УДК 517.977.5

© *В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. Г. Малёв*

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Представлены численные методы решения задач оптимального управления протяженным объектом на плоскости с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: множества достижимости, оптимальное управление, фазовое ограничение

§ 1. Описание задачи

В работе рассматривается задача управления протяженным объектом с фиксированным центром на плоскости R^2. Движение управляемого подвижного объекта стеснено фазовыми ограничениями. Задача рассматривается на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, где t_0 — момент начала управления объектом ($t_0 < \vartheta < \infty$), а ϑ — максимально возможный момент прибытия на целевое множество. Динамика объекта описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P \subset R^2. \tag{1}$$

Здесь $t \in [t_0, \vartheta]$, P — компакт в R^2.

На систему накладываются стандартные условия, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость решений на весь промежуток времени $[t_0, \vartheta]$. Также определены стартовое и целевое множества и фазовое ограничение с непустыми сечениями. Допускается непрерывное изменение фазового ограничения и целевого множества с течением времени по известному нам программному закону.

Необходимо привести управляемый объект своим центром из стартового множества на целевое множество не позднее момента времени ϑ таким образом, чтобы управляемый объект во время своего движения не выходил за пределы фазового ограничения.

Такие задачи возникают в такой области, как, например, автоматическое перемещение грузов в складских помещениях.

В общем случае аналитически решить поставленную задачу не представляется возможным, поэтому решать задачу предлагается приближенно. А именно, будем приводить центр подвижного объекта не точно в целевое множество, а в его некоторую окрестность. Кроме того, допускается незначительное нарушение фазового ограничения.

Для решения задачи перейдем к рассмотрению подвижного центра подвижного объекта вместо самого протяженного объекта. Такой переход сузит фазовое ограничение. Далее перейдем к дискретной модели времени путем выбора разбиения интервала $[t_0, \vartheta]$ с достаточно малым шагом. Для моментов времени из выбранного разбиения последовательно, начиная с момента времени t_0, строим множества достижимости вплоть до того момента времени, когда пересечение текущего множества достижимости и стартового множества станет непустым. Если к моменту времени ϑ нет такого множества достижимости, которое имеет общие точки с целевым множеством, тогда считаем, что задача не имеет решения на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$. В противном случае выбираем любую точку из пересечения множества достижимости и целевого множества в качестве последней точки ломаной-поводыря. Двигаясь от этой точки по уже имеющимся множествам достижимости, приводим ломаную-поводыря на стартовое множество. На последнем этапе, используя процедуру прицеливания на вершины поводыря, строим реальное движение, которое приводит нашу систему в некоторую окрестность целевого множества.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 10–01–96006–р_урал_а), грантом Президента РФ НШ–64508.2010.1, программой Президиума РАН «Математическая теория управления» № 29.

§ 2. Метод многоугольников

В этом методе все множества (подвижный многоугольник, стартовое и целевое множества, множества достижимости, фазовые ограничения) представлены в виде многоугольников. Многоугольники могут быть невыпуклыми. Каждый многоугольник определяется набором замкнутых ломаных линий. Одна из них задает внешнюю границу многоугольника, остальные — внутреннюю (в случае, если многоугольник имеет дыры). Все операции построения множеств достижимости базируются на операциях с многоугольниками (объединение, вычитание и пересечение). Поскольку все многоугольники сформированы набором замкнутых ломаных, это позволяет рационально использовать память ЭВМ и приводит к сокращению времени вычислений по сравнению с сеточными методами. С другой стороны, метод многоугольников имеет сравнительно сложную логику вычислений и требует очень высокую точность вычислений на ЭВМ. Кроме того, он применим только для задач на плоскости.

§ 3. Сеточный метод

Сеточный метод использует не только дискретную модель времени, но и дискретную модель пространства. То есть m-мерное пространство разбивается равномерной сеткой и все множества в нем представлены как множества ячеек этой сетки. Преимуществом данного метода является то, что он имеет простую логику вычислений множеств достижимости. С другой стороны, сеточный метод является очень время емким и требует большое количество памяти ЭВМ (особенно для случая высокой точности вычислений). Это заставляет нас разрабатывать вспомогательные алгоритмы для уменьшения времени счета и уменьшения потребляемой памяти на ЭВМ. Одним из таких методов является алгоритм выделения границ, который позволяет исключить из расчетов внутренние ячейки множеств.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука. 1970. 420 с.
2. Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2001. Т. 41. № 6. С. 895–908.
3. Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н. О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.

Поступила в редакцию 01.02.2012

V. N. Ushakov, A. R. Matviichuk, A. G. Malev

Problems of dynamics of systems with phase constraints

We present the numerical methods for solving the problems of optimal control over extensive object on the plane with phase constraints.

Keywords: attainability sets, optimal control, phase constraints

Mathematical Subject Classifications: 49N90

Ушаков Владимир Николаевич, член корр. РАН, зав. отделом, ИММ УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: ushak@imm.uran.ru

Матвийчук Александр Ростиславович, к.ф.-м.н., н.с., ИММ УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: matv@uran.ru

Малёв Алексей Георгиевич, вед. математик, ИММ УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: malevag@mail.ru

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia

Matviichuk Aleksandr Rostislavovich, Candidate of of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia

Malev Aleksei Georgievich, Leading Mathematician, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia