УДК 517.977

© *Д. В. Сахаров*

ДВЕ ЗАДАЧИ ПРОСТОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ[1]

Рассматриваются две дифференциальные игры преследования группой преследователей группы убегающих при равных возможностях всех участников. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, простое движение, групповое преследование, жесткосоединенные убегающие.

Введение

Дифференциальным играм простого преследования посвящены многочисленные работы [1–9]. Важное направление современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования–уклонения с участием нескольких объектов. При этом представляет интерес получение как необходимых, так и достаточных условий разрешимости задач уклонения и преследования в зависимости от начальных данных и параметров игры.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Законы движения преследователей и убегающих имеют вид:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \dot{y}_j = v_j, \quad v \in U, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт.

В отличие от большинства работ [1–3, 5–7], посвященных данной задаче, не предполагается, что U — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

При $t = 0$ заданы начальные положения участников:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_j(0) = y_j^0,$$

причем $z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \notin M_{ij}$, где $M_{ij} \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклые компакты.

§ 2. Преследование жесткосоединенных убегающих

В данном разделе будем предполагать, что убегающие используют одно и то же управление, то есть $v_j(t) = v(t)$ для всех j и $t \geqslant 0$ и, кроме того, в процессе игры не покидают выпуклого многогранного множества

$$D = \{y |\ y \in \mathbb{R}^k,\ (p_s, y) \leqslant \mu_s,\ s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Цель преследователей — поймать хотя бы одного убегающего.

Обозначим данную игру $\Gamma(n, m, D)$.

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_{ij}(v, m_{ij}) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, -\lambda(z_{ij}^0 - m_{ij}) \in U - v\},$$
$$\lambda_{ij}(v) = \sup_{m_{ij} \in M_{ij}} \lambda_{ij}(v, m_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\lambda_{n+s,j}(v) = (p_s, v), \quad s = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n+r} \max_{j=1,\ldots,m} \lambda_{ij}(v).$$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

Т е о р е м а 1. *Если* $\delta(z^0) = 0$, *то в игре* $\Gamma(n, m, D)$ *происходит уклонение от встречи.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть* U *— строго выпуклый компакт,* $D = \mathbb{R}^k$ *и*

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ *происходит уклонение от встречи.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $U = D_1(0)$,

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m, D)$ *происходит уклонение от встречи.*

§ 3. Поимка заданного числа убегающих

Предположим далее, что цель группы преследователей — поймать не менее q убегающих ($1 \leqslant q \leqslant m$) при условии, что игра протекает следующим образом: сначала все убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Игру обозначим $G_q(n, m, z^0)$.

Пусть $N \subset \{1, \ldots, n\}$ и $M \subset \{1, \ldots, m\}$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_{ij}(v, m_{ij}) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, -\lambda(z_{ij}^0 - m_{ij}) \in U - v\},$$
$$\lambda_{ij}(v) = \sup_{m_{ij} \in M_{ij}} \lambda_{ij}(v, m_{ij}),$$
$$\delta_{NM}(z^0) = \min_{j \in M} \min_{v \in U} \max_{i \in N} \lambda_{ij}(v).$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы в игре* $G_q(n, m, z^0)$ *была разрешима задача преследования, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ *было верно следующее: для любого множества* $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - s$ *найдется такое множество* $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - s$, *что* $\delta_{NM}(z^0) > 0$.

Список литературы

1. Петросян Л.А. Игры преследования со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
2. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 240 с.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 197 с.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
6. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
7. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726.
8. Сахаров Д.В. Об одной дифференциальной игре преследования со многими участниками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 81–88.
9. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59.

Поступила в редакцию 01.02.2012

D. V. Sakharov

On two problems of simple group pursuit

Two differential games of pursuit of a group of evaders by a group of pursuers with equal possibilities for all participants are considered. The sufficient conditions of solvability of pursuit and evasion problems are obtained.

Keywords: differential game, simple motion, group pursuit, rigidly co-ordinated evaders.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Сахаров Денис Валентинович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: drden@e-izhevsk.ru

Sakharov Denis Valentinovich, post-graduate student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia