УДК 517.954

© ***Е. В. Петрова, Е. Н. Провоторова***

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ

Рассматриваются краевые задачи в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на графе. Представлены условия единственности решений таких задач.

Ключевые слова: краевые задачи на графе, единственность решения.

Распространяется понятие классического решения краевых задач на пути перехода к обобщенному решению, принадлежащему к классу функций, интегрируемых с квадратом на графе.

Пусть Γ — граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ, Γ_0 — объединение всех ребер без концевых узлов. При этом все ребра параметризованы отрезком $[0,1]$ (ориентация на ребрах γ_k $(k=\overline{1,m-1})$ «к узлу ξ», ориентация на ребре — γ_m «от узла ξ»). Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ — множество кусочно-непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле по разным ребрам могут быть различными), $C^2[\Gamma]$ — множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Введем следующие пространства функций:

$$H[0,T]=\{h(t)\in C^2[0,T]:\ h(T)=h'(T)=0,\ T<\infty\},$$

$$F(\Gamma)=\{f(x)\in C^2[\Gamma]:\ \underset{(k=\overline{1,m-1})}{f(0)_{\gamma_k}}=f(\pi)_{\gamma_m}=0\};$$

пространства, сопряженные к $H[0,T]$, $F(\Gamma)$, обозначим соответственно $H'[0,T]$, $F'(\Gamma)$. Для обобщенных функций из $H'[0,T]$ и $F'(\Gamma)$ введем понятие первообразной.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $g^*(t)\in L_2[0,T]$ такая, что $g^*(t)$ непрерывна в нуле и $g^*(0)=0$, называется первообразной обобщенной функции $g\in H'[0,T]$, если выполняется равенство $(g^*,h')=-\langle g,h\rangle$, $\forall h(t)\in H[0,T]$ (здесь $(g^*,h')=\int_0^T g^*(t),h'(t)\,dt$; символ $\langle g,h\rangle$ обозначает действие функционала g на пробных функциях h указанного класса).

О п р е д е л е н и е 2. Функция $q^*(x)\in L_2(\Gamma)$ такая, что $q^*(x)$ непрерывна в каждой точке $\pi/2\in\gamma_k$ $(k=\overline{1,m})$ и $g^*(\pi/2)=0$, называется первообразной обобщенной функции $q\in F'(\Gamma)$, если выполняется равенство $(q^*,f')=-\langle q,f\rangle$, $\forall f(x)\in F(\Gamma)$ (здесь $(q^*,f')=\int\limits_\Gamma q^*(x)f'(x)\,dx$).

Совокупность элементов пространств $H'[0,T]$ и $F'(\Gamma)$, для которых существуют первообразные, обозначим через $(H')^*[0,T]$ и $(F')^*(\Gamma)$.

Результаты данной работы связаны с пространством $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$, $Q_{\Gamma,T}=\{(x,t)\colon x\in\Gamma\backslash\partial\Gamma,\ t\in(0,T)\}$. Класс функций $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$ несколько уже обычного класса L_2, поскольку на функции класса $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$ накладываются дополнительные условия: их сужения при фиксированном x или t также принадлежат классу L_2. Обозначим через $C^2_\xi(Q_{\Gamma_0,T})$ множество функций из $C^2(Q_{\Gamma_0,T})$, удовлетворяющих условиям согласования в узле ξ.

Для волнового уравнения $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k}=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k}$, заданного на ребрах γ_k $(k=\overline{1,m})$ с условиями согласования

$$\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_k}=\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_m}\quad(k=\overline{1,m-1}),\qquad \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_k}=\frac{\partial}{\partial x}\Omega(\tfrac{\pi}{2},t)_{\gamma_m}$$

в узле ξ, рассматриваются задачи Дирихле и Неймана с начальными $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и граничными $\mu_k(t)$ $(k=\overline{1,m-1})$, $\nu(t)$ функциями.

Пусть выполняются следующие условия: $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$, $\psi(x)\in(F')^*(\Gamma)$, $\mu_k(t)$ $(k=\overline{1,m-1})$, $\nu(t)\in L_2[0,T]$.

О п р е д е л е н и е 3. Обобщенным решением (решением из класса $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$) задачи Дирихле называется функция $\Omega(x,t) \in \widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$, для которой

$$\int\limits_{Q_{\Gamma,T}}\int \Omega(x,t)(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t) - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t))\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\tfrac{\partial}{\partial t}\omega(x,0))\,dx - \langle\psi(\cdot)\omega(\cdot,0)\rangle +$$
$$+a^2\int_0^T(\nu(t)\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(\pi,t)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(t)\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(0,t)_{\gamma_k})\,dt = 0,\ \forall\omega(x,t) \in C^2_\xi(Q_{\Gamma_0,T}).$$

Пусть далее $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $\psi \in (F')^*(\Gamma)$, μ_k $(k = \overline{1,m-1})$, $\nu \in (H')^*[0,T]$.

О п р е д е л е н и е 4. Обобщенным решением (решением из класса $\widehat{L}_2(Q_{\Gamma,T})$) краевой задачи Неймана называется функция $\Omega(x,t) \in \widehat{L}_{2,\xi}(Q_{\Gamma,T})$, для которой

$$\int\limits_{Q_{\Gamma,T}}\int \Omega(x,t)[\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\omega(x,t) - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)]\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\tfrac{\partial}{\partial t}\omega(x,0)\,dx - \langle\psi(\cdot)\omega(\cdot,0)\rangle -$$
$$-a^2[\langle\nu(\cdot)\omega(\pi,\cdot)_{\gamma_m}\rangle - \sum_{k=1}^{m-1}\langle\mu_k(\cdot)\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(0,\cdot)_{\gamma_k}\rangle] = 0,\ \forall\omega(x,t) \in C^2_\xi(Q_{\Gamma_0,T})$$

Имеют место теоремы единственности для обобщенных решений задач Дирихле и Неймана.

Поступила в редакцию 01.02.2012

E. V. Petrova, E. N. Provotorova

The generalized solutions of boundary value problems on the graph

Boundary value problems in space of the functions integrable with a square on the graph are considered. Conditions of uniqueness of solutions of such problems are presented.

Keywords: boundary value problem on graph, uniqueness of the solution.

Mathematical Subject Classifications: 34H05

Петрова Елена Владимировна, ассистент, Воронежский государственный университет, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1. E-mail: pet-brov@mail.ru

Провоторова Елена Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский государственный технический университет, 394068, Россия, г. Воронеж, Московский пр., 14. E-mail: enprov@mail.ru

Petrova Elena Vladimirovna, Assistant Lecturer, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia

Provotorova Elena Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Moskovskii pr., 14, Voronezh, 394068, Russia