УДК 517.95 + 517.977

© *Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова*

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

Рассматривается возникающая в молекулярной биологии задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями. Введено понятие непрерывного обобщенного решения этой задачи. Указаны условия, при которых такое решение строится с помощью характеристик, выпущенных с начального многообразия.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона–Якоби, метод характеристик, обобщенные решения.

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби, полученного в [1] для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \tag{1}$$

где

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \tag{2}$$

Функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Уравнение (1) рассматривается в замкнутой области $\overline{\Pi}_T = [0;T]\times[-1;1]$, где T — положительное число. Задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : R \to R$ и выполняется начальное условие

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1;1]. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) не имеет классического решения. Известные концепции обобщенного решения использовать также не удается. В частности, для рассматриваемой задачи не выполнены известные [2] условия существования вязкостного [3] решения, а минимаксные [4] решения не рассматривались для задач с фазовыми ограничениями.

Используем аппарат этих концепций. Обозначим $D^-u(t,x)$ и $D^+u(t,x)$ соответственно суб- и супердифференциал непрерывной функции $u(\cdot)$ в точке (t,x). Символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial_C u(t,x) = \mathrm{co}\Big\{(a,s)\Big|\,(a,s) = \lim_{(t_i,x_i)\to(t,x)}\Big(\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t}, \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}\Big),\ (t_i,x_i)\in\overline{\Pi}_T\cap\mathrm{Dif}(u)\Big\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1)–(3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (3), и такую, что для всех точек $(t,x)\in\Pi_T = (0,T)\times(-1,1)$ выполнены неравенства

$$a^+ + H(x,s^+) \leqslant 0, \quad \forall\,(a^+,s^+)\in D^+u(t,x); \quad a^- + H(x,s^-) \geqslant 0, \quad \forall\,(a^-,s^-)\in D^-u(t,x),$$

а для точек из множества $\Gamma_T = \{(t,x)|\,0<t<T, x=1\}\cup\{(t,x)|\,0<t<T,\, x=-1\}$ выполнено неравенство

$$a + H(x,s) \geqslant 0, \quad \forall\,(a,s)\in D^-u(t,x)\cap\partial_C u(t,x).$$

Как показано в [5], обобщенное решение в области $\overline{\Pi}_T$ существует, но неединственно.

Пусть $x(\cdot|x_0) : [0,T]\to\mathbb{R}$, $p(\cdot|x_0) : [0,T]\to\mathbb{R}$ — решение системы

$$\dot{x} = H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \quad \dot{p} = -H_x(x,p) = f'(x) + (e^{2p}-e^{-2p})/2,$$

удовлетворяющее условиям $x(0)=x_0$, $p(0)=u_0'(x_0)$, $x_0\in[-1,1]$.

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты №№ 11–01–00214 и 12088-офи-м–2011) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-64508.2010.1).

Определим множества

$$\Omega_T = \left\{(t,x) \in \overline{\Pi}_T \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\ x(t|-1) \leqslant x \leqslant x(t|1)\right\},$$

$$Y(t_*, x_*) = \{y \in [-1,1] \,|\, x(t_*|y) = x_*\}.$$

Рассмотрим задачу (1)–(3) при следующих предположениях
(A1) $u_0'(1) < 0 < u_0'(-1)$;
(A2) Функция $f'(\cdot)$ монотонно неубывающая и справедливы неравенства

$$2f'(1) + e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \qquad -2f'(-1) + e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)};$$

(A3) Для всех $y \in [-1,1]$, $t \in [0,T]$ выполняется

$$x(t|-1) \leqslant x(t|y) \leqslant x(t|1).$$

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* (A1)–(A3)*, то существует непрерывное обобщенное решение* $u(\cdot)$ *задачи* (1)–(3) *такое, что для всех* $(t,x) \in \Omega_T$ *справедливо*

$$u(t,x) = \max_{y \in Y(t,x)} u_0(y) + \int_0^t p(\tau|y) H_p\big(x(\tau|y), p(\tau|y)\big) - H\big(x(\tau|y), p(\tau|y)\big)\, d\tau.$$

Список литературы

1. SaakianD.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78. № 4. 041908.
2. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.L. Hamilton–Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318. № 2. P. 643–683.
3. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1–42.
4. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
5. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 191–208.

Поступила в редакцию 15.02.2012

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova

On constructions of the generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation in bounded domains

The Cauchy problem with state constraints for the Hamilton–Jacobi equation arising in molecular biology is considered. The notion of a continuous generalized solution to the problem is introduced. Conditions are given to construct the continuous solution in bounded domains with the help of characteristics started from the initial manifold.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, method of characteristics, generalized solutions.

Mathematical Subject Classifications: 35F21, 49L25

Субботина Нина Николаевна, член-корреспондент РАН, зав. сектором, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: shag@imm.uran.ru

Subbotina Nina Nikolaevna, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Head of Sector, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia

Shagalova Lyubov' Gennad'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia