевое решение системы (1) с управлением $u = u(t, y)$ *равномерно глобально асимптотически устойчиво* (или, по-другому, *равномерно асимптотически устойчиво в целом* [1, §5]).

Здесь получены достаточные условия равномерной глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения системы (1), в частности, в том случае, когда коэффициенты $F(t)$, $G_k(t)$, $k = 1, \ldots, r$ системы (1) — периодические функции.

Рассмотрим невозмущенную систему для системы (1) (то есть систему (1) с $u = 0$)

$$\dot{y} = F(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Обозначим через $Y(t, s)$ матрицу Коши системы (2), то есть решение матричной задачи Коши $\dot{Y} = F(t)Y$, $Y(s) = I$; $I \in M_n$ — единичная матрица; здесь $M_{n,m}$ — пространство вещественных $n \times m$-матриц, $M_n := M_{n,n}$. Построим по системе (1) линейную управляемую систему

$$\dot{z} = R(t)z + Q(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad v \in \mathbb{R}^r, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Здесь $N = n^2$, $R(t) = F(t) \otimes I - I \otimes F^T(t) \in M_N$, $I \in M_n$; $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц; $Q(t) = [\operatorname{vec} G_1(t), \ldots, \operatorname{vec} G_r(t)] \in M_{N,r}$, где $\operatorname{vec} : M_n \to \mathbb{R}^{n^2}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$ по строкам в вектор столбец $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$. Систему (3), построенную по системе (1), будем называть *большой системой.*

Система (1) называется *согласованной на отрезке* $[t_\alpha, t_\beta]$ (см. [2]), если большая система (3) вполне управляема на $[t_\alpha, t_\beta]$.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что коэффициенты системы* (1) ω*-периодические аналитические функции и выполнены следующие условия:*

1) *система* (1) *согласованна;*

2) *система* (2) *устойчивая.*

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно глобально асимптотически стабилизируемо с помощью управления*

$$u_k(t, y) = -y^T S_k(t)y, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Здесь $S_k(t)$ — периодическая аналитическая симметрическая матричная функция, которая строится по коэффициентам $F(t)$, $G_k(t)$ системы (1).

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

Т е о р е м а 2. *Предположим, что коэффициенты системы* (1) ω*-периодические аналитические функции и выполнены следующие условия:*

1) *система* (1) *согласованна;*

2) $F(t) \equiv 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно глобально асимптотически стабилизируемо с помощью* ω*-периодического управления*

$$u_k(t, y) = -y^T (G_k^T(t) + G_k(t))y, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 1. *Предположим, что коэффициенты системы* (1) ω*-периодические аналитические функции и выполнены следующие условия:*

1) *система* (1) *согласованна;*

2) *существует* $m \in \mathbb{N}$ *и* $m\omega$*-периодическое преобразование Ляпунова* $x = L(t)y$, *которое приводит систему* (2) *к системе* $\dot{x} = Ax$ *с матрицей* $A = 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно глобально асимптотически стабилизируемо с помощью* $m\omega$*-периодического управления*

$$u_k(t, y) = -y^T \big(G_k^T(t) Y^T(0, t) Y(0, t) + Y^T(0, t) Y(0, t) G_k(t)\big) y, \quad k = 1, \ldots, r.$$

З а м е ч а н и е 1. Условие 2) следствия 1 равносильно тому, что существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $Y^m(\omega, 0) = I$, где $Y(\omega, 0)$ — матрица монодромии системы (2).

Предположим теперь, что коэффициенты системы (1) — произвольные нестационарные непериодические функции.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что коэффициенты системы* (1) — *аналитические функции и выполнены следующие условия:*

1) *существует преобразование Ляпунова* $x = L(t)y$, *которое приводит систему* (1) *к системе*

$$\dot{x} = (A + u_1 B_1(t) + \ldots + u_r B_r(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

с постоянной матрицей A *и* ω*-периодическими матрицами* $B_k(t)$*;*

2) *система* (1) *согласованна на некотором отрезке* $[t_\alpha, t_\beta]$*;*

3) *система* (2) *устойчивая.*

Тогда управление

$$u_k(t, y) = -y^T \big(G_k^T(t) L^T(t) Q L(t) + L^T(t) Q L(t) G_k(t)\big) y, \quad k = 1, \ldots, r$$

равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы (1)*; здесь* Q — *произвольная матрица, такая что* $Q = Q^T > 0$ *и* $A^T Q + QA \leqslant 0$ *в смысле квадратичных форм; матрица* Q *находится конструктивно по матрице* A.

В частности, если условие 3) *заменить на условие* 3′) $A = 0$, *то управление*

$$u_k(t, y) = -y^T \big(G_k^T(t) L^T(t) L(t) + L^T(t) L(t) G_k(t)\big) y, \quad k = 1, \ldots, r$$

равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы (1).

Для стационарных систем имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что коэффициенты системы* (1) *стационарны и выполнены следующие условия:*

1) *система* (1) *согласованна;*

2) *система* (2) *устойчива.*

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно глобально асимптотически стабилизируемо с помощью стационарного управления*

$$u_k(y) = -y^T\big(G_k^T P + PG_k\big)y, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Здесь P — произвольная матрица, удовлетворяющая условиям $P = P^T > 0$, $F^T P + PF \leqslant 0$ в смысле квадратичных форм; матрица P находится конструктивно по матрице F.

Теорема 4 дополняет результаты, полученные в работах [2–4].

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.
2. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 117–131.
3. Зайцев В.А. Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1061–1064.
4. Зайцев В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1789–1793.

Поступила в редакцию 01.02.2012

V. A. Zaitsev

Stabilization of bilinear time-varying control systems

The sufficient conditions of uniform global asymptotic stabilization of the origin are obtained for bilinear time-varying control systems, including systems with periodic coefficients.

Keywords: uniform global asymptotic stability, bilinear control system, periodic systems.

Mathematical Subject Classifications: 34H15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: verba@udm.ru

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia