УДК 517.957+517.988+517.977.56

© *А. В. Чернов*

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ОТ СДВИГА УПРАВЛЕНИЯ[1]

Формулируются достаточные условия равномерной (по всему множеству допустимых управлений) непрерывной зависимости решения управляемого функционально-операторного уравнения от сдвига управления вдоль вектора независимых переменных.

Ключевые слова: нелинейное функционально-операторное уравнение, лебеговы пространства, непрерывная зависимость решения, сдвиг управления, запаздывание управления.

Введение

Излагаемый здесь результат оказался необходим автору для дальнейшего исследования функционально-операторных игр, определенных в [1]. Фактически, в [1] речь идет о достаточно общей форме описания дифференциальных игр, связанных с распределенными управляемыми системами. Для сосредоточенных управляемых систем сдвиг управления означает запаздывание (или опережение) управляющего воздействия по времени. Для многих распределенных систем сдвиг управления на вектор в заданном направлении может иметь аналогичный смысл. Поэтому достаточные условия равномерной непрерывной зависимости решения управляемого уравнения от сдвига управления представляют также и самостоятельный интерес.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $n,m,\ell,s\in\mathbb{N}$, $p\in[1,\infty)$, $q\in[p,\infty]$ — заданные числа, $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ – измеримое (здесь и далее по Лебегу) ограниченное множество; $\mathcal{U}=L_\infty(\Pi)$, $\mathcal{Z}=L_p(\Pi)$, $\mathcal{X}=L_q(\Pi)$; α, $\beta\in\mathbb{R}^s$ таковы, что $0\in[\alpha;\beta]$; $\mathcal{D}\equiv\Big\{u\in\mathcal{U}^s : u_i(t)\in[\alpha_i;\beta_i]$ для п.в. $t\in\Pi$, $i=\overline{1,s}\Big\}$ — множество допустимых управлений; $\mathcal{Z}_\mathcal{X}=L_\sigma(\Pi)$, $q^{-1}+\sigma^{-1}=p^{-1}$. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$x(t)=\theta(t)+A\Big[f\Big(.,x(.),u(.)\Big)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad x(.)\in\mathcal{X}^\ell,\tag{1}$$

где $u\in\mathcal{D}$ – управление; элемент $\theta\in\mathcal{X}^\ell$ фиксирован; $f(t,\xi,\upsilon)$: $\Pi\times\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$ – заданная функция, дифференцируемая по переменной $\xi\in\mathbb{R}^\ell$ и вместе с производной измеримая по $t\in\Pi$ и непрерывная по $\{\xi;\upsilon\}\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s$; $A:\mathcal{Z}^m\to\mathcal{X}^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Уравнение (1) является естественной формой описания для широкого класса управляемых НКЗ, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями (см., в частности, [1–4]). Относительно функции f предполагаем выполненным следующее.

Условие 1. Для любых $x\in\mathcal{X}^\ell$, $u\in\mathcal{U}^s$ имеем: $f\big(.,x,u\big)\in\mathcal{Z}^m$, $f'_\xi\big(.,x,u\big)\in\mathcal{Z}_\mathcal{X}^{m\times\ell}$.

Далее норму вектор-функции мы везде понимаем как норму ее модуля, а модуль – как сумму модулей ее компонент. Будем использовать обозначения: $\Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π; χ_h – характеристическая функция множества $h\in\Sigma(\Pi)$; P_h – оператор умножения на χ_h; $\mathbb{S}(\Pi)$ – пространство всех функций, измеримых и п.в. конечных на множестве Π. В дальнейшем для функции $z\in\mathbb{S}(\Pi)$ и ее продолжения нулем $\overline{z}$ на все пространство $\mathbb{R}^n$, а также для $h\in\Sigma(\Pi)$ мы не будем различать выражения $\chi_h z$ и $\chi_h\overline{z}$.

Пусть $\tau\in\mathbb{R}^n$; $S_\tau:\mathbb{S}(\Pi)\to\mathbb{S}(\Pi)$ – оператор сдвига, который каждой функции $z\in\mathbb{S}(\Pi)$ ставит в соответствие функцию $S_\tau[z]$, которая получается в два этапа: 1) сначала продолжаем функцию z нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$; 2) затем берем сужение функции $z(t-\tau)$ на множество Π. Для дальнейшего отметим, что $S_\tau u\in\mathcal{D}$ при всех $u\in\mathcal{D}$.

[1]Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)).

Пусть $\Im \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\Im} \ni 0$. Сделаем следующие предположения.

У с л о в и е 2. ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ имеет положительную мажоранту $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ такую, что $\forall y \in \mathcal{Z}_\mathcal{X}$ оператор $B_y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ определяемый формулой $B_y[x] = B[yx]$, $x \in \mathcal{X}$, квазинильпотентен, то есть спектральный радиус $\rho(B_y) = 0$.

У с л о в и е 3. Для любой функции $\varphi_* \in \mathcal{Z}^+$ и семейства $\Phi[\varphi_*]$ всех $\varphi \in \mathcal{Z}^m$, для которых $|\varphi| \leqslant \varphi_*$, имеем: $\sup\limits_{\varphi\in\Phi} \Big\| A\big[S_\tau[\varphi] - \varphi\big] \Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \to 0$ при $|\tau| \to +0$, $\tau \in \Im$.

У с л о в и е 4. Множество $A\Phi[\varphi_*]$ предкомпактно в $\mathcal{X}^\ell$ $\forall \varphi_* \in \mathcal{Z}^+$.

У с л о в и е 5. Имеем: $\Big| f\big(.,x(.),u(.)\big) \Big| \leqslant \varphi\big(.,|x|(.)\big) \in \mathcal{Z}$ $\forall x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$, где функция $\varphi(t,\xi) : \Pi \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна и не убывает по $\xi \in \mathbb{R}^+$ и такова, что разрешимо *мажорантное уравнение*

$$x(t) = |\theta(t)| + B\Big[\varphi\big(.,x(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^+.$$

З а м е ч а н и е 1. Как следует, например, из [4–6], условие 2 часто выполняется в приложениях. Условия 3, 4 выполняются, например, для широкого класса интегральных операторов. Отметим, кроме того, что условие 4 вообще можно опустить, если правая часть уравнения представима в виде суммы $f(t,\xi,\upsilon) = \widehat{f}(t,\xi) + \overline{f}(t,\upsilon)$. Условие 5 обеспечивает однозначную глобальную разрешимость уравнения (1) для всех управлений $u \in \mathcal{D}$, см. [4].

Т е о р е м а 1. *При сделанных предположениях* $\lim\limits_{|\tau|\to 0,\, \tau\in\Im} \sup\limits_{u\in\mathcal{D}} \Big\| x_{S_\tau u} - x_u \Big\|_{\mathcal{X}^\ell} = 0.$

Список литературы

1. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
2. Сумин В.И., Чернов А.В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Т. 26. Вып.1. С. 39–49.
3. Чернов А.В. О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 288–302.
4. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
5. Сумин В.И., Чернов А.В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
6. Сумин В.И., Чернов А.В. О некоторых признаках квазинильпотентности функциональных операторов // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 77–80.

Поступила в редакцию 01.02.2012

A. V. Chernov

To investigation of dependence of solution to controlled functional operator equation on a shift of control

We formulate sufficient conditions of uniform (with respect to the set of admissible controls) continuous dependence of the solution to controlled functional operator equation on a shift of control along with a vector of independent variables. The shift of control may mean, in particular, some delay (or outstripping) of control by time.

Keywords: nonlinear functional operator equation, Lebesgue spaces, continuous dependence of solution, shift of control, delay of control.

Mathematical Subject Classifications: 35B30, 35B37, 47J35

Чернов Андрей Владимирович, доцент, кафедра математической физики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23. E-mail: chavnn@mail.ru

Chernov Andrei Vladimirovich, Assistant Professor, Department of Mathematical Physics, Lobachevski State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia