УДК 517.929

© *В. П. Максимов*

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ [1]

Рассматриваются линейные системы функционально-дифференциальных уравнений, содержащие как компоненты искомых функций, зависящие от непрерывного времени, так и компоненты, зависящие от дискретного времени. Предлагаются естественные постановки краевых задач и задач управления, формулируются необходимые и достаточные условия разрешимости таких задач. Показано, что рассматриваемый класс систем охватывается теорией абстрактного функционально-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, непрерывно-дискретные системы, краевые задачи, задачи управления.

Системы, рассматриваемые в этой работе, с одной стороны, представляют собой конкретную реализацию абстрактного функционально-дифференциальных уравнения [1, 2]. С другой стороны, они охватывают широкий класс математических моделей, возникающих при исследовании реальных процессов с учетом эффектов последействия и импульсных возмущений, приводящих к скачкообразному изменению состояния моделируемой системы. Такие системы содержат как уравнения динамики с непрерывным временем, так и уравнения с дискретным временем. Специальные случаи непрерывно-дискретных систем весьма популярны в современной научной литературе (см., например, [3–5] и цитированные там работы). Здесь мы приводим постановки краевой задачи с общими линейными краевыми условиями, задачи управления относительно заданной системы функционалов и формулируем условия их разрешимости. Подробное изложение этих результатов дается в [6].

Рассматриваемая функционально-дифференциальная непрерывно-дискретная система может быть записана в виде

$$\delta x = \Theta x + f \tag{1}$$

Здесь $x = \mathrm{col}\,(y, z)$, $y : [0, T] \to R^n$, $z \colon \{0, t_1, \ldots, t_\mu, T\} \to R^\nu$, $\delta x = \mathrm{col}(\dot{y}, \Delta z)$, $(\Delta z)(t_i) = z(t_i) - z(0), \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$; $\Theta_{11} : DS^n(m) \to L^n$, $\Theta_{12} : FD^\nu(\mu) \to L^n$, $\Theta_{21} : DS^n(m) \to FD^\nu(\mu)$, $\Theta_{22} : FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$ — линейные операторы. Зафиксируем множества $I = \{0, t_1, \ldots, t_\mu, T\}, 0 < t_1 < \ldots < t_\mu < T$; $J = \{0, \tau_1, \ldots, \tau_m, T\}, 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$, и определим пространства $DS^n(m)$ и $FD^\nu(\mu)$ следующим образом. Пусть χ_A — характеристическая функция множества A. $DS^n(m)$ — пространство функций $y : [0, T] \to R^n$, представимых в виде $y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\, ds + \sum_1^m \chi_{[\tau_i, T]}(t)\Delta y(\tau_k)$; $\Delta y(\tau_k) = [y(\tau_i) - y(\tau_i - 0)]$; $FD^\nu(\mu)$ — пространство функций $z : I \to R^\nu$. Эти пространства после естественной нормировки становятся банаховыми. Предполагается, что оператор $\Theta : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to L^n \times FD^\nu(\mu)$ является вольтерровым и ограниченным. Предполагается, что оператор Θ_{11} имеет вид

$$(\Theta_{11} y)(t) = \int_0^t K(t, s)\dot{y}(s)\, ds\, + A_0(t)y(0)\, + \sum_{k=1}^m A_k(t)\Delta y(\tau_k)\, , \, t \in [0, T].$$

Здесь элементы $k_{ij}(t, s)$ ядра $K(t, s)$ измеримы на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и таковы, что $|k_{ij}(t, s)| \leqslant \kappa(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ и функция $\kappa(\cdot)$ суммируема на $[0, T]$, элементы $(n \times n)$-матриц $A_0, \ldots, A_m$ суммируемы на $[0, T]$. Напомним [2], что такой вид оператора Θ_{11} охватывает широкие классы операторов с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Для сокращения формулировок будем здесь дополнительно считать, что операторы Θ_{12}, Θ_{21}, Θ_{22} являются τ-вольтерровыми [7]. Рассмотрим общую линейную краевую задачу

$$\delta x = \Theta x + f, \quad \ell x = \gamma, \tag{2}$$

[1] Работа поддержана РФФИ (грант № 10–01–96054).

где $\ell : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to R^\eta$ — линейный ограниченный вектор-функционал с линейно независимыми компонентами. Сформулируем для этой задачи необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости. Обозначим через Y и Z фундаментальные матрицы [2,8], C_1 и C_2 — операторы Коши [2,8] уравнений $\dot{y} = \Theta_{11}y$ и $\Delta z = \Theta_{22}z$ соответственно. Определим операторы $H_{ij},\ i,j = 1,2$ равенствами

$$H_{11} = (I - C_1\Theta_{12}C_2\Theta_{21})^{-1};\ \ H_{12} = -(I - C_1\Theta_{12}C_2\Theta_{21})^{-1}C_1\Theta_{12};$$

$$H_{21} = C_2\Theta_{21}(I - C_1\Theta_{12}C_2\Theta_{21})^{-1};\quad H_{22} = (I - C_2\Theta_{21}C_1\Theta_{12})^{-1}.$$

Фундаментальная матрица $\mathcal{X} = \left(\ \mathcal{X}_{ij}\right)$ системы (1) определяется равенствами $\mathcal{X}_{i1} = H_{i1}Y$, $\mathcal{X}_{i2} = H_{i2}Z$, а оператор Коши $C = \left(C_{ij}\right)$ — равенствами $C_{ij} = H_{ij}C_j,\ i,j = 1,2.$

Т е о р е м а 1. *Пусть $n + nm + \nu = \eta$, тогда невырожденность матрицы $\ell\mathcal{X}$ является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи* (2) *при любых f и γ. При выполнении этих условий существует оператор Грина задачи* (2) $G = C - \mathcal{X}\left(\ell\mathcal{X}\right)^{-1}C$.

Задача управления для системы (1) относительно вектор-функционала ℓ записывается в виде

$$\delta x = \Theta x\ +\ Fu\ +\ f,\ \ x(0) = \alpha,\ \ \ell x = \gamma, \tag{3}$$

Здесь $F : \mathcal{H} \to L^n \times FD^\nu(\mu)$ — линейный ограниченный оператор, $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство управлений u. Условия относительной управляемости системы (3) формулируются в терминах тройки $\{C, F,\ \ell\}$ так, как это сделано в [9] для абстрактной задачи управления.

Список литературы

1. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. Theory of linear abstract functional differential equations and application // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996. Vol. 8. P. 1–102.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
3. De la Sen M. On the controller synthesis for linear hybrid systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2001. Vol. 18. P. 503–529.
4. Agranovich G.A. Some problems of discrete/continuous systems stabilization // Functional Differential Equations. 2003. Vol. 10. № 1–2. P. 5–17.
5. Марченко В.М., Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1775–1786.
6. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2 (9). С. 13–23.
7. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: Пермский гос. ун-т., 2003. 306 с.
8. Андрианов Д.Л. Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия вузов. Математика. 1993. № 5. С. 3–16.
9. Максимов В.П. Об одной абстрактной задаче управления // Методы теории функций и смежные проблемы: тез. докл. конференции. ВГУ. Воронеж. 2005. С. 154.

Поступила в редакцию 14.02.2012

V. P. Maksimov

Functional differential continuous-discrete systems

Linear functional differential systems with continuous and discrete times are considered. The formulations of general boundary value problems and control problems are given. Necessary and sufficient conditions of the solvability to the problems are obtained. It is shown that the systems under consideration are covered by the Theory of abstract functional differential equation by N. Azbelev and L. Rakhmatullina.

Keywords: functional differentail equations, continuous-discrete systems, boundary value problems, control problems.

Mathematical Subject Classifications: 34K10, 34K20, 34K30

Максимов Владимир Петрович, профессор, кафедра информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15. E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Maksimov Vladimir Petrovich, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia