УДК 517.929

© **Т. К. Плышевская**

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, для которого специальным образом выбирается пространство решений с учетом вида оператора внутренней суперпозиции.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, оператор внутренней суперпозиции.

Пусть $q_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tau_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $E_i = \{t \in [a,b] : \tau_i(t) \in [a,b]\}$, $i = 1,\ldots,k$. Определим операторы внутренней суперпозиции S и $\tilde{S}$ равенствами

$$(Sx)(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} q_i(t)x(\tau_i(t)), \quad (\tilde{S}x)(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} |q_i(t)| x(\tau_i(t)).$$

Здесь χ_{E_i} – характеристическая функция множества E_i.

Будем предполагать, что выполнены условия:

(i) $\forall e \subset [a,b]$ $m(e) = 0 \Rightarrow \tau_i^{-1}(e)$ — m-измеримо, $i = 1,\ldots,k$ (m — мера Лебега);

(ii) $\exists \delta > 0\colon t - \delta \leqslant \tau_i(t) \leqslant t + \delta, \quad t \in [a,b], \quad i = 1,\ldots,k;$

(iii) $\exists M \in \mathbb{R}\colon \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |q_i(t)| \leqslant M, \quad i = 1,\ldots,k.$

Доказывается, что при выполнении условий (i)–(iii) существует мера ν, которая задается равенством

$$\int_a^b g(t)d\nu(t) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^n}\tilde{S}^n\right) g(s)ds$$

на пространстве непрерывных на $[a,b]$ фнукций g. Здесь $\tilde{S}^n$ – n-ая степень оператора $\tilde{S}$, где $\tilde{S}^0 g = g$; $\beta \in \mathbb{R}$ и $\beta > 1$.

Условия (i)–(iii) гарантируют непрерывное действие оператора S в лебеговском пространстве $L^{\nu}_{[a,b]}$ с нормой $\|x\| = \int_a^b |x(s)|\, d\nu(s)$.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered} y\prime(t) + \lambda \sum_{i=1}^{k} q_i(t) y\prime(\tau_i(t)) = f(t, y(t), y(h(t))), \quad t \in [a,b], \\ y(\xi) = y\prime(\xi) = 0, \quad \xi \notin [a,b], \quad y(a) = \alpha \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — m-измеримая по первому аргументу и удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам с константами L_1 и L_2, $\tau_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ — m-измеримы, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывна и выполнены условия* (i)–(iii). *Тогда, если* $\max\{\beta M, 1\} \cdot |\lambda| < 1$ *и* $\|(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}\|_{L_p^{\nu} \to L_p^{\nu}} \cdot (L_1 + L_2)\nu([a,b]) < 1$, *то существует единственное решение y задачи* (1) *в классе абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций с производной $y\prime \in L^{\nu}_{[a,b]}$.*

Поступила в редакцию 13.02.2012

T. K. Plyshevskaya

On solvability of a quasilinear differential equation with a neutral type deviating argument

A quasilinear differential equation with a neutral type deviating argument is considered. The solution space for this equation is chosen in a special way that the operator of internal superposition is taken into account.

Keywords: differential equations with deviating argument, operator of internal superposition.

Mathematical Subject Classifications: 34K05

Плышевская Татьяна Константиновна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, Магнитогорский государственный университет, 455038, Россия, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114. E-mail: plish@mail.ru

Plyshevskaya Tat'yana Konstantinovna, Candidate of Phisics and Mathematics, Associate Professor, Magnitogorsk State University, pr. Lenina, 114, Magnitogorsk, 455038, Russia