УДК 517.929

© *И. М. Плаксина*

ТЕОРЕМА ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Получены условия знакопостоянства функции Коши одного сингулярного функционально-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, функция Коши.

Введение

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение первого порядка

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + a(t)x(t) + (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in [0, b]. \tag{1}$$

Коэффициент $a(t)$ представим в виде $a(t) = \dfrac{k}{t} + \tilde{a}(t)$, $k \in \mathbb{R}$, функция $\tilde{a}\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ суммируема со степенью p на отрезке $[\varepsilon, b]$ для любого $0 < \varepsilon < b$, суммируема на всем отрезке $[0, b]$ и удовлетворяет предельному условию $\lim\limits_{t\to 0+} t\tilde{a}(t) = 0$. Коэффициент $a(t)$ не суммируем на отрезке $[0, b]$, поэтому уравнение (1) является сингулярным по независимой переменной в точке $t = 0$. Линейный оператор $T\colon AC \to L^p$ вполне непрерывен.

Здесь L^p — банахово пространство суммируемых со степенью p $(1 < p < \infty)$ на отрезке $[0, b]$ функций $z\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ со стандартной нормой $\|z\|_{L^p} = \left(\int_0^b |z(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$, AC — пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0, b]$ функций $x\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_{L^p} + |x(0)|$.

Примерами функций $a(t)$ могут быть $\dfrac{1}{\sin t}$ и $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ на отрезке $[0, 1]$. В качестве оператора T будем рассматривать оператор вида $T = T^+ - T^-$, где $T^+ = q^+(t)x(rt)$, $T^- = q^-(t)x_h(t)$. Здесь функции $q^+(t)$ и $q^-(t)$ принадлежат пространству L^p и неотрицательны, $0 < r < 1$, функция $h(t) \leqslant t$ измерима, $x_h(t)$ равняется $x[h(t)]$ при $h(t) \in [0, b]$ и нулю при $h(t) \notin [0, b]$. Эти условия обеспечивают [1, с. 56] полную непрерывность такого оператора $T\colon AC \to L^p$. Также при этих условиях операторы T^+ и T^- вольтерровы.

Методика предлагаемого исследования основана на работах [1] и [2].

§ 1. Вспомогательные сведения

Пусть D^p — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon [0, b] \to \mathbb{R}$, производная которых является элементом пространства L^p, с нормой $\|x\|_{D^p} = \|\dot{x}\|_{L^p} + |x(0)|$. Также определим пространство D_0^p функций $x\colon [0, b] \to \mathbb{R}$, принадлежащих пространству D^p и удовлетворяющих дополнительному условию $x(0) = 0$. Норму в пространстве D_0^p зададим равенством $\|x\|_{D_0^p} = \|\dot{x}\|_{L^p}$. Определим вспомогательные операторы $\mathcal{L}_0\colon D_0^p \to L^p$ и $\mathcal{L}^+\colon D_0^p \to L^p$ равенствами $(\mathcal{L}_0 x)(t) = \dot{x}(t) + a(t)x(t)$ и $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}_0 + T^+$ соответственно. Наконец, определим константу $m = k + \dfrac{p-1}{p}$. Справедливы следующие теоремы [3].

Т е о р е м а 1. *Оператор $\mathcal{L}_0$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $m > 0$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть $m > 0$. Тогда уравнение $\mathcal{L}^+ x = f$ однозначно разрешимо при любой правой части $f \in L^p$.*

Так как $m > 0$, то оператор $\mathcal{L}^+$ обратим. Обозначим обратный оператор $C^+\colon L^p \to D_0^p$. Этот оператор является линейным интегральным вольтерровым: $(C^+ f)(t) = \int_0^t C^+(t, s) f(s)\, ds$.

Функция Коши $C^+(t, s)$ уравнения (1) тождественно равна нулю при $t < s$ и является решением краевой задачи

$$\mathcal{L}x = 0, \qquad x(s) = 1 \tag{2}$$

при $t \geqslant s$, если $s > 0$, и равна нулю, если $s = 0$.

Функция Коши как функция второго аргумента суммируема со степенью $\dfrac{p}{p-1}$ и поэтому может быть произвольно изменена на множестве нулевой меры. Положим, что она является решением краевой задачи (2) при каждом $s \in (0, b]$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $m > 0$. Пусть, далее, для любых $t \in (0, b)$ выполняется неравенство $\int_t^b \exp\left\{\int_{r\tau}^{\tau} \tilde{a}(\eta)\, d\eta\right\} \cdot q^+(\tau)\, d\tau < r^k$. Тогда функция Коши $C^+(t, s)$ строго положительна при $t \in [s, b]$.*

Отметим, что оператор T^+ содержит запаздывание специального вида, так как условие знакопостоянства функции Коши $C^+(t, s)$ для случая произвольного запаздывания практически не может быть выполнено. Действительно, рассмотрим пример: $\dot{x}(t) + \dfrac{2}{t}x(t) + q\theta\left(t - \dfrac{1}{n}\right)x\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Пусть $s < \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1$. Тогда функция Коши имеет вид $C^+(t, s) = -\dfrac{1}{3}n^2 q s^2 t + \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)\dfrac{s^2}{t^2}$. Отсюда $C^+(1, s) = -\dfrac{1}{3}n^2 q s^2 + \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)s^2 > 0$, если $q < \dfrac{3n}{n^3 - 1}$, то есть оценка на коэффициент q, гарантирующая знакопостоянство функции Коши, зависит от величины запаздывания.

§ 2. Теорема Валле–Пуссена

Запишем оператор $\mathcal{L}$ в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ - T^-$. Определим оператор $K\colon C \to C$ равенством $K = C^+T^-$. Сформулируем теорему типа теоремы Валле–Пуссена [1, с. 357].

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.

Следующие утверждения эквивалентны.

1. *Существует неотрицательная на промежутке $(0, b]$ функция $v(t) \in D_0^p$, такая что $(\mathcal{L}v)(t) > 0$ при почти всех $t \in (0, b]$.*

2. *Спектральный радиус $\rho(K)$ оператора K меньше единицы.*

3. *Уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части $f \in L^p$, причем его оператор Коши, обратный к оператору $\mathcal{L}$, изотонен.*

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Абдуллаев А.Р. О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Труды института прикладной математики им. И.Н. Векуа. Тбилиси, 1990. № 37. С. 5–12.
3. Плаксина И.М. Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // Известия вузов. Математика. 2012. № 2. С. 92–96.

Поступила в редакцию 15.02.2012

I. M. Plaksina

Vallée–Poussin theorem for one singular functional differential equation

Conditions of constant sign of Cauchy function of one singular functional differential equation are obtained.

Keywords: singular equation, functional-differential equaiton, Cauchy function.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K26, 47A53

Плаксина Ирина Михайловна, аспирант, кафедра высшей математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: impl@list.ru

Plaksina Irina Mikhailovna, post-graduate student, Department of Higher Mathematics, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia