УДК 517.92

© ***О. А. Махинова***

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ГРАФЕ

Рассматривается конечно-разностный аналог одномерного оператора Лапласа на графе, состоящего из цепочки звезд. Полученный конечномерный оператор наследует основные свойства оператора Лапласа: симметричность и положительную определенность

Ключевые слова: граф–цепочка звезд, оператор Лапласа на графе, конечно-разностный аналог оператора Лапласа.

Предлагается редукция оператора Лапласа на графе, состоящем из цепочки звезд, к конечно-разностному аналогу, с сохранением спектральных свойств. Аналогичные результаты были получены для одномерного оператора Лапласа с переменной, задаваемой на графе–звезде и графе с циклом [2, 3].

Обозначим через Υ — граф-цепочку, состоящую из двух «звезд» (ζ_1, ζ_2 — внутренние узлы). Ребра γ_k, $k=\overline{1,m}$ примыкают к узлу ζ_1, из них γ_k, $k=\overline{1,m-1}$ ориентированы «к узлу ζ_1», ребро γ_m — «от узла ζ_1 к узлу ζ_2». Ребра γ_k, $k=\overline{m+1,2m-1}$ примыкают к узлу ζ_2, из них γ_k, $k=\overline{m+1,2m-2}$ ориентированы «к узлу ζ_2», ребро γ_{2m-1} — «от узла ζ_2». Все ребра параметризованы отрезком $[0,1]$.

Обозначим через $C(\Upsilon)$ множество непрерывных на Υ функций, $C[\Upsilon]$ — множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле по разным ребрам могут быть различными), $C^2[\Upsilon]$ — множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Upsilon]$; $L_2(\Upsilon)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на графе Υ. Сужение функции $\varphi(x)$ на ребро γ будем обозначать через $\varphi(x)_\gamma$. Интеграл от функции $\varphi(x)$ по графу Υ понимается как сумма интегралов от сужений $\varphi(x)_\gamma$ по каждому ребру γ.

Рассмотрим одномерный оператор Лапласа, порождаемый дифференциальным выражением $L\varphi(x) = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ на функциях $\varphi(x)$, $x\in\Upsilon$. Обозначим через $\Re_\Upsilon$ множество функций $\varphi(x)\in C(\Upsilon)\bigcap C^2[\Upsilon]$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{k=1}^{m-1}\varphi\prime(x)\Big|_{x=1\in\gamma_k} = \varphi\prime(x)\Big|_{x=0\in\gamma_m} + \delta_1\varphi(x)\Big|_{x=0\in\gamma_m},$$

$$\sum_{k=m}^{2m-2}\varphi\prime(x)\Big|_{x=1\in\gamma_k} = \varphi\prime(x)\Big|_{x=0\in\gamma_{2m-1}} + \delta_2\varphi(x)\Big|_{x=0\in\gamma_{2m-1}}.$$

Дифференциальному выражению L сопоставим оператор A_Υ, действующий в пространстве $L_2(\Upsilon)$ на функциях $\varphi(x)$ многообразия $\Re_\Upsilon$; областью определения D_{A_Υ} его является множество функций $\varphi(x)\in\Re_\Upsilon$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi\prime(x)\Big|_{x=0\in\gamma_k} - \eta_k\varphi(x)\Big|_{x=0\in\gamma_k} = 0, \quad k=\overline{1,m-1},\ k=\overline{m+1,2m-2},$$

$$\varphi\prime(x)\Big|_{x=1\in\gamma_{2m-1}} + \rho\varphi(x)\Big|_{x=1\in\gamma_{2m-1}} = 0.$$

Т е о р е м а 1. *Оператор A_Υ симметричен и положительно определен:*

$$(A_\Upsilon\varphi(x),\phi(x)) = (\varphi(x),A_\Upsilon\phi(x)), \quad (A_\Upsilon\varphi(x),\varphi(x))\geqslant 0, \quad \forall\varphi(x),\phi(x)\in D_{A_\Upsilon},$$

$(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в пространстве $L_2(\Upsilon)$: $(\varphi(x),\phi(x)) = \int\limits_\Upsilon\varphi(x)\phi(x)\,dx$.*

Построим конечно-разностный аналог дифференциального оператора A_Υ. Обозначим через x_i^k $(i=\overline{0,N})$ точки, принадлежащие ребру γ_k, $k=\overline{1,2m-1}$: $x_i^k=\frac{1}{N}i$. Множество точек x_i^k $(i=\overline{0,N},\ k=\overline{1,2m-1})$ назовем равномерной сеткой графа Υ и обозначим через Υ^h; величина $h=\frac{1}{N}$ — шаг сетки. Каждой функции φ, заданной на графе Υ, сопоставим сеточную функцию φ^h: значение $(\varphi^h)_i^k$ функции φ^h в точке $x_i^k\in\Upsilon^h$ равно $\varphi(x_i^k)$.

Обозначим через $\Re_\Upsilon^h$ множество сеточных функций φ^h, удовлетворяющих соотношениям

$$\left(\varphi^h\right)_N^k=\left(\varphi^h\right)_0^m,\ \left(k=\overline{1,m-1}\right),\quad \left(\varphi^h\right)_N^k=\left(\varphi^h\right)_0^{2m-1},\ \left(k=\overline{m,2m-2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\left(\varphi^h\right)_N^k-\left(\varphi^h\right)_{N-1}^k}{h}=\frac{\left(\varphi^h\right)_1^m-\left(\varphi^h\right)_0^m}{h}+\left(\delta_1^h\right)\left(\varphi^h\right)_0^m,$$

$$\sum_{k=m}^{2m-2}\frac{\left(\varphi^h\right)_N^k-\left(\varphi^h\right)_{N-1}^k}{h}=\frac{\left(\varphi^h\right)_1^{2m-1}-\left(\varphi^h\right)_0^{2m-1}}{h}+\left(\delta_2^h\right)\left(\varphi^h\right)_0^{2m-1}.$$

Оператор A_Υ^h — конечно-разностный аналог оператора A_Υ — на сеточных функциях $\varphi^h\in\Re_\Upsilon^h$ определяется равенством

$$\left(A_\Upsilon^h\varphi^h\right)_i^k=\frac{-\left(\varphi^h\right)_{i-1}^k+2\left(\varphi^h\right)_i^k-\left(\varphi^h\right)_{i+1}^k}{h^2},\quad i=\overline{1,N-1},\ \ k=\overline{1,2m-1}.$$

Т е о р е м а 2. *Оператор A_Υ^h симметричен и положителен.*

Отметим, что краевые задачи, порожденные оператором A_Υ, аппроксимируются с погрешностью h алгебраической системой уравнений с матрицей, соответствующей оператору A_Υ^h в конечномерном пространстве. Для получения разностного аналога второго порядка аппроксимации решение краевой задачи при достаточной его гладкости удобно продолжить вне ребер графа еще на один интервал длины h, вводя так называемые «фиктивные» точки [1]. Причем конечно-разностный аналог оператора A_Υ, полученный на дополненной таким образом сетке, также будет являться симметричным и положительным.

Можно показать, что собственные функции оператора A_Υ образуют ортонормальный базис в пространстве $L_2(\Upsilon)$. Тогда в силу теоремы 2 собственные векторы конечно-разностного оператора A_Υ^h образуют ортонормальный базис в соответствующем конечномерном пространстве. Последнее является основополагающим фактом для анализа устойчивости и сходимости разностной схемы, то есть получен конечно-разностный аналог теоремы А. Ф. Филиппова в случае, когда пространственная переменная принадлежит графу–цепочке звезд.

Список литературы

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
2. Махинова О.А. Задача теплопереноса на графах с циклом // Системы управления и информационные технологии. 2010. № 1 (39). С. 19–22.
3. Махинова О.А. Аппроксимация одномерного оператора Лапласа на графе-звезде // Вестник Тамбовского Государственного университета. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1124–1126.

Поступила в редакцию 31.01.2012

O. A. Makhinova

The finite-dimensional analog of Laplace operator on the graph

The finite-difference analogs of the one-dimensional Laplace operator on the graph, representing the chain of stars, is considered. The received finite-dimensional operator inherits based properties of the Laplace operator, such as symmetry and positivity.

Keywords: graph–chain of stars, the Laplace operator on the graph, finite-difference analog of Laplace operator

Mathematical Subject Classifications: 65N06, 74S20

Махинова Ольга Алексеевна, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394036, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1. E-mail: moa1002@mail.ru

Makhinova Ol'ga Alekseevna, post-graduate student, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394036, Russia