

УДК 517.954

© *Е. А. Логина*

ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАТЕРИАЛЕ С ТРЕЩИНОЙ

Построено решение задачи о нестационарном распределении тепла в плоском неоднородном материале с трещиной–разрезом по отрезку.

Ключевые слова: нестационарное распределение тепла, неоднородная плоскость, трещина–разрез.

В работе рассматривается задача, описывающая распределение температуры в неоднородном материале с трещиной с учётом влияния времени. Задача имеет вид

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right) = 0.$$

$$u(x_1, +0, t) - u(x_1, -0, t) = q_0(x_1, t);$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0, t)}{\partial x_2} + ku(x_1, +0, t) - \frac{\partial u(x_1, -0, t)}{\partial x_2} - ku(x_1, -0, t) = q_1(x_1, t);$$

$$x_1 \in [-1; 1], \quad t \geq 0.$$

$$u(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Областью, в которой рассматривается уравнение, будем считать плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \{x | x_2 = \pm 0; x_1 \in [-1; 1]\}$, что моделирует наличие трещины, проходящей по отрезку $[-1; 1]$ оси абсцисс, параметр $t \in [0, +\infty)$ представляет собой время. Искомая функция $u(x_1, x_2, t)$ — температура в точке материала с координатами (x_1, x_2) в момент времени t .

О п р е д е л е н и е 1. Решением исходной задачи назовём функцию $u(x_1, x_2, t)$, принадлежащую пространству $C_{x,t}^{2,1}((-1; 1) \times (0; \infty))$ и $C_{x,t}^{2,0}((-1; 1) \times [0; \infty))$ и удовлетворяющую исходному уравнению в области $\mathbb{R}^2 \setminus l$, $t \in (0; \infty)$, для которой в смысле главного значения при x_1 , принадлежащем $(-1; 1)$, выполнены граничные условия и по непрерывности выполнено однородное начальное условие, такую, что функции $u(x_1, x_2, t)$, $x_2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1, -x_2, t)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестностях трещины при любом t , принадлежащем отрезку $[0; T]$, где $T > 0$.

Определение решения принадлежит А. С. Рябенко.

Т е о р е м а 1. Пусть функции $q_1(x_1, t) \in C_{x,t}^{2,0}([-1; 1] \times [0; \infty))$, $q_0(x_1, t) \in C_{x,t}^{2,0}([-1, 1] \times [0, \infty))$ и ограничены вместе со своими производными.

Тогда решение исходной задачи единственно в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2 \times (0; \infty))$ и при $t > 0$ имеет вид

$$u = \frac{1}{8\pi} \int_0^t \frac{a^2 \tau k + x_2}{a^2 \tau^2} \int_{-1}^1 \exp \left[\frac{-(x_1 - \sigma)^2 - (a^2 \tau k + x_2)^2}{4a^2 \tau} \right] \cdot q_0(\sigma, t - \tau) d\sigma d\tau - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{1}{\tau} \int_{-1}^1 \exp \left[\frac{-(x_1 - \sigma)^2 - (a^2 \tau k + x_2)^2}{4a^2 \tau} \right] \cdot q_1(\sigma, t - \tau) d\sigma d\tau.$$

Также при $x_1 \in (-1; 1)$ выполнены краевые и начальное условия.

Т е о р е м а 2. Пусть $t > 0$. Тогда решение исходной задачи является непрерывной ограниченной функцией аргументов $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus l$. При $x_2 \rightarrow +0, x_1 \in [-1; 1], t \in [0; T]$, где $T > 0$, нормальный тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi} \left[-\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1, t) - \frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1, t) + \frac{1}{2} \ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_0'(1, t) - \frac{1}{2} \ln((-1-x_1)^2 + x_2^2) q_0'(-1, t) \right] + R_1(x_1, x_2, t),$$

а тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi} \left[-\frac{2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1, t) + \frac{2x_2}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1, t) - \ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_1(1, t) + \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_1(-1, t) + \frac{k}{2} \ln((1-x_1)^2 + x_2^2) q_0(1, t) - \frac{k}{2} \ln((1+x_1)^2 + x_2^2) q_0(-1, t) \right] + R_2(x_1, x_2, t).$$

Здесь функции $R_2(x_1, x_2, t), R_2(x_1, x_2, t)$ ограничены.

Список литературы

1. Логинова Е.А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной в случае конечного времени: тез. докл. четвертой междунар. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». ВГУ. Воронеж, 2011. С. 179–181.
2. Логинова Е.А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной при неограниченно большом времени: тез. докл. четвертой междунар. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». ВГУ. Воронеж, 2011. С. 181–182.

Поступила в редакцию 09.02.2012

Е. А. Loginova

The problem of nonstationary heat propagation in an inhomogeneous material with a crack

The solution of the problem of nonstationary heat distribution in a planar inhomogeneous material with a crack along the segment is constructed.

Keywords: nonstationary heat distribution, inhomogeneous plane, crack-cut.

Mathematical Subject Classifications: 35Q74

Логинова Екатерина Александровна, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1. E-mail: vangog2007ekaterina@yandex.ru

Loginova Ekaterina Aleksandrovna, post-graduate student, Department of Partial Differential Equations and Theory of Probabilities, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia