УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Исследуются конструкции расширений абстрактных задач о достижимости, реализуемые в классе ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств.

Ключевые слова: множество притяжения, топология, ультрафильтр.

1. Исследуется абстрактная задача о достижимости в топологическом пространстве (ТП) при наличии ограничений асимптотического характера на выбор решения. Рассматривается представление множеств притяжения (МП) с использованием ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств. Излагаемый подход допускает аналогию с конструкциями Дж. Варги в [1, гл. III] (точные, обобщённые и приближенные решения), отметим также аппроксимативные конструкции в теории дифференциальных игр (пошаговые и конструктивные движения в формализации Н.Н. Красовского), существенно используемые при доказательстве основополагающей теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [2]. Ниже используются элементы построений [3].

2. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества X. Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ $f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$. Для всяких множеств X и Y, отображения $f \in Y^X$ и семейства $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big)$ $f^1[\mathcal{X}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^1(S) : S \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$.

Если I — множество, то $\pi[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) |\ (\emptyset \in \mathcal{L})\&(I \in \mathcal{L})\&(A \cap B \in \mathcal{L}\ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L})\}$ (множество всех π-систем в I с «нулём» и «единицей»). В частности, элементами $\pi[I]$ являются алгебры и полуалгебры подмножеств I, топологии на I. Отметим, в частности, что при определении T_3-пространства мы следуем [4]; имеется в виду T_1-пространство, в котором для каждой точки замкнутые окрестности образуют локальную базу. Через $\tilde{\pi}^o[I]$ обозначаем множество всех $\mathcal{L} \in \pi[I]$ таких, что $\forall L \in \mathcal{L}\ \ \forall x \in I \setminus L\ \ \exists \Lambda \in \mathcal{L} :\ (x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L) = \emptyset)$. Кроме того, через $\Pi[I]$ обозначаем множество всех полуалгебр подмножеств I; $\Pi[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$.

Если $\mathcal{I} \in \pi[I]$ и Y — непустое множество, то через $B_o(I, \mathcal{I}, Y)$ обозначаем множество всех ступенчатых (с конечным множеством значений) в смысле $(I, \mathcal{I})$ отображений из Y^I. Если r — метрика на Y, то через $B(I, \mathcal{I}, Y, r)$ обозначаем множество всех равномерных в смысле (Y, r) пределов последовательностей в $B_o(I, \mathcal{I}, Y)$; отображения из $B(I, \mathcal{I}, Y, r)$ именуем ярусными в смысле $(I, \mathcal{I})$.

3. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Элементы множества $\beta_o[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(\mathbf{I})\big) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} :\ \ B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$ суть базы фильтров (БФ) $\mathbf{I}$. Следуя [3], через $\mathfrak{F}[\mathbf{I}]$ и $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$ обозначаем множества всех фильтров и всех ультрафильтров (у/ф) $\mathbf{I}$ соответственно; $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}|\,\mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] |\ \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}$. Если $\mathcal{B} \in \beta_o[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) |\ \exists B \in \mathcal{B} :\ B \subset F\} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}]$; если при этом $\mathbf{t}$ — топология $\mathbf{I}$ и $x \in \mathbf{I}$, то $\mathcal{B} \stackrel{\mathbf{t}}{\Rightarrow} x$ означает, что $(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$ содержит фильтр окрестностей точки x (введена сходимость БФ к x в ТП $(\mathbf{I}, \mathbf{t})$); см. [5, гл. I]. При $x \in \mathbf{I}$ $(\mathbf{I} - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) |\, x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$.

Если $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, то через $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ и $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$ обозначаем, следуя [3, с. 118], множества всех фильтров и всех у/ф пространства $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$ соответственно;

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}|\,\mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\} \quad \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}).$$

При $L \in \mathcal{I}$ полагаем $\Phi_{\mathcal{I}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}$. Тогда $(\mathbb{UF})[\mathbf{I}; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L) : L \in \mathcal{I}\}$ есть база хаусдорфовой топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]$ непустого множества $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{I})$; см. [3, (5.13)]. Если $\mathcal{I}$ — алгебра

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты № 10–01–96020, 10–08–00484).

подмножеств $\mathbf{I}$, то $\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]\big)$ — компакт Стоуна. Если $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^o[\mathbf{I}]$, то $\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[x] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{I} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{I})\ \ \forall x \in \mathbf{I}$; более того, в этом случае множество $\{\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[y] : y \in \mathbf{I}\}$ всюду плотно в $\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]\big)$.

4. Фиксируем непустое множество E в качестве пространства обычных решений. Пусть $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_2-пространство (хаусдорфово ТП). Учитываем, что $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \subset \beta_o[E]$, а потому [5, гл. I] $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_o[\mathbf{H}]$ при $f \in \mathbf{H}^E$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$;

$$\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau] \overset{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\ \ \exists h \in \mathbf{H} :\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}^E). \tag{1}$$

С учётом (1) и отделимости $(\mathbf{H}, \tau)$ определяем при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ оператор $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$ посредством условия:

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}).$$

Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathbb{S} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big)$, то

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{S} :\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}; \tag{2}$$

в частности, (2) имеет место при $\mathbb{S} = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если* $(\mathbf{H}, \tau)$ *есть* T_3*-пространство* [4], *то при* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *оператор* $\varphi_{\lim}[f]$ *непрерывен в смысле топологий* $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ *и* τ.

Если $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$, то $\varphi_{\lim}[f] \circ \big((E, \mathcal{L} - \mathrm{ult}\big)[\cdot] = f\ \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$. Это свойство фактически определяет продолжения отображений из множества $\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$, которые в случае T_3-пространства $(\mathbf{H}, \tau)$ оказываются непрерывными; они соответствуют операции обобщённого предела.

В соответствии с [3, следствие 3.1] полагаем для всяких ТП (Y, θ), $Y \neq \emptyset$, отображения $g \in Y^E$ и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, что

$$(\mathbf{as})[E; Y; \theta; g; \mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[E \mid \mathcal{E}] : g^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y\}$$

(используем положения [5, гл. I]), получая МП в ТП (Y, θ). Если $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$, $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_3-пространство, $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то

$$\varphi_{\lim}[f]^1\Big((\mathbf{as})\big[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}\big]\Big) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}]; \tag{3}$$

в (3) можно использовать представление (2) при $\mathbb{S} = (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}]$, получая нижнюю оценку основного МП.

5. Полагаем в пределах данного пункта, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ (тогда, в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$); тогда $\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)$ — непустой компакт, а потому (см. предложение 1, [7, предложение 3.2])

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\Big((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}]\Big)\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).$$

Поскольку $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \mathcal{E})\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, имеем следующее положение

Т е о р е м а 1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \mathcal{E})\big) = \{h \in \mathbf{H} \mid\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) :\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}.$$

Существо утверждения состоит в том, что мы имеем следующую аналогию с [1, гл. III]: множества допустимых обобщённых элементов и (допустимых) приближенных решений здесь могут быть отождествлены с $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$.

Пусть $(\mathbb{H}, \rho)$ — полное метрическое пространство, $\mathbb{H} \neq \emptyset$. При $f \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho)$ согласно [8, определение 4.1] имеем оператор $\mathfrak{L}[f] \in \mathbb{H}^{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$ такой, что

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\ \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists U \in \mathcal{U} :\ \rho\big(f(x), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})\big) < \varepsilon\ \ \forall x \in U \tag{4}$$

(оператор предела по у/ф полуалгебры $\mathcal{L}$). Пусть $\mathcal{T}$ есть def топология $\mathbb{H}$, порождённая метрикой ρ. Тогда из (4) следует, что

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}[f](\mathcal{U}) \ \ \forall f \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{5}$$

Из (1), (5) имеем, что $\big((\mathbf{H} = \mathbb{H}) \,\&\, (\tau = \mathcal{T})\big) \Rightarrow \big(B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho) \subset \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]\big)$. Обобщим данное положение: фиксируя непустое множество Γ, рассмотрим случай, когда $\mathbf{H} \triangleq \mathbb{H}^\Gamma$, а τ есть топология тихоновской степени ТП $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ с индексным множестом Γ (тогда $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_3-пространство). При $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma$ отображение $f(\cdot)(\gamma) \triangleq \big(f(x)(\gamma)\big)_{x \in E} \in \mathbb{H}^E$ есть компонента f, отвечающая γ. С учётом этого полагаем, что

$$B_\otimes[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma] \triangleq \{f \in \mathbf{H}^E \mid f(\cdot)(\gamma) \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho) \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}. \tag{6}$$

Элементы множества (6) — отображения с ярусными компонентами, причём

$$g^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \big(\mathfrak{L}[g(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U})\big)_{\gamma \in \Gamma} \ \ \forall g \in B_\otimes[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{7}$$

Это означает, что $B_\otimes[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma] \subset \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$. Тогда при $g \in B_\otimes[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma]$ определён оператор $\varphi_{\lim}[g] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$ и согласно (7)

$$\varphi_{\lim}[g](\mathcal{U}) = \big(\mathfrak{L}[g(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U})\big)_{\gamma \in \Gamma} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 1. Если $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho)^\Gamma$, то отображение $f \in \mathbf{H}^E$, для которого $f(x) \triangleq \big(f_\gamma(x)\big)_{\gamma \in \Gamma} \ \ \forall x \in E$, таково, что $f(\cdot)(\tilde{\gamma}) = f_{\tilde{\gamma}} \ \ \forall \tilde{\gamma} \in \Gamma$, а тогда $f \in B_\otimes[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma]$ и $\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) = \big(\mathfrak{L}[f_\gamma](\mathcal{U})\big)_{\gamma \in \Gamma} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$. Мы получаем достаточно «широкий» и конструктивно определяемый класс отображений (см. (6)), которые могут использоваться в построениях, приводящих к теореме 1.

6. Рассмотрим пример. В дальнейшем $E \triangleq [a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $a < b$ (здесь $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Полагаем далее, что $\mathcal{I} \triangleq \{\Lambda \in \mathcal{P}(E) \mid \exists c \in E \ \ \exists d \in E : \ (]c, d[\subset \Lambda) \& ((\Lambda \subset [c, d])\}$; $\mathcal{I} \in \Pi[E]$. В дальнейшем $\mathcal{L}$ есть def алгебра подмножеств E, порождённая полуалгеброй $\mathcal{I}$. Определены свободные [6] у/ф:

$$\big(\mathcal{U}_t^{(-)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in [a, t[: \ [c, t[\subset L\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \ \ \forall t \in]a, b]\big) \&$$

$$\& \big(\mathcal{U}_t^{(+)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in]t, b] :]t, c] \subset L\} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \ \ \forall t \in [a, b[\big).$$

При этом $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+ \cup \{\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] : \ x \in E\}$, где $\mathbb{J}_- \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(-)} : \ t \in]a, b]\}$ и $\mathbb{J}_+ \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(+)} : t \in [a, b[\}$ (подробнее см. в [9]). Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и полагаем $E_o \triangleq \bigcap\limits_{L \in \mathcal{E}} L$,

$$T^{(-)}[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in]a, b] \mid \forall L \in \mathcal{E} \ \exists c \in [a, t[: \ [c, t[\subset L\}, \ T^{(+)}[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in [a, b[\mid \forall L \in \mathcal{E} \ \exists c \in]t, b] :]t, c] \subset L\}.$$

Тогда множества $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(-)}[\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(-)} : \ t \in T^{(-)}[\mathcal{E}]\}$, $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(+)}[\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(+)} : \ t \in T^{(+)}[\mathcal{E}]\}$ и E_o таковы, что

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(-)}[\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(+)}[\mathcal{E}] \cup \{\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] : \ x \in E_o\}.$$

При этом $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(-)}[\mathcal{E}] \subset \mathbb{J}_-$ и $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}^{(+)}[\mathcal{E}] \subset \mathbb{J}_+$. Фиксируем T_2-пространство $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \emptyset$, и $\Psi \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$.

Односторонние пределы. При $t \in]a, b]$ $\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbf{H}$ есть предел слева отображения Ψ в точке t относительно $(\mathbf{H}, \tau)$. При $\theta \in [a, b[$ $\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_\theta^{(+)}) \in \mathbf{H}$ есть предел справа отображения Ψ в точке θ относительно $(\mathbf{H}, \tau)$.

З а м е ч а н и е 2. Уточним последние утверждения, полагая при $h \in \mathbf{H}$, что $N_\tau(h)$ есть фильтр всех окрестностей h в ТП $(\mathbf{H},\tau)$; см. [3, с. 115]. Если $t \in]a,b]$ и $p \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_t^{(-)})$, то

$$\bigl(\forall S \in N_\tau(p)\ \exists \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall x \in]t-\delta, t[\cap E\bigr)\&$$

$$\&\Bigl(\forall h \in \mathbf{H}\ \bigl(\forall S \in N_\tau(h)\ \exists \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall x \in]t-\delta, t[\cap E\bigr) \Longrightarrow (h=p)\Bigr).$$

Аналогичным образом, если $\theta \in [a,b[$ и $q \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_\theta^{(+)})$, то

$$\bigl(\forall S \in N_\tau(q)\ \exists \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall x \in]\theta, \theta+\delta[\cap E\bigr)\&$$

$$\&\Bigl(\forall h \in \mathbf{H}\ \bigl(\forall S \in N_\tau(h)\ \exists \delta \in]0,\infty[:\ \Psi(x) \in S\ \ \forall x \in]\theta, \theta+\delta[\cap E\bigr) \Longrightarrow (h=q)\Bigr).$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* $(\mathbf{H},\tau)$ *есть* T_3*-пространство, то*

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}] = \{\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_t^{(-)}):\ t \in T^{(-)}[\mathcal{E}]\} \cup \{\varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_t^{(+)}):\ t \in T^{(+)}[\mathcal{E}]\} \cup \Psi^1(E_o).$$

Согласно замечанию 2 и предложению 2 существенная часть в построении МП (в примере) состоит в нахождении множеств $T^{(-)}[\mathcal{E}]$, $T^{(+)}[\mathcal{E}]$ и E_o, после чего в точках $T^{(-)}[\mathcal{E}]$ следует определить предел слева отображения Ψ, в точках $T^{(+)}[\mathcal{E}]$ — предел справа, а в точках E_o — значение Ψ; тем самым будут реализованы все элементы МП. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, в качестве Ψ может использоваться (см. замечание 1) отображение, принимающее значение в тихоновской степени ТП, метризуемого полной метрикой, и имеющее ярусные компоненты (напомним, что, в частности, $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ для рассматриваемого примера).

Список литературы

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
4. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 433 с.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
7. Ченцов А.Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 184–217.
8. Ченцов А.Г. Расширение абстрактной задачи о достижимости с использованием пространства стоуновского представления // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 63–75.
9. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.

Поступила в редакцию 01.02.2012

A. G. Chentsov

To the question about structure of attraction set in a topological space

For abstract attainability problems the extension constructions realized in class of ultrafilters of widely understood measurable spaces are investigated.

Keywords: attraction set, topology, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 93A10, 93A30, 93A99

Ченцов Александр Георгиевич, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, зав. отделом, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Head of Department, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia