

УДК 519.21

© *Е. П. Абрамова, Т. В. Рязанова*

## **АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ШУМА НА ДИНАМИКУ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ**

В данной работе рассматривается популяционная модель «хищник–жертва», сочетающая как стабилизирующие факторы внутривидовой конкуренции жертв и хищников за отличные от жертвы ресурсы, так и насыщение хищников. Целью данного исследования является сравнительный параметрический анализ стохастических феноменов, возникающих под действием параметрических шумов двух различных видов. В работе изучается стохастическая чувствительность аттракторов модели на вносимый шум. На основе техники функции стохастической чувствительности, описаны индуцированные шумом феномены. В параметрической зоне бистабильности системы изучены переходы двух типов: «равновесие → равновесие» и «цикл → равновесие». Получены значения критических интенсивностей для возникновения феноменов перехода между аттракторами. В параметрической зоне моностабильности демонстрируются такие феномены как деформация цикла и смещение равновесия.

*Ключевые слова:* популяционная модель, параметрический шум, индуцированные шумом феномены.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-01

### **Введение**

В последнее время интерес к моделям, описывающим взаимодействие популяций, неуклонно увеличивается. Классическая модель Лотки–Вольтерры стала стартовой точкой к появлению новых моделей, описывающих более сложные взаимодействия: внутривидовая конкуренция как хищников, так и жертв, насыщение хищника, Олли эффект, симбиоз, совместная охота, приток извне и так далее [1, 7, 8, 16, 18].

Однако, живая система не может функционировать изолированно от воздействия случайных факторов окружающей ее среды. Именно поэтому в настоящее время интерес многих исследователей направлен на изучение моделей со случайным возмущением [4–6]. В задачах, учитывающих стохастические факторы, в силу сложности нахождения аналитических плотностей распределения, активно применяются различные асимптотики. Одним из таких инструментов, позволяющих описывать отклик детерминированного аттрактора на вносимый шум различной природы, является техника функции стохастической чувствительности [2, 3, 13].

В данной работе изучается модель популяционного взаимодействия типа «хищник–жертва» с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы, а также насыщения. Ранее в работах [9, 10] эта модель была впервые представлена, и описаны типичные фазовые портреты и бифуркации. Однако, стохастический вариант этой модели в работах Базыкина А.Д. не рассматривался. Первые попытки к стохастическому анализу этой, довольно сложной с бифуркационной точки зрения модели, были проведены в работах [11, 12], в которых не учитывался тот или иной фактор конкуренции жертв и хищников.

Целью данной работы является проведение сравнительного параметрического анализа влияния внешнего воздействия, описываемого параметрическим шумом двух видов, на динамику модели, учитывающей оба фактора внутривидового взаимодействия, а также описание качественных экологических сдвигов, вызванных случайными факторами.

### **§ 1. Детерминированный анализ**

В работе мы рассматриваем модель взаимодействия двух популяций по типу «хищник–жертва», описываемую (следуя Базыкину А.Д. [10]) следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{xy}{1 + \alpha x} - \varepsilon x^2, \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{xy}{1 + \alpha x} - \delta y^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x$  — плотность популяции жертв,  $y$  — плотность популяции хищников,  $a > 0$  — скорость размножения жертв,  $\gamma > 0$  — скорость естественной смертности хищников и  $0 < \alpha < 1$  — коэффициент насыщения хищников. Модель учитывает следующие три фактора взаимодействия:

$-\varepsilon x^2$  — внутривидовая конкуренция жертв;

$-\delta y^2$  — внутривидовая конкуренция хищников за отличные от жертвы ресурсы;

$\frac{xy}{1 + \alpha x}$  — взаимодействие популяций, описываемое трофической функцией Холлинга второго типа.

Отметим, что система имеет биологический смысл, только если  $x$  и  $y$  неотрицательные. Здесь и далее мы фиксируем значения параметров  $a = \gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$  и изучаем поведение системы в зависимости от параметра  $\delta > 0$ .

Система (1) может иметь до шести равновесий:

- тривиальное равновесие  $M_0(0, 0)$ , соответствующее ситуации отсутствия обеих популяций, всегда является седловым равновесием;
- тривиальное равновесие  $M_1(100, 0)$ , соответствующее существованию жертв в равновесном состоянии при отсутствии хищников, также всегда является седловым;
- равновесие  $M_5\left(0, -\frac{1}{\delta}\right)$  при  $\delta > 0$  не имеет биологического смысла и далее не рассматривается;
- нетривиальные равновесия, соответствующие режиму сосуществования двух популяций:
  - $M_2(\bar{x}, \bar{y})$  существует при  $\delta < 0.239456$  и устойчиво при  $0.22 < \delta < 0.239456$ ;
  - $M_3(\bar{x}, \bar{y})$  существует при  $0.130881 < \delta < 0.239456$  и является седлом;
  - $M_4(\bar{x}, \bar{y})$  существует и устойчиво при  $\delta > 0.130881$ .

Координата  $\bar{x}$  этих равновесий является решением следующего кубического уравнения:

$$-\delta\alpha^2\varepsilon\bar{x}^3 + \bar{x}^2(-\delta\alpha^2 + 2\delta\alpha\varepsilon) + \bar{x}(1 - \alpha - 2\delta\alpha + \delta\varepsilon) - \delta - 1 = 0.$$

Координата  $\bar{y}$  при известном  $\bar{x}$  находится по следующей формуле:

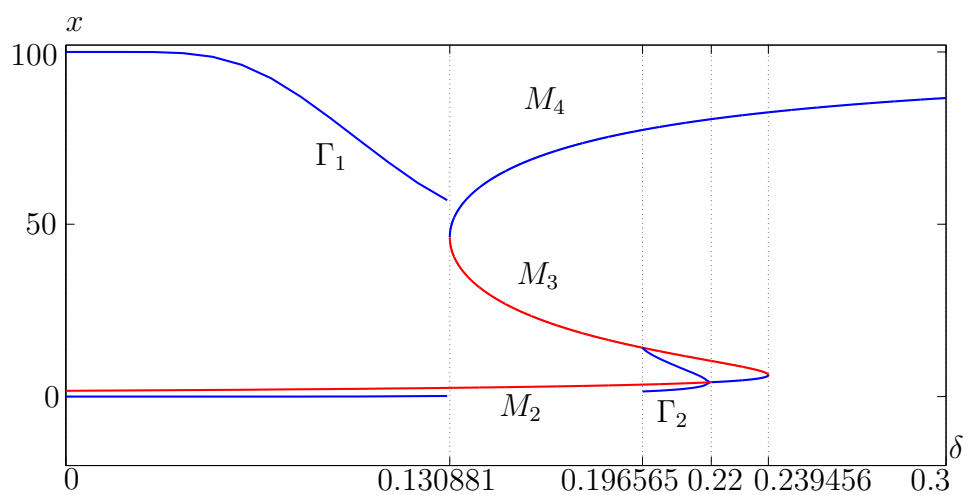
$$\bar{y} = \frac{1}{\delta} \frac{\bar{x}}{1 + \alpha\bar{x}} - \frac{\gamma}{\delta}.$$

Таким образом, в зависимости от значения параметра  $\delta$  система (1) может иметь 1 или 3 одновременно существующих нетривиальных равновесия.

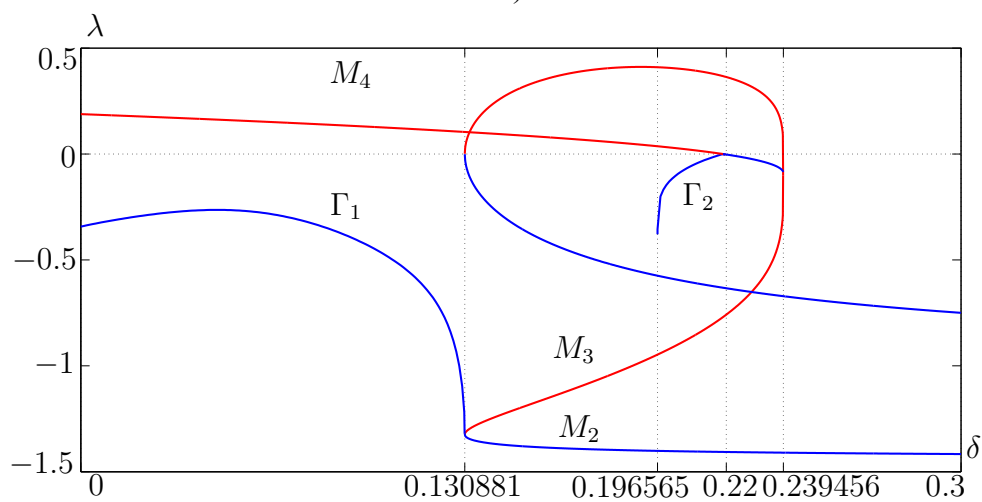
На рисунке 1 а) представлена бифуркационная диаграмма системы (1) при изменении параметра  $\delta$ . Здесь синим цветом представлены экстремумы  $x$ -координаты устойчивых циклов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а также  $x$ -координата устойчивых равновесий  $M_2$ ,  $M_4$ . Красным цветом показаны  $x$ -координаты неустойчивого равновесия  $M_2$  и седлового равновесия  $M_3$ . На рисунке 1 б) представлена зависимость показателей Ляпунова аттракторов модели (1) от бифуркационного параметра.

Таким образом, при  $\delta < 0.130881$  в системе (1) помимо одного неустойчивого равновесия  $M_2$  существует предельный цикл  $\Gamma_1$ . При  $\delta = 0.130881$  на цикле появляется полуустойчивый седло-узел  $M_3 = M_4$ , порождая седло-узловую бифуркацию. При увеличении параметра  $\delta$  седло  $M_3$  и узел  $M_4$  расходятся друг от друга, и цикл  $\Gamma_1$  перестает существовать. При  $\delta \in (0.130881, 0.196565)$  система (1) имеет только один аттрактор — устойчивый узел  $M_4$ .

При  $\delta = 0.196565$  из петли сепаратрисы седловой точки  $M_3$  рождается предельный цикл  $\Gamma_2$  с малой амплитудой колебаний. Данный предельный цикл существует вокруг неустойчивого равновесия  $M_2$  при  $\delta \in (0.196565, 0.22)$ . Таким образом, в этой зоне параметров наблюдается бистабильность.

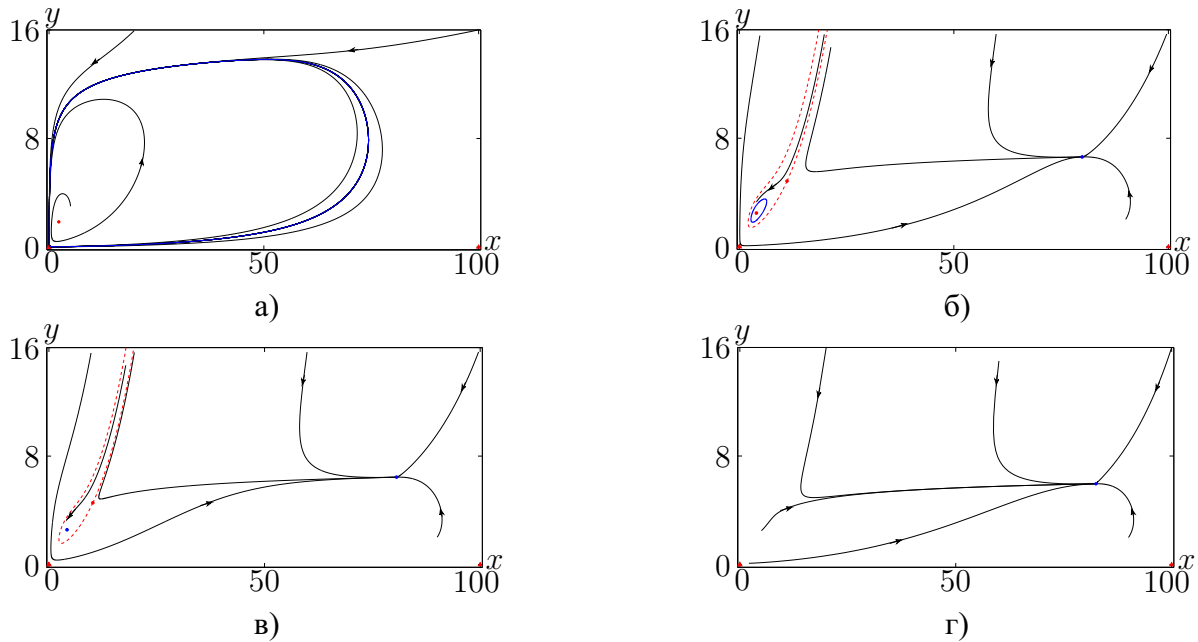


а)



б)

**Рис. 1.** Для системы (1) при  $a = \gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$ : а) бифуркационная диаграмма; б) зависимость показателей Ляпунова



**Рис. 2.** Фазовые портреты системы (1) при: а)  $\delta = 0.1$ ; б)  $\delta = 0.215$ ; в)  $\delta = 0.221$ ; г)  $\delta = 0.2395$

В зависимости от начальных значений  $x$  и  $y$  возможны два режима их сосуществования популяций: равновесный, соответствующий равновесию  $M_4$ , и осцилляционный, соответствующий циклу  $\Gamma_2$ . Границей разделения бассейнов притяжения  $M_4$  и  $\Gamma_2$  является устойчивое многообразие седловой точки  $M_3$ .

При  $\delta = 0.22$  предельный цикл  $\Gamma_2$  влипает в неустойчивое равновесие  $M_2$ , в результате чего равновесие  $M_2$  становится устойчивым — происходит суперкритическая бифуркация. Далее при  $\delta \in (0.22, 0.239456)$  в системе также наблюдается бистабильность: сосуществуют два устойчивых равновесия  $M_2$  и  $M_4$ . В зависимости от начальных значений  $x$  и  $y$  возможны два количественно различных равновесных режима сосуществования популяций. Границей разделения бассейнов притяжения  $M_2$  и  $M_4$  также является устойчивое многообразие седловой точки  $M_3$ . При  $\delta = 0.239456$  равновесие  $M_2$  сливается с равновесием  $M_3$ , и они исчезают. При дальнейшем увеличении параметра  $\delta$  в системе остается только одно устойчивое равновесие  $M_4$ , и независимо от начальных значений  $x$  и  $y$ , возможен только один режим сосуществования популяций — равновесный.

На рисунке 2 представлены фазовые портреты системы (1) для значений параметра из параметрических зон  $I = (0, 0.130881)$ ,  $II = (0.196565, 0.22)$ ,  $III = (0.22, 0.239456)$  и  $IV = (0.239456, 0.3)$ . На рисунке 2 а) в зоне  $I$  существует устойчивый предельный цикл  $\Gamma_1$ , описывающий большеамплитудные колебания численности популяций. На рисунке 2 б) в зоне  $II$  сосуществуют два аттрактора: предельный цикл  $\Gamma_2$  и равновесие  $M_4$ . На рисунке 2 в) в зоне  $III$  сосуществуют также два аттрактора: равновесия  $M_2$  и  $M_4$ . На рисунке 2 г) в зоне  $IV$  существует только один аттрактор — равновесие  $M_4$ . Далее мы изучаем влияние двух видов параметрического шума на динамику популяций в этих четырех параметрических зонах.

## § 2. Стохастический анализ

Традиционной математической моделью, описывающей динамику стохастического процесса, является уравнение Ито [15]:

$$\dot{x} = f(x) + \sigma\eta(x)\dot{w}(t), \quad (2)$$

где  $f(x)$  —  $n$ -векторная функция,  $\eta(x)$  —  $n \times n$ -матричная функция,  $w(t)$  —  $n$ -мерный винеровский процесс,  $\sigma$  — интенсивность возмущения.

Под действием случайных возмущений траектории системы (2) покидают детерминированный аттрактор и формируют пучок случайных состояний. Для любого случайного процесса знание его

плотности распределения дает информацию о всех его характеристиках. Для нахождения функции плотности распределения необходимо решить уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, что даже для двумерных нелинейных систем является весьма сложной задачей. Поэтому в анализе стохастических систем часто используются различные асимптотики [14, 17]. В работах Л. Б. Ряшко и И. А. Башкирцевой была предложена методика построения аппроксимации в малой окрестности исследуемого аттрактора [3, 13]. Эта аппроксимация строится с помощью функции стохастической чувствительности и позволяет изучать отклик (чувствительность) аттракторов на случайное возмущение. Также данная методика позволяет находить области фазовой плоскости (доверительные области), в которых с заданной вероятностью концентрируются случайные состояния системы.

Согласно этой теории для устойчивого равновесия  $\bar{x}$  системы (1) матрица стохастической чувствительности  $W$  находится из следующего матричного уравнения:

$$FW + WF^T = -S,$$

где  $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ ,  $S = GG^T$ ,  $G = \eta(\bar{x})$ . Зная матрицу стохастической чувствительности  $W$  равновесия  $\bar{x}$ , можно построить эллипс рассеивания:

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2k^2\sigma^2,$$

где  $k^2 = -\ln(1 - P)$  и  $P$  — доверительная вероятность.

Для  $T$ -периодического устойчивого решения  $x = \xi(t)$  системы (1) функция стохастической чувствительности  $m(t)$ , характеризующая чувствительность вдоль цикла, является решением следующей краевой задачи:

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), \quad m(0) = m(T),$$

где  $a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t)$ ,  $b(t) = p^T(t)S(t)p(t)$ ,  $p(t)$  — нормированный вектор, перпендикулярный к  $f(\xi(t))$ . Здесь  $F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))$ ,  $S(t) = G(t)G^T(t)$ ,  $G(t) = \eta(\xi(t))$ . Для описания чувствительности цикла в целом удобно использовать коэффициенты стохастической чувствительности  $M = \max_{0 < t < T} m(t)$  и  $m = \min_{0 < t < T} m(t)$ .

Соответствующие формулы для построения полосы рассеивания случайных состояний вокруг цикла имеют вид:

$$x_{1,2} = \xi(t) \pm k\varepsilon\sqrt{2m(t)}p(t),$$

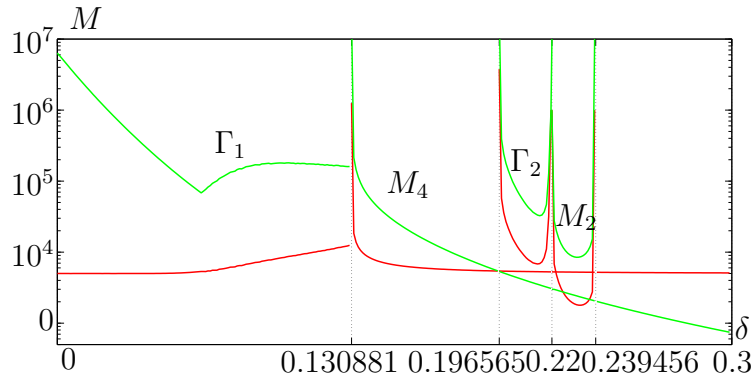
где  $k = \text{erf}^{-1}(P)$ ,  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Далее в этом разделе мы изучаем влияние внешнего воздействия на динамику системы (1). Здесь мы проводим сравнительный анализ двух видов параметрического шума, т. е. предполагаем, что три параметра  $a \rightarrow a + \sigma_1\dot{w}_1$  и  $\gamma \rightarrow \gamma + \sigma_2\dot{w}_2$  (первый вид шума) или  $\delta \rightarrow \delta + \sigma_3\dot{w}_3$  (второй вид шума) являются стохастическими. Тогда система, подверженная случайному воздействию, имеет вид:

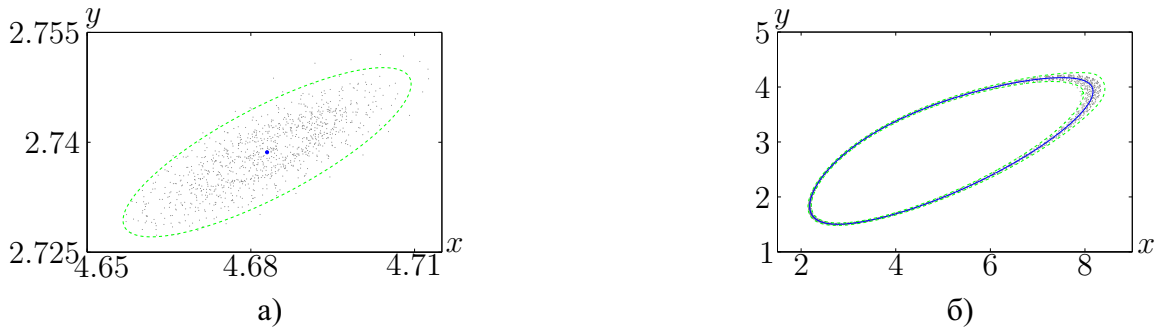
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{xy}{1 + \alpha x} - \varepsilon x^2 + \sigma_1\eta_1 x\dot{w}_1, \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{xy}{1 + \alpha x} - \delta y^2 - \sigma_2\eta_1 y\dot{w}_2 - \sigma_3\eta_2 y^2\dot{w}_3, \end{cases} \quad (3)$$

здесь  $w_i$  — независимые винеровские процессы,  $\sigma_i$  — интенсивность случайного внешнего воздействия,  $\eta_i = \{0, 1\}$  — показатель наличия случайного внешнего воздействия первого или второго видов. Если  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = 0$ , то в системе присутствует первый вид шума; если  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$ , то второй. Далее предполагается, что  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ .

С помощью описанной выше техники была найдена чувствительность аттракторов системы (3). На рисунке 3 в зависимости от параметра  $\delta$  представлены максимумы коэффициентов стохастической чувствительности предельных циклов  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и устойчивых равновесий  $M_2$ ,  $M_4$ : красным цветом для шума первого вида ( $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = 0$ ), зеленым — для второго ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$ ). Видно, что чувствительность циклов  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и равновесия  $M_2$  системы к шуму первого вида ( $\eta_1 = 1$ ,



**Рис. 3.** Зависимость максимумов коэффициентов функции стохастической чувствительности аттракторов для шума первого вида (красный) и второго вида (зеленый)

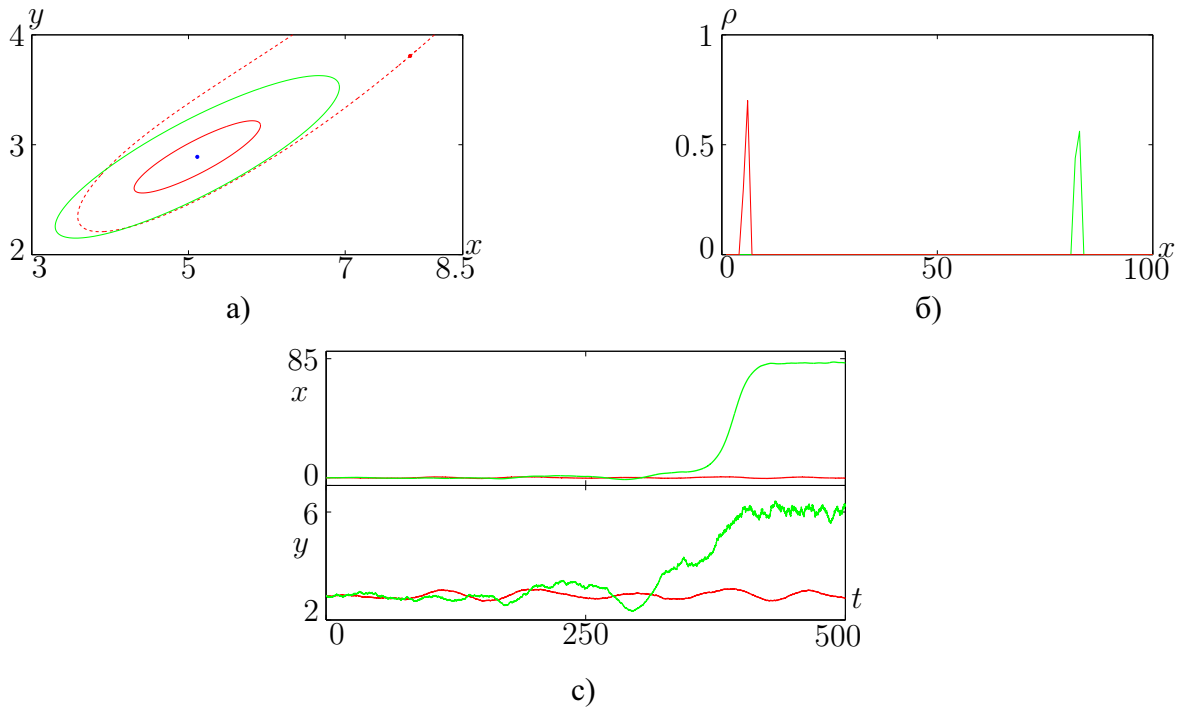


**Рис. 4.** Доверительные области (зеленый пунктир) и случайные состояния системы (3) при  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$  и  $\sigma = 0.0001$  для: а)  $\delta = 0.23$  — эллипс рассеивания; б)  $\delta = 0.21$  — полоса рассеивания

$\eta_2 = 0$ , рисунок 3, красные линии) ниже, чем ко второму ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$ , рисунок 3, зеленые линии). Однако, для равновесия  $M_4$  при переходе через точку бифуркации  $\delta = 0.196565$  чувствительность равновесия к параметрическому шуму первого вида становится больше, чем к шуму второго вида.

Используя технику функции стохастической чувствительности, мы также построили доверительные области. На рисунке 4 представлены доверительные области (зеленый пунктир) и случайные состояния системы (3) при  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$  и  $\sigma = 0.0001$  с доверительной вероятностью  $P = 0.99$ . На рисунке 4 а)  $\delta = 0.23$  — эллипс рассеивания, и на рисунке 4 б)  $\delta = 0.21$  — полоса рассеивания. Видно, что доверительные области хорошо описывают разброс случайных траекторий вокруг аттрактора.

Теперь, используя описанную выше технику функции стохастической чувствительности, мы изучаем индуцированные шумом феномены. В зоне  $III = (0.22, 0.239456)$  параметра  $\delta$  в детерминированной системе сосуществуют два устойчивых равновесия  $M_2$  и  $M_4$ . При критическом уровне интенсивности шума случайные траектории, запущенные с  $M_2$ , покидают бассейн притяжения этого равновесия и устремляются к равновесию  $M_4$ , таким образом, возникает переход типа «равновесие  $\rightarrow$  равновесие». Однако критическое значение шума требует разной интенсивности для шума первого и второго вида. На рисунке 5 показан такой переход при  $\delta = 0.235$  и  $\sigma = 0.0065$  для шума первого вида (красная сплошная линия) и второго вида (зеленая сплошная линия): а) эллипсы рассеивания; б) плотность распределения  $x$ -координаты случайных состояний; в) временные ряды. Здесь красной пунктирной линией показана сепаратриса седлового равновесия  $M_3$ , образующая границу бассейнов притяжения двух равновесий. Видно, что для параметрического шума первого вида выбранной интенсивности шума не достаточно для осуществления перехода, эллипс рассеивания лежит полностью внутри бассейна притяжения. В то время как для шума второго вида эллипс выходит за границу бассейна, и переход осуществляется. На рисунке 5 б) эмпирическая плотность распределения для двух видов шума не меняет свою одномодальную форму, однако пик плотности

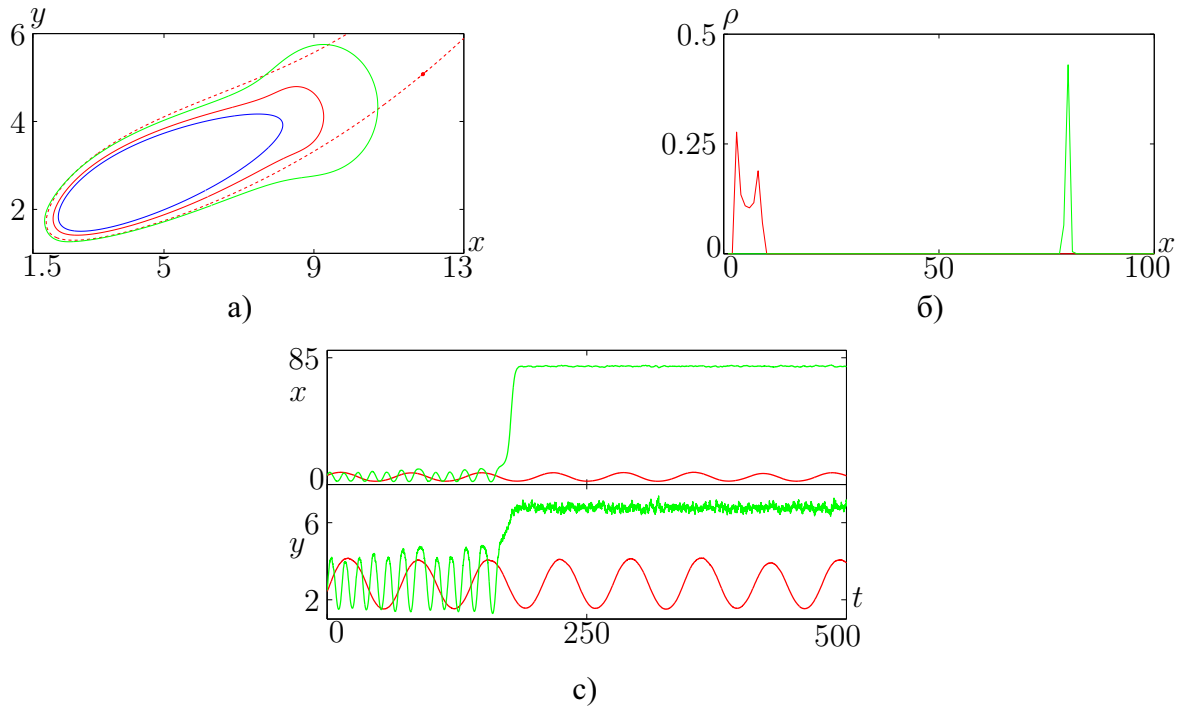


**Рис. 5.** Переход «равновесие  $\rightarrow$  равновесие» при  $\delta = 0.235$  и  $\sigma = 0.0065$  для шума первого вида (красная сплошная линия) и второго вида (зеленая сплошная линия): а) эллипсы рассеивания; б) плотность распределения  $x$ -координаты случайных состояний; в) временные ряды

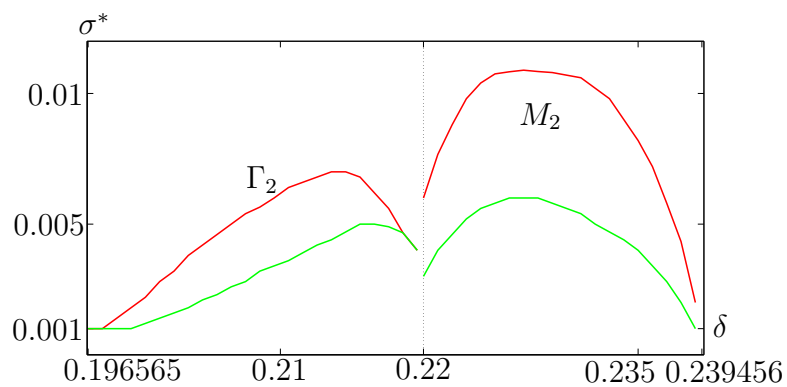
смещается.

В зоне  $II = (0.196565, 0.22)$  параметра  $\delta$  в детерминированной системе сосуществуют устойчивый цикл  $\Gamma_2$  и устойчивое равновесие  $M_4$ . При критическом уровне интенсивности шума случайные траектории, запущенные с цикла  $\Gamma_2$ , покидают бассейн его притяжения и устремляются к равновесию  $M_4$ , тем самым возникает переход «цикл  $\rightarrow$  равновесие». Однако, как и в предыдущем случае, критическое значение шума требует разной интенсивности для шума первого и второго вида. На рисунке 6 показан такой переход при  $\delta = 0.21$  и  $\sigma = 0.005$  для шума первого вида (красная сплошная линия) и второго вида (зеленая сплошная линия): а) внешняя граница полосы рассеивания; б) плотность распределения  $x$ -координаты случайных состояний; в) временные ряды. Здесь красной пунктирной линией показана сепаратриса седлового равновесия  $M_3$ , образующая границу бассейнов притяжения двух равновесий. Видно, что для параметрического шума первого вида выбранной интенсивности шума не достаточно для осуществления перехода, внешняя граница полосы рассеивания лежит полностью внутри бассейна притяжения. В то время как для шума второго вида внешняя граница полосы выходит за границу бассейна, и переход осуществляется. На рисунке 6 б) эмпирическая плотность распределения для двух видов шума имеет разную форму. Для шума первого вида, при заданном уровне интенсивности шума, функция плотности распределения имеет двумодальную форму, в то время как для шума второго вида одномодальную и пик плотности смещается. На временных рядах на рисунке 6 в) также видно, что параметрический шум второго вида меняет частоту колебаний вдоль детерминированного цикла.

На рисунке 7 для двух рассмотренных зон  $II = (0.196565, 0.22)$  и  $III = (0.22, 0.239456)$  параметра показана зависимость критической интенсивности шума, которая необходима для возникновения переходов соответственно «цикл  $\rightarrow$  равновесие» или «равновесие  $\rightarrow$  равновесие». Здесь красный цвет отвечает шуму первого вида и зеленый — шуму второго вида. Видно, что критическая интенсивность для шума второго вида меньше, чем для первого. Таким образом, при равном уровне интенсивности шума возникновение или не возникновение переходов может зависеть от вида параметрического шума.

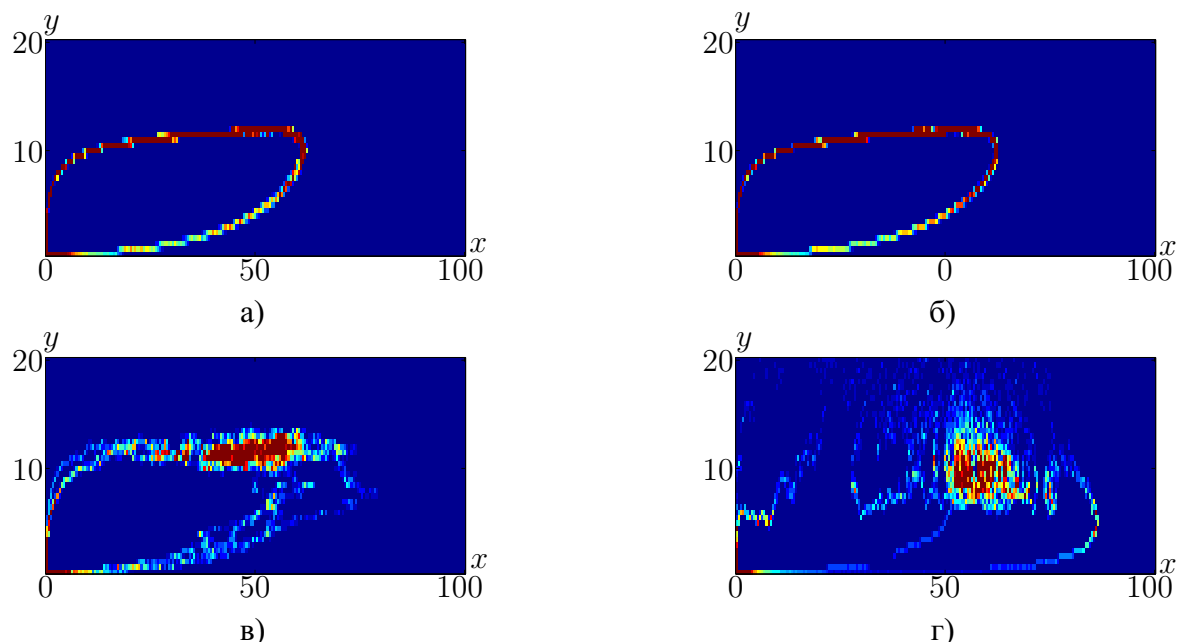


**Рис. 6.** Переход «цикл→равновесие» при  $\delta = 0.21$  и  $\sigma = 0.005$  для шума первого вида (красная сплошная линия) и второго вида (зеленая сплошная линия): а) внешняя граница полосы рассеивания; б) плотность распределения  $x$ -координаты случайных состояний; с) временные ряды



**Рис. 7.** Критическая интенсивность случайного воздействия для шума первого вида (красный) и второго вида (зеленый)





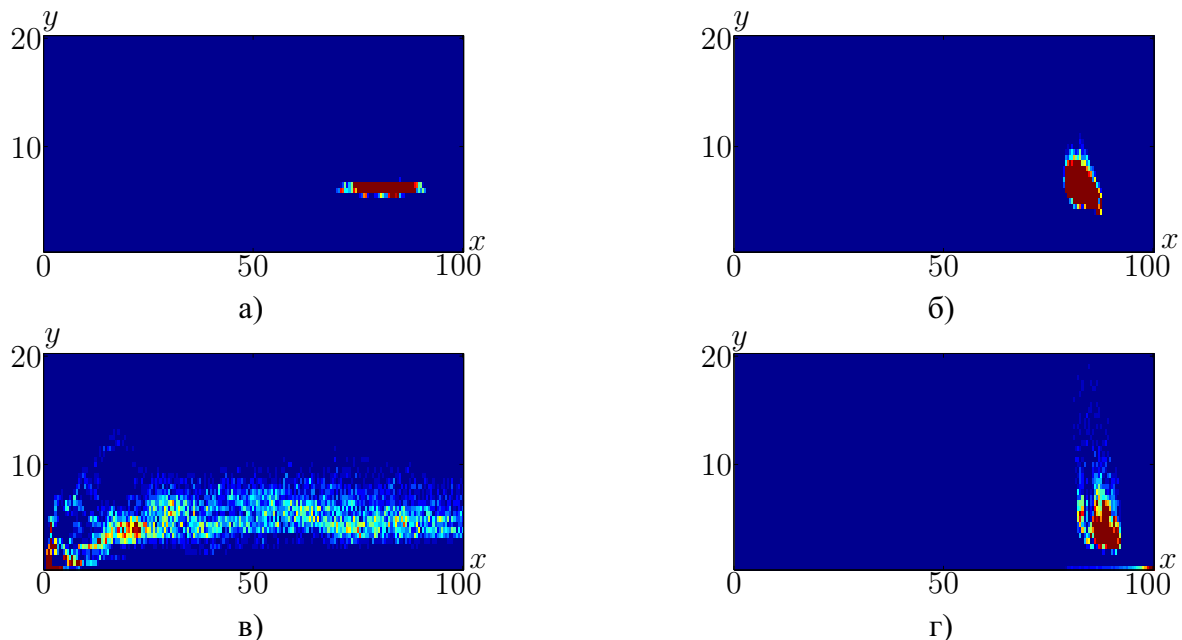
**Рис. 8.** Индуцированная шумом деформация цикла при  $\delta = 0.12$ : в первой колонке — шум первого вида ( $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ); во второй колонке — шум второго вида ( $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ) для: а)  $\sigma = 0.01$ ; б)  $\sigma = 0.001$ ; в)  $\sigma = 0.1$ ; г)  $\sigma = 0.05$

Далее для зоны  $I = (0, 0.130881)$ , в которой детерминированная система (1) имеет в качестве аттрактора только устойчивый цикл  $\Gamma_1$ , под действием шума обоих видов, происходит деформация этого цикла. На рисунке 8 данный феномен продемонстрирован цветной плотностью распределения состояний в плоскости  $(x, y)$ . Здесь показаны при  $\delta = 0.12$ : в первой колонке — шум первого вида ( $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ); во второй колонке — шум второго вида ( $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ) для следующих значений интенсивности: а)  $\sigma = 0.01$ ; б)  $\sigma = 0.001$ ; в)  $\sigma = 0.1$ ; г)  $\sigma = 0.05$ . Легко заметить, что даже при маленькой интенсивности шума случайные состояния распределяются вдоль цикла неравномерно, на цикле четко видны участки более или менее окрашенные в красный цвет. При увеличении интенсивности шума случайные состояния стремятся распределиться между двумя участками плоскости, сохраняя лишь редкие переходы между ними.

Далее для зоны  $IV = (0.239456, 0.3)$ , в которой детерминированная система (1) имеет в качестве аттрактора только устойчивое равновесие  $M_4$ , под действием шума обоих видов происходит смещение стохастического равновесия. На рисунке 9 данный феномен продемонстрирован цветной плотностью распределения состояний в плоскости  $(x, y)$ . Здесь показаны при  $\delta = 0.24$  в первой колонке шум первого вида ( $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ), во второй колонке шум второго вида  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$  для следующих значений интенсивности а)  $\sigma = 0.05$ , б)  $\sigma = 0.05$ , в)  $\sigma = 0.5$ , г)  $\sigma = 0.15$ . Видно, что при маленькой интенсивности шума облако случайных состояний имеет разную форму в зависимости от вида шума. При увеличении интенсивности в случае действия шума первого вида облако случайных состояний размывается, смещается влево и устремляется в окрестность седлового равновесия  $M_0 = (0, 0)$ . При увеличении интенсивности шума второго вида случайные состояния довольно концентрированным облаком смещаются вниз и устремляются в окрестность седлового равновесия  $M_1 = (100, 0)$ .

Таким образом, в работе показано, как влияние параметрического шума двух разных видов может приводить к качественным изменениям экологических режимов.

**Финансирование.** Исследование проведено при поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10098).



**Рис. 9.** Индуцированное шумом смещение равновесия при  $\delta = 0.24$ : в первой колонке — шум первого вида ( $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ), во второй колонке — шум второго вида ( $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ) для: а)  $\sigma = 0.05$ ; б)  $\sigma = 0.05$ ; в)  $\sigma = 0.5$ ; г)  $\sigma = 0.15$

#### Список литературы

1. Alves M.T., Hilker F.M. Hunting cooperation and Allee effects in predators // *Journal of Theoretical Biology*. 2017. Vol. 419. P. 13–22. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.02.002>
2. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced extinction in Bazykin–Berezovskaya population model // *The European Physical Journal B*. 2016. Vol. 89. Issue 7. Article 165. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70345-6>
3. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2004. Vol. 66. Issue 1. P. 55–67. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2004.02.021>
4. Lande R., Engen S., Saether B.-E. Stochastic population dynamics in ecology and conservation. Oxford University Press, 2003. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525257.001.0001>
5. Laws A.N. Climate change effects on predator–prey interactions // *Current Opinion in Insect Science*. 2017. Vol. 23. P. 28–34. <https://doi.org/10.1016/j.cois.2017.06.010>
6. O'Regan S.M. How noise and coupling influence leading indicators of population extinction in a spatially extended ecological system // *Journal of Biological Dynamics*. 2017. Vol. 12. No. 1. P. 211–241. <https://doi.org/10.1080/17513758.2017.1339834>
7. Rubin A., Rznichenko G. *Mathematical biophysics*. Springer, 2014.
8. Turchin P. *Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis*. Princeton University Press, 2003. <https://doi.org/10.1515/9781400847280>
9. Алексеев В.В. Влияние фактора насыщения на динамику системы хищник–жертва // *Биофизика*. 1973. Т. 18. Вып. 5. С. 922–926.
10. Базыкин А.Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
11. Башкирцева И.А., Бояршинова П.В., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированного шумом разрушения режимов сосуществования в популяционной системе «хищник–жертва» // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2016. Т. 8. № 4. С. 647–660. <http://mi.mathnet.ru/crm18>
12. Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник–жертва» // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17. Вып. 2. С. 37–53. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-2-37-53>

13. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. Вып. 6. С. 104–114.
14. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
15. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982.
16. Епифанов А.В., Цибулин В.Г. О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 5. С. 799–813.  
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813>
17. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 1. С. 53–63.
18. Плюснина Т.Ю., Фурсова П.В., Тёрлова Л.Д., Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биологии. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2014.

Поступила в редакцию 04.04.2019

Абрамова Екатерина Павловна, студент, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

E-mail: [ekaterina.abramova@urfu.ru](mailto:ekaterina.abramova@urfu.ru)

Рязанова Татьяна Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической и математической физики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: [tatyana.ryazanova@urfu.ru](mailto:tatyana.ryazanova@urfu.ru)

*E. P. Abramova, T. V. Ryazanova*

#### **Analysis of the influence of parametric noise on the dynamics of two interacting populations**

**Citation:** *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Univivertiteta*, 2019, vol. 53, pp. 3–14 (in Russian).

**Keywords:** population model, parametric noise, noise-induced phenomena.

MSC2010: 39A50

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-01

This paper considers the predator-prey population model, which combines both the stabilizing factors of the intraspecific competition of prey and predator (for resources other than the prey), and the predator saturation. The purpose of this study is a comparative parametric analysis of stochastic phenomena which occur under parametric noise of two different types. The stochastic sensitivity of the attractors is studied. Based on the stochastic sensitivity function technique, noise-induced phenomena are described. In the parametric bistable zone, transitions of two types are carried out: equilibrium  $\rightarrow$  equilibrium and cycle  $\rightarrow$  equilibrium. The values of critical intensities for the occurrence of transition phenomena between attractors are obtained. In the parametric monostable zone, such phenomena as cycle deformation and equilibrium shift are demonstrated.

**Funding.** The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16–11–10098).

#### REFERENCES

1. Alves M.T., Hilker F.M. Hunting cooperation and Allee effects in predators, *Journal of Theoretical Biology*, 2017, vol. 419, pp. 13–22. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.02.002>
2. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced extinction in Bazykin–Berezovskaya population model, *The European Physical Journal B*, 2016, vol. 89, issue 7, article 165.  
<https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70345-6>

3. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2004, vol. 66, issue 1, pp. 55–67. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2004.02.021>
4. Lande R., Engen S., Saether B.-E. *Stochastic population dynamics in ecology and conservation*, Oxford University Press, 2003. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525257.001.0001>
5. Laws A.N. Climate change effects on predator–prey interactions, *Current Opinion in Insect Science*, 2017, vol. 23, pp. 28–34. <https://doi.org/10.1016/j.cois.2017.06.010>
6. O’Regan S.M. How noise and coupling influence leading indicators of population extinction in a spatially extended ecological system, *Journal of Biological Dynamics*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 211–241. <https://doi.org/10.1080/17513758.2017.1339834>
7. Rubin A., Rznichenko G. *Mathematical biophysics*, Springer, 2014.
8. Turchin P. *Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis*, Princeton University Press, 2003. <https://doi.org/10.1515/9781400847280>
9. Alekseev V.V. Influence of the saturation factor on the dynamics of the predator–prey system, *Biofizika*, 1973, vol. 18, no. 5, pp. 922–926 (in Russian).
10. Bazykin A.D. *Nelineinaya dinamika vzaimodeistviyuyushchikh populyatsii* (Nonlinear dynamics of interacting populations), Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003.
11. Bashkirtseva I.A., Boyarshinova P.V., Ryazanova T.V., Ryashko L.B. Analysis of noise-induced destruction of coexistence regimes in “prey–predator” population model, *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 647–660 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/crm18>
12. Bashkirtseva I.A., Karpenko L.V., Ryashko L.B. Analysis of attractors for stochastically forced “predator–prey” model, *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya Nelineinaya Dinamika*, 2009, vol. 17, issue 2, pp. 37–53 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-2-37-53>
13. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Quasipotential method in local stability analysis of the stochastically forced limit cycles, *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya Nelineinaya Dinamika*, 2001, vol. 9, issue 6, pp. 104–114 (in Russian).
14. Ventsel’ A.D., Freidlin M.I. *Fluktuatsii v dinamicheskikh sistemakh pod deistviem malykh sluchainykh vozmushchenii* (Fluctuations in dynamical systems under the influence of small random perturbation), Moscow: Nauka, 1979.
15. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Stokhasticheskie differentsial’nye uravneniya i ikh prilozheniya* (Stochastic differential equations and application), Kiev: Naukova dumka, 1982.
16. Epifanov A.V., Tsybulin V.G. Regarding the dynamics of cosymmetric predator–prey systems, *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 799–813 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813>
17. Mil’shtein G.N., Ryashko L.B. A first approximation of the quasipotential in problems of the stability of systems with random non-degenerate perturbations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, vol. 59, issue 1, pp. 47–56. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00006-b](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00006-b)
18. Plyusnina T.Yu., Fursova P.V., Terlova L.D., Rznichenko G.Yu. *Matematicheskie modeli v biologii*, (Mathematical models in biology), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2014.

Received 04.04.2019

Abramova Ekaterina Pavlovna, Student, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: [ekaterina.abramova@urfu.ru](mailto:ekaterina.abramova@urfu.ru)

Ryazanova Tat’yana Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical and Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: [tatyana.ryazanova@urfu.ru](mailto:tatyana.ryazanova@urfu.ru)