УДК 517.958

© *А. Ю. Сазонов, Ю. Г. Фомичева*

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Для $B$-эллиптического оператора второго порядка с особенностями по нескольким переменным получены формула Грина, интегральное представление гладких функций. Установлен принцип максимума и единственность классического решения задачи Дирихле для таких операторов.

*Ключевые слова:* $B$-эллиптический оператор, формула Грина, принцип максимума.

Пусть $x=(x',y')\in R^{n+m}$, $x'=(x_1,\ldots,x_n)$, $y'=(y_1,\ldots,y_m)$,
$R_+^{n+m}$ — часть пространства $y_1>0,\ldots,y_m>0$,
$\Omega^+$ — ограниченная область в $R_+^{n+m}$ прилегающая к к гиперплоскостям $y_1=0,\ldots,y_m=0$,
$\Gamma^+$ — произвольная поверхность типа Ляпунова, часть границы области $\Omega^+$, расположенная в $R_+^{n+m}$.

В $\Omega^+$ рассматривается оператор

$$B_{y'}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}b_iy_i^{-k_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(y_i^{k_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\right),\quad k_i>0,$$

$a_{ij}=a_{ji}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j+\sum\limits_{i=1}^{m}b_i\alpha_{n+i}^2\geqslant\delta\left|\alpha\right|^2$, для любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+m})$, $|\alpha|>0$, $\delta>0$.

Для функции $u\in C^2(\Omega^+)\cap C\left(\overline{\Omega^+}\right)$ имеет место

$$\int_{\Omega^+}\left(uB_{y'}H-HB_{y'}u\right)y_1^{k_1}\ldots y_m^{k_m}\,d\Omega=\int_{\Gamma^+}\left(u\frac{dH(x,\xi)}{d\nu}-H(x,\xi)\frac{du}{d\nu}\right)y_1^{k_1}\ldots y_m^{k_m}\,d\Gamma.$$

При $y_1=0,\ldots,y_m=0$, $H(x',\xi)=\left[\sum\limits_{i,j=1}^{n}A^{-1}A_{ij}(\xi_i-x_i)(\xi_j-x_j)+\sum\limits_{i=1}^{m}b_i^{-1}\eta_i^2\right]^{\frac{1-n-k_1-\ldots-k_m}{2}}$,
$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_m)$.
В области $y_1>0,\ldots,y_m>0$ $H(x,\xi)=T_{\eta_1}^{y_1},\ldots,T_{\eta_m}^{y_m}H(x,\xi)$,

$$T_{\eta_i}^{y_i}f(\eta_i)=C_{k_i}\int_0^{\pi}f\left(\sqrt{y_i^2+\eta_i^2-2y_i\eta_i\cos\alpha}\right)\sin^{k_i}\alpha\,d\alpha,$$

$T_{\eta_i}^{y_i}f(\eta_i)$ — оператор обобщенного сдвига [1],
$C_{k_i}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k_i}{2}\right)}$, $A=\det(a_{ij})$, $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$,
$\nu$ — внешняя нормаль к $\Gamma^+$ :

$$a\cos(\nu_x,x_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(n_x,x_i),$$

$$a\cos(\nu_x,y_i)=b_i\cos(n_x,y_i),$$

$$a^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(n_x,x_i)\right)^2+\sum_{i=1}^{m}b_i\cos^2(n_x,y_i),$$

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты №№ 11–01–00–626, 11–01–00–645), Министерством образования и науки РФ (проект № 1.1877.2011, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», ГК № 14.740.11.0349).

$n_x$ — внешняя нормаль к $\Gamma^+$ в точке $x$.

Пусть $B_{y'}u = 0$, тогда справедливо представление вида

$$u(x) = \int_{\Gamma^+} \left[ H(x,\xi)\frac{du}{d\nu} - u\frac{dH(x,\xi)}{d\nu} \right] \eta_1^{k_1} \ldots \eta_m^{k_m}\, d\Gamma.$$

Т е о р е м а 1. *Функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению $B_{y'}u = 0$ в $\Omega^+$, непрерывная вплоть до $\Gamma^+$ и не равная тождественно константе достигает максимального (минимального) значения на $\Gamma^+$.*

С л е д с т в и е 1. *Задача*

$$B_{y'}u = f, \quad u\,|_{\Gamma^+} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} = 0, \ldots, \left.\frac{\partial u}{\partial y_m}\right|_{y_m=0} = 0$$

*не может иметь более двух решений* [2].

**Список литературы**

1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1972. Т. 6. № 2. С. 102–143.
2. Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г. О единственности классического решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения, вырождающегося на гиперплоскостях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 36–38.

Поступила в редакцию 15.02.2012

***A. Yu. Sazonov, Yu. G. Fomicheva***

**On integral representation of functions for a second order singular elliptic operator**

For a second order $B$–elliptic operator with singularities by several variables, we receive Green's formula and integral representation of smooth functions. The maximum principle and uniqueness of a classical solution of the Dirichlet problem for such operators are established.

*Keywords:* $B$-elliptic operator, Green's formula, maximum principle.

Mathematical Subject Classifications: 35J75

Сазонов Анатолий Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: sazonov.anatol@yandex.ru

Фомичева Юлия Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: fomichevajulia@mail.ru

Sazonov Anatolii Yur'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia

Fomicheva Yuliya Gennad'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia