

УДК 531.55

© В. В. Чистяков

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ОПЕРЕННОГО СНАРЯДА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Предложен альтернативный способ интегрирования уравнений свободного плоскопараллельного движения оперенного снаряда в среде с квадратичными по скорости аэродинамическими усилиями: лобовым сопротивлением, подъемной силой, статическим и демпфирующим моментами. Через использование проективно-двойственных переменных этот способ понижает размерность динамической системы, одновременно исключая из нее трансцендентные переменные. Исследованы области параметров, в которых имеет место разное временное поведение угла атаки $\vartheta(t)$, включая квазистабиллизацию и аperiodические автоколебания.

Ключевые слова: плоскопараллельное движение, подъемная сила, квадратичное сопротивление, статический/демпирующий момент, алгебраичность, угол атаки, стабилизация, автоколебания.

Введение

В стационарных условиях отсутствия макроскопического движения среды и в пренебрежении кориолисовой силой движение оперенного симметричного твердого тела, запущенного в плоскости собственной симметрии, будет оставаться плоскопараллельным вплоть до приземления, полагаемого, как правило, на высоте старта.

В декартовых координатах соответствующая динамическая система будет содержать по числу степеней свободы $n = 3$ дифференциальных уравнения, два из которых при условии однородности среды имеют фактический порядок $k = 1$ и отвечают за поступательное движение вместе с центром масс (ц. м.), а третье — порядка $k = 2$ — за вращение в плоскости полета.

Классическим примером такой динамической системы является запущенная в безветрие спортивная стрела [1], копьё либо оперенный (*finned*) боевой снаряд, ракета, движущаяся свободно после кратковременных корректирующих реактивных импульсов [2], да и просто пуля, выпущенная из гладкоствольного оружия. Во всех этих и иных аналогичных случаях особый интерес представляет траектория движения центра масс, а не детальный график этого движения в реальном времени. Не менее важна и ориентация тела в момент попадания его в цель, в особенности для снарядов, во избежание рикошета и для полноценного поражения, пробивания цели.

Поэтому проблема интегрирования уравнений плоского резистивного движения актуальна и с точки зрения спортивной механики, и с точки зрения внешней баллистики оперенных снарядов и ракет.

Кроме того, вышеозначенное симметричное (с точки зрения аэродинамических усилий) тело является относительно простой экспериментальной моделью, на которой проверяются качественные и даже количественные выводы теории динамических систем с *переменной диссипацией* [3] со всем сложным и разнообразным математическим ее аппаратом.

В настоящей работе предлагается альтернативный способ определения траектории свободного движения тела в вертикальной плоскости его симметрии, а также поведения угла его атаки в предположении квадратичной зависимости от скорости четырех основных аэродинамических усилий: лобового сопротивления, нормальной (подъемной) силы, консервативного статического момента и диссипативного демпфирующего момента.

Способ апробирован на материальной точке [4, 5] и гиостабилизированном осесимметричном теле [6], и он базируется на рассмотрении задачи в проективно-двойственных переменных, переход к которым осуществляется посредством преобразования Лежандра (см., например, [7]). Эти переменные суть угловой коэффициент касательной к траектории центра масс $b = \operatorname{tg} \theta$ и отрезок (точнее, его изменение) подкасательной $a = y - bx$ — в англоязычной научной литературе *intercept*.

Временные характеристики при этом рассматриваются во вторую очередь, как не представляющие прямого интереса, но лишь опосредованно определяющие некоторые физические параметры полета, такие как спектр излучаемых телом инфразвуковых колебаний на разных участках траектории.

Дополнительным преимуществом проективно-двойственных переменных является монотонность их полетного поведения и инвариантность определения по отношению к переносу начала системы координат.

Что же касается наклона b , то разумно считать его естественной угловой мерой баллистики, так как прицеливание легче осуществляется по соотношению вертикального и горизонтального катетов, нежели дуги и радиуса.

§ 1. Исходные уравнения

Предполагается, что тело в вертикальной плоскости своей симметрии обладает некоторой продольной осью \vec{l} минимального лобового сопротивления, и, как правило, вдоль именно этой оси направляется вектор начальной скорости $\vec{V}_0 = (V_0 \cos \theta_0, V_0 \sin \theta_0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ — угол бросания. Для осесимметричного тела при движении вдоль \vec{l} равна нулю нормальная сила N , однако это не является обязательным требованием, и на старте тело может иметь ненулевой угол атаки $\vartheta_0 \neq 0$.

Вращение тела рассматривается в неинерциальной системе, начало которой находится в центре масс (ц. м.) C . В силу этого гравитационные и инерционные моменты в любой момент равны нулю: изменение угла атаки определяется лишь главным моментом \vec{M}_C аэродинамических сил, разлагаемым на консервативный статический M_s и диссипативный демпфирующий M_d .

Для этих моментов используются принятые в баллистике [8] модельные формулы $M_s = -\sigma V^2 \sin \vartheta$ и $M_d = -\delta V^2 \omega$, где V — скорость центра масс, ϑ — угол атаки, ω — угловая скорость тела, σ и δ — соответствующие их коэффициенты, полагаемые в модели независимыми от скорости V , угла ϑ и величины ω .

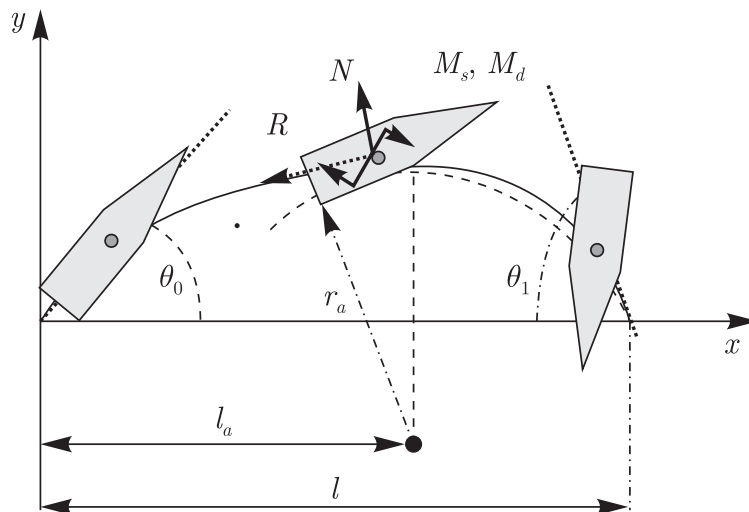


Рис. 1. Траектория плоскопараллельного свободного движения тела

Движение самого ц. м., наблюдаемое из инерциальной неподвижной системы Oxy (рис. 1), помимо гравитации mg также определяется главным вектором аэродинамических сил \vec{R}_{ad} , который раскладывается на лобовое сопротивление $R = -mg\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta)V^2$ и нормальную силу $N = mg\gamma_0 V^2 \sin \vartheta$, тоже квадратичные по V . Наличие же оперения делает невозможным вращение вокруг продольной оси \vec{l} , и потому магнусовские силы и моменты отсутствуют.

Параметр ε , характеризующий относительный прирост сопротивления R при изменении угла атаки от 0 до 90° , может принимать достаточно большие значения, для стрелы спортивного

лука порядка нескольких десятков, так как помимо фронтальной площади S катастрофически ухудшается коэффициент формы, характеризующий обтекаемость.

В неподвижной системе Oxy уравнения движения ц. м. запишутся как

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta) \frac{g\dot{x}^2}{\cos \theta} - \gamma_0 \sin \vartheta \frac{g\dot{x}^2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}, \\ \ddot{y} = -\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta) \frac{g\dot{x}^2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \gamma_0 \sin \vartheta \frac{g\dot{x}^2}{\cos \theta} - g, \\ \dot{y} = \operatorname{tg} \theta \cdot \dot{x}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta) \frac{g\dot{x}^2}{\cos \theta} - \gamma_0 \sin \vartheta \frac{g\dot{x}^2 \sin \theta}{\cos^2 \Theta}, \\ \dot{\theta} = \gamma_0 \frac{\sin \vartheta g \dot{x}}{\cos \theta} - \frac{g \cos^2 \theta}{\dot{x}}. \end{cases}$$

В подвижной системе ц. м. тела вращение последнего как изменение угла наклона $\Theta = \theta + \vartheta$ оси \vec{l} к горизонту Ox описывается уравнением 2-го порядка

$$J_{Cz} \frac{d^2(\theta + \vartheta)}{dt^2} = -\delta \frac{\dot{x}^2}{\cos^2 \theta} \sin \vartheta - \sigma \frac{d(\theta + \vartheta)}{dt}, \quad (1.2)$$

где J_{Cz} — центральный поперечный момент инерции тела, то есть момент относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости движения.

Таким образом, получается достаточно сложная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE) относительно трех неизвестных, решение которой позволит найти законы для углов атаки ϑ и наклона траектории θ , а также — для горизонтальной скорости \dot{x} . Номинальный суммарный порядок системы равен $k = 5$, фактический — четырем.

§ 2. Уравнение для центра масс

В уравнениях (1.1)–(1.2) с учетом соотношений $b = \operatorname{tg} \theta = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ и $\Theta = \theta + \vartheta$ фигурируют в общей сложности три независимых пространственных переменных при аргументе t — времени от начала движения.

Умножение первого уравнения в (1.1) на b с последующим его вычитанием из второго дают

$$\ddot{y} - b\ddot{x} = -g + \gamma_0 \sin \vartheta g \dot{x}^2 (1 + b^2)^{3/2}.$$

С учетом того, что $\dot{y} = b\dot{x}$, это означает

$$\dot{b}\dot{x} = -g + \gamma(b)g\dot{x}^2(1 + b^2)^{3/2}.$$

Так как $x = -\frac{da(b)}{db}$ [6], и, следовательно, $\dot{x} = -\frac{d^2}{db^2}\dot{b} > 0$, то

$$\dot{b} \left(\frac{d^2}{db^2} \dot{b} \right) = -g + \gamma_0 \sin \vartheta g \left(\frac{d^2}{db^2} \dot{b} \right)^2 (1 + b^2)^{3/2}, \quad (2.1)$$

и

$$\dot{b} = -\frac{1}{a''_{bb}} \sqrt{\frac{g}{\frac{1}{a''_{bb}} + \gamma_0 \sin \vartheta (1 + b^2)^{3/2}}}. \quad (2.2)$$

Отрицательный знак здесь выбирается при нормальной проекции веса тела, превышающей подъемную силу $mg \cos \theta > N$, в противном случае со старта центр кривизны траектории переместится вверх и тело полетит по выпуклой вниз кривой.

Скорость ц. м. определится как

$$V(b) = \frac{dx}{db} \dot{b} (1+b^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{g(1+b^2)a''_{bb}}{1 + \gamma_0 \sin \vartheta g a''_{bb} (1+b^2)^{3/2}}} = \sqrt{\frac{g(1+b^2)}{\frac{1}{a''_{bb}} + \gamma_0 \sin \vartheta g (1+b^2)^{3/2}}}. \quad (2.3)$$

Для квадрата темпа потери наклона вектора \vec{V} получается

$$\dot{b}^2 = \frac{g}{(a''_{bb}) + g\gamma_0 \sin \vartheta g a''_{bb} (1+b^2)^{3/2}} = \frac{g}{(a''_{bb})^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a''_{bb}} + g\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2}}. \quad (2.4)$$

Для второй производной:

$$\ddot{b} = - \frac{g \left(a'''_{bbb} + 2\gamma_0 \sin \vartheta g a''_{bb} a'''_{bbb} (1+b^2)^{3/2} + g(a''_{bb})^2 \frac{d(\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2})}{db} \right)}{2 \left(a''_{bb} + g\gamma_0 \sin \vartheta (a''_{bb})^2 (1+b^2)^{3/2} \right)^2}. \quad (2.5)$$

Горизонтальное ускорение ц. м. определится через новые переменные как

$$\ddot{x} = \left(-\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right)'_b = -\frac{d^3 a}{db^3} \dot{b}^2 - \frac{d^2 a}{db^2} \ddot{b}. \quad (2.6)$$

Тогда первое из уравнений (1.1) запишется после подстановки (2.2), (2.4), (2.5) как

$$\begin{aligned} & -a'''_{bbb} \frac{g}{a''_{bb} + \gamma_0 \sin \vartheta g (a''_{bb})^2 (1+b^2)^{3/2}} - \\ & -a''_{bb} \left(-\frac{g \left(a'''_{bbb} + 2\gamma_0 \sin \vartheta g a''_{bb} a'''_{bbb} (1+b^2)^{3/2} + g(a''_{bb})^2 \frac{d(\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2})}{db} \right)}{2 \left(a''_{bb} + \gamma_0 \sin \vartheta g (a''_{bb})^2 (1+b^2)^{3/2} \right)^2} \right) = \\ & = -(\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta) + \gamma_0 b \sin \vartheta) g (-a''_{bb})^2 \left(\frac{g}{a''_{bb} + \gamma_0 \sin \vartheta g (a''_{bb})^2 (1+b^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1+b^2}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

После несложных преобразований оно приводится к виду

$$\frac{a'''_{bbb}}{(a''_{bb})^2} = 2g(\alpha(b) + b\gamma(b)) a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + g\gamma(b)(1+b^2)^{3/2} \right) \sqrt{1+b^2} + g \frac{d(\gamma(b)(1+b^2)^{3/2})}{db}. \quad (2.8)$$

В (2.8) $\alpha(b)$, $\gamma(b)$ — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы в общем случае; в частном же они равны $\alpha(b) = \alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b))$, $\gamma(b) = \gamma_0 \sin \vartheta(b)$, и уравнение записывается как

$$\begin{aligned} \frac{a'''_{bbb}}{(a''_{bb})^2} &= 2g(\alpha_0(1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) + \gamma_0 b \sin \vartheta(b)) a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + g\gamma(b)(1+b^2)^{3/2} \right) \sqrt{1+b^2} + \\ &+ g \frac{d(\gamma_0 \sin \vartheta(b)(1+b^2)^{3/2})}{db}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Решение (2) позволило бы параметрическим образом описать траекторию и график движения через формулы обратного перехода [4, 5]

$$\begin{aligned}
x(b) - x_0 &= - \int_{b_0}^b \frac{d^2 a(b')}{db'^2} db', & y(b) - y_0 &= - \int_{b_0}^b b' \frac{d^2 a(b')}{db'^2} db', \\
t(b) &= - \int_{b_0}^b \frac{db'}{\sqrt{\frac{g}{a''_{b'b'} + \gamma_0 \sin \vartheta(b') (a''_{b'b'})^2 (1 + b'^2)^{3/2}}}}, & b_0 &= \operatorname{tg} \theta_0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

причем параметр b обладал бы нужным геометрическим и физическим смыслом — наклон к горизонту вектора скорости ц. м. Однако независимое интегрирование невозможно, так как уравнение содержит неизвестную функцию $\eta(b) = \sin(\vartheta) = \sin(\Theta(b) - \operatorname{arctg} b)$, определить которую можно только путем решения совместной системы дифференциальных уравнений, составленной из (2) и уравнения вращения тела вокруг точки C .

§ 3. Вращательная динамика

Уравнение (1.2) плоского вращения вокруг ц. м. требует перехода от временной переменной t к проективно-двойственной b по формулам

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\Theta}{db} \dot{b}, \quad \dot{\omega} = \frac{d^2\Theta}{db^2} \dot{b}^2 + \frac{d\Theta}{db} \ddot{b}. \tag{3.1}$$

Производные от угла Θ по наклону b суть

$$\frac{d\Theta}{db} = \frac{d\vartheta}{db} + \frac{1}{1+b^2}, \quad \frac{d^2\Theta}{db^2} = \frac{d^2\vartheta}{db^2} - \frac{2b}{(1+b^2)^2}. \tag{3.2}$$

Для второй производной от наклона b по времени t после подстановки (2.8) в (2.5) и элементарных преобразований получается

$$\begin{aligned}
\ddot{b} &= -g^2 \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) \sqrt{1+b^2} \cdot a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + 2g\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2} \right) + \frac{d(\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2})}{db} \right) : \\
&: a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + g\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2} \right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда безразмерное отношение

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{b}}{(\dot{b})^2} &= -g a''_{bb} \times \\
&\times \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) \sqrt{1+b^2} \cdot a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + 2g\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2} \right) + \frac{d(\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2})}{db} \right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

а дробь

$$\frac{V(b)^2}{\dot{b}^2} = \frac{g(1+b^2)}{\frac{1}{a''_{bb}} + \gamma_0 \sin \vartheta g (1+b^2)^{3/2}} \div \left(\frac{g}{(a''_{bb})^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a''_{bb}} + g\gamma_0 \sin \vartheta (1+b^2)^{3/2}} \right) = (a''_{bb})^2 (1+b^2). \tag{3.5}$$

Подстановка (3.2) и (3.3) в исходное вращательное уравнение (1.2) и последующее деление обеих его частей на \dot{b}^2 с учетом (3.4) и (3.5) дает новое уравнение в системе

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{a'''_{bbb}}{a''_{bb}} = 2g \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) + \gamma_0 b \sin \vartheta(b) \right) a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + \gamma_0 g \sin \vartheta (1 + b^2)^{3/2} \right) \sqrt{1 + b^2} + \\
+ g \frac{d \left(\gamma_0 \sin \vartheta (1 + b^2)^{3/2} \right)}{db}, \\
\frac{d^2 \vartheta}{db^2} = \frac{2b}{(1 + b^2)^2} + \left(\frac{d\vartheta}{db} + \frac{1}{1 + b^2} \right) a''_{bb} \left(g \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) + \gamma_0 b \sin \vartheta(b) \right) \times \right. \\
\times \sqrt{1 + b^2} \cdot a''_{bb} \left(\frac{1}{a''_{bb}} + 2g\gamma_0 \sin \vartheta (1 + b^2)^{3/2} \right) + \gamma_0 (1 + b^2)^{3/2} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{db} + \\
\left. + 3\gamma_0 \sin \vartheta \cdot b (1 + b^2)^{1/2} + \frac{\delta}{J_{Cz}} \cdot (1 + b^2) \cdot \sqrt{\frac{g}{\frac{1}{a''_{bb}} + \gamma_0 \sin \vartheta g (1 + b^2)^{3/2}}} \right) - \\
- \frac{\sigma}{J_{Cz}} (1 + b^2) (a''_{bb})^2 \sin \vartheta,
\end{array} \right. \quad (3.6)$$

независимой переменной в которой является b .

Эта система имеет суммарный порядок $k = 3$, то есть на две единицы меньше номинального порядка исходной (1.1)–(1.2), на одну — фактического. Кроме того, очевидной заменой $\eta(b) = \sin \vartheta(b)$ достигается полная ее алгебраизация на уровне радикалов второго порядка и исключение даже таких несложных трансцендентных функций как $\sin \vartheta / \cos \vartheta$, что немаловажно при численном интегрировании.

§ 4. Задача Коши в проективно-двойственных переменных

После введения новой зависимой переменной $\Phi(b) = \frac{1}{a''_{bb} b} + \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2}$, механический смысл которой (2.3) есть отношение $\frac{g}{x^2}$, система (3.6) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\Phi(b)}{db} = -2g \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) + \gamma_0 b \sin \vartheta(b) \right) \times \\
\times \left(1 + \frac{\gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2}}{\Phi(b) - \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1 + b^2}, \\
\frac{d^2 \vartheta}{db^2} = \frac{2b}{(1 + b^2)^2} + \left(\frac{d\vartheta}{db} + \frac{1}{1 + b^2} \right) \left(g \left(\alpha_0 (1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta(b)) + \gamma_0 b \sin \vartheta(b) \right) \sqrt{1 + b^2} \times \right. \\
\times \frac{\Phi(b) + \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2}}{\left(\Phi(b) - \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2} \right)^2} + \\
\left. + \frac{\gamma_0 (1 + b^2)^{3/2} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{db} + 3\gamma_0 \sin \vartheta \cdot b (1 + b^2)^{1/2} + \frac{\delta}{J_{Cz}} \cdot (1 + b^2)^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{g}{\Phi(b)}}}{\Phi(b) - \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2}} \right) - \\
- \frac{\sigma (1 + b^2) \sin \vartheta}{J_{Cz} \left(\Phi(b) - \gamma_0 g \sin \vartheta(b) (1 + b^2)^{3/2} \right)^2}.
\end{array} \right. \quad (4.1)$$

Что касается начальных условий, то для угла наклона оси снаряда \vec{l} и его временной производной полагается возможное наличие стартового угла атаки, но отсутствие вращения:

$$\Theta(b) = \theta_0 + \vartheta_0, \quad \frac{d\Theta(b_0)}{dt} = \frac{d\Theta(b_0)}{db} \cdot \dot{b}(b_0) = 0.$$

Так как $\dot{b}(b_0) \neq 0$ (см. (3.4)), то $\frac{d\Theta(b_0)}{db} = 0$, и, следовательно,

$$\frac{d\vartheta(b_0)}{db} = \frac{d(\Theta - \theta)}{db} = -\frac{1}{1 + b^2}.$$

С учетом (2.3) начальные условия при запуске невращающегося тела запишутся как

$$\Phi(b_0) = \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta_0}, \quad \vartheta(b_0) = \vartheta_0, \quad \vartheta'_b(b_0) = -\cos^2 \theta_0. \quad (4.2)$$

Для вращающегося же вокруг оси Cz , например, запущенного ножа, начальные условия должны учитывать выражение (2.4) для величины $\dot{b}(b_0)$.

Таким образом, для получения резольвентной [4] функции $f(b) = a''_{bb}(b)$, определяющей параметрическое уравнение траектории и график движения по ней, а также для нахождения траекторного поведения угла атаки необходимо решить систему из $n = 2$ дифференциальных уравнений, одно — первого, другое — второго порядка; либо с помощью стандартной замены $\Omega(b) = \vartheta'_b(b)$ решить систему из $n = 3$ уравнений первого порядка. Это означает, что переход к проективно-двойственным переменным снижает размерность задачи на единицу, что немало важно при численном интегрировании.

Решение задачи Коши (4.1), (4.2) определит параметрическим образом уравнение траектории

$$\begin{cases} x(b) = - \int_{b_0}^b \frac{db'}{\Phi(b') - \gamma_0 g \sin \vartheta(b') (1 + b'^2)^{3/2}}, \\ y(b) = - \int_{b_0}^b \frac{b' db'}{\Phi(b') - \gamma_0 g \sin \vartheta(b') (1 + b'^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (4.3)$$

§ 5. Численное интегрирование, основные результаты

Численное интегрирование производилось при помощи продукта Maple 15 фирмы MapleSoft для системы из 3-х дифференциальных уравнений 1-го порядка, получаемой введением дополнительного линейного уравнения $\vartheta'_b(b) = \Omega(b)$. В итоге из двух других, нелинейных уравнений получившейся системы одно содержало все три неизвестные, другое только две.

В таком виде эта система вполне может быть использована для расчета траектории спортивного или боевого снаряда при предварительном определении всех аэродинамических коэффициентов и параметров.

Варьировались следующие величины: начальная скорость $V_0 = 0.3-0.7$ и $1.5-2.3 Mach$, угол вылета $\theta_0 = -65 \dots 65^\circ$, коэффициенты сил и моментов $\alpha_0, \varepsilon, \gamma_0, \sigma$ и δ — в широких пределах. Начальный угол атаки ϑ_0 полагался нулевым, также как и стартовая угловая скорость.

Обнаружены следующие характерные типы поведения $\vartheta(\theta)$ в разных доменах вышеозначенных параметров.

1. Монотонный рост и временная стабилизация скорости падения примерно на уровне пологого максимума, а угла атаки — на значениях вплоть до примерно $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ (рис. 2), все при малых отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и всех мыслимых значениях коэффициентов демпфирования δ .

При аномально больших отрицательных наклонах стабилизация сменяется падением $\vartheta(b)$, но в область, близкую к 90° , что влечет за собой потерю скорости при одновременном росте величины $\frac{d^2 a(b)}{db^2}$. Однако обнаружить это можно лишь теоретически, запуская тело с очень большой высоты.

Эта стабилизация $\vartheta(b)$ не тождественна простому сохранению ориентации оси тела \vec{l} в пространстве, так как угловая скорость $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ все же не равна строго нулю, и значение угла атаки на плато не всегда близко к уровню $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$, ожидаемому при практически вертикальном приземлении. Оно зависит в частности от коэффициента δ (тонкая и толстая сплошные

черные линии на рисунке). Но при аномально высоких значениях δ действительно ориентация тела будет неизменна

Реально эффект может проявиться, например, при стрельбе из специального лука/арбалета тяжелыми стрелами, слабо ориентируемыми по вектору скорости статическим моментом M_s из-за их большого момента инерции.

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 3 \times 10^{-9}, \delta := 5 \times 10^{-9} \text{ (thin black)}, 5 \times 10^{-5} \text{ (thick black)} \\ \theta_0 = 60^\circ$$

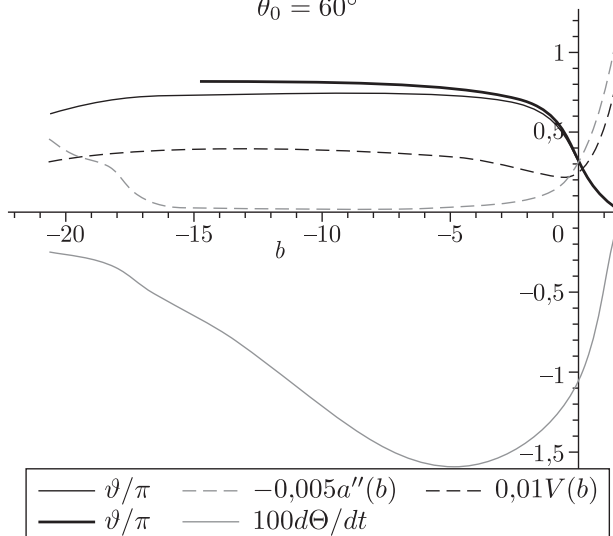


Рис. 2. Поведение угла атаки $\vartheta(b)$, угловой $\frac{d\Theta}{dt}$ и линейной $V(b)$ скоростей при малых отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,000003, \delta := 0,5 \times 10^{-7}, \theta_0 = 60^\circ$$

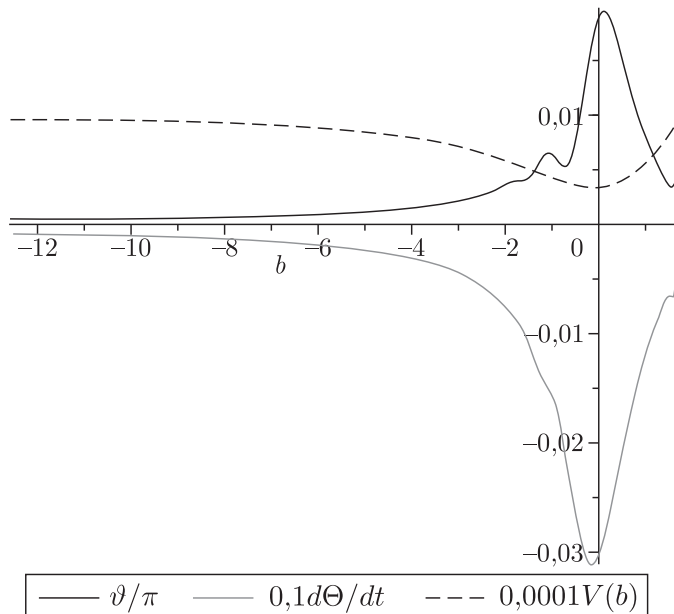


Рис. 3. То же самое при средних значениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и больших δ

2. Немонотонная зависимость, модулированная быстро затухающими низкочастотными ко-

лебаниями (рис. 3), при средних величинах $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и больших δ ; в пределе незатухающими — при $\delta = 0$ (рис. 4).

3. Высокочастотные затухающие колебания при больших $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$, декремент которых также зависит от δ (рис. 5, 6).

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,000003, \delta := 0, \theta_0 = 60^\circ$$

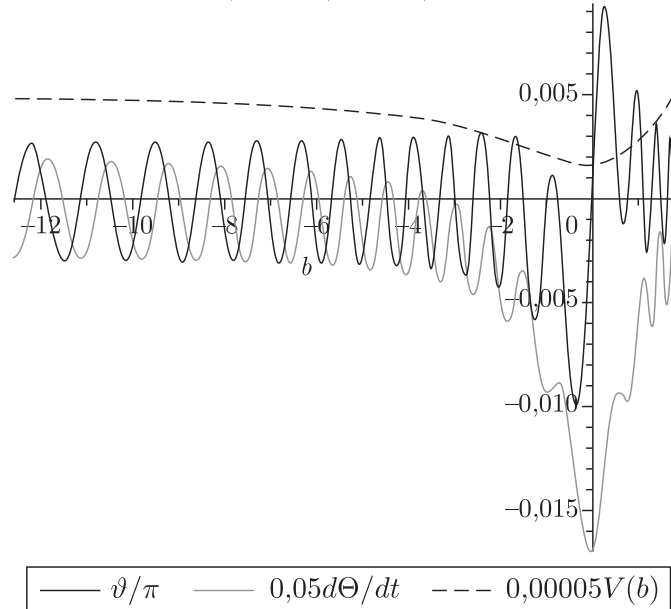


Рис. 4. Поведение угла атаки $\vartheta(b)$, угловой $\omega = \frac{d\Theta(b)}{dt}$ и линейной $V(b)$ скоростей при средних отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и $\delta = 0$

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,00003, \delta := 2 \times 10^{-8}, \theta_0 = 60^\circ$$

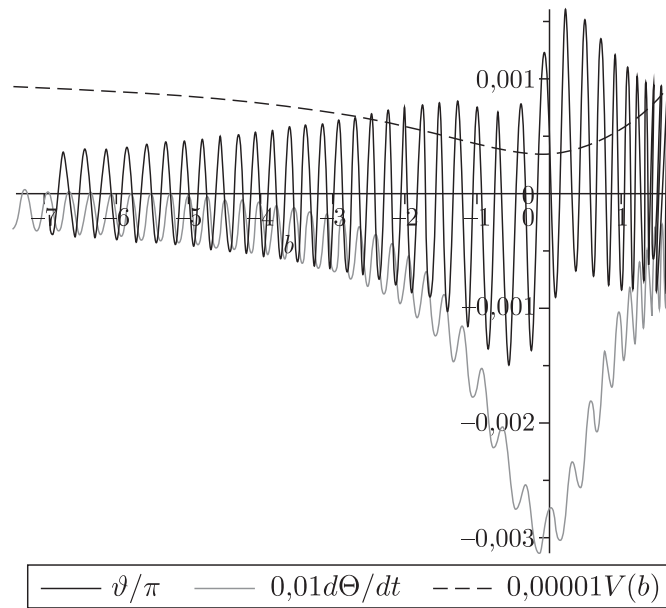


Рис. 5. То же самое при больших отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и малых δ

В общем и целом, и угол атаки, и угловая скорость в b -представлении с некоторыми ого-

ворками, касающимися вершинной области траектории, демонстрируют все известные свойства колебательной системы с затуханием.

Поведение угла $\vartheta(b)$, разумеется, сильно влияет на траекторию ц.м., и степень влияния в основном определяется коэффициентом статического момента σ : чем он меньше, тем шире диапазон изменения угла $\vartheta(b)$, а траектория короче и ниже (рис. 7). И наоборот, чем он больше, тем амплитуда осцилляций угла меньше, а траектория ближе к треку материальной точки. Другие факторы — коэффициент подъемной силы и демпфирующего момента — в своих реальных диапазонах влияют на траекторию в меньшей степени.

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,00003, \delta := 2 \times 10^{-7}, \theta_0 = 60^\circ$$

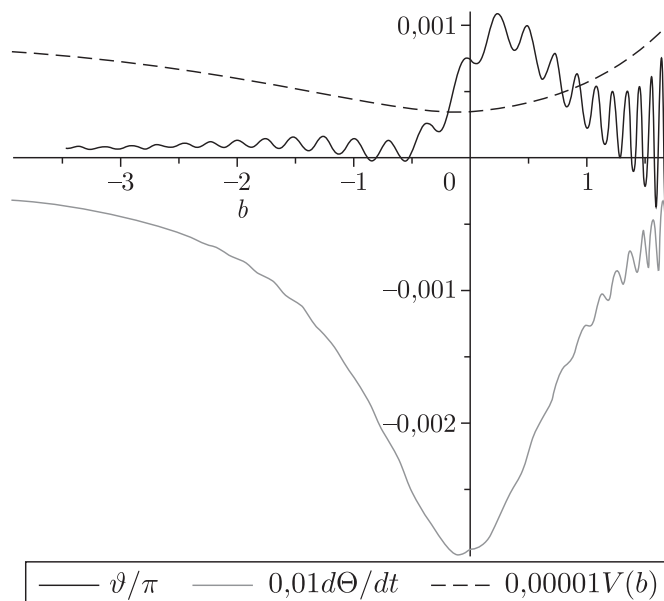


Рис. 6. Поведение угла атаки $\vartheta(b)$ и угловой скорости $\frac{d\Theta}{dt}$ при средних отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и больших δ

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 5 \times 10^{-8}, \theta_0 = 60^\circ, \sigma := 0,000003 \text{ (1)}, \sigma := 0,0000003 \text{ (2)}, \\ \sigma := 5 \times 10^{-9} \text{ (3)}, \sigma := 5 \times 10^{-8} \text{ (4)}$$

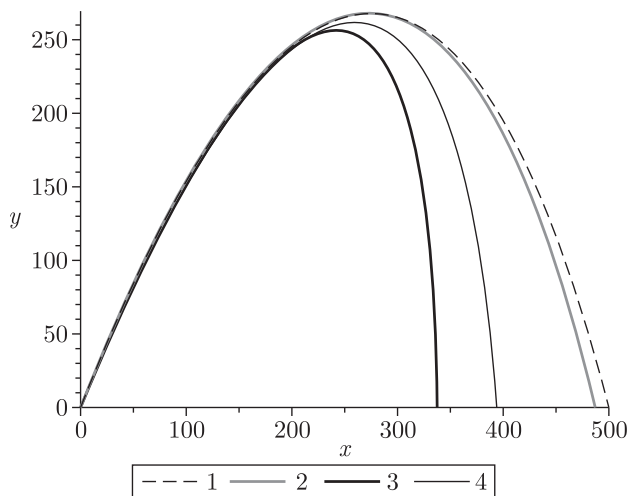


Рис. 7. Траектории полета при различных значениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$

§ 6. Почти вертикальные траектории

При углах запуска θ_0 , близких к 90° , численный эксперимент прогнозирует несколько необычное поведение угла атаки $\vartheta(b)$ и угловой скорости вращения тела $\frac{d\Theta}{dt}$. При высоких значениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и малых δ наблюдается качественно различное их поведение на участке взлета и падения (рис. 8, 9). Более выраженные автоколебания должны наблюдаться на втором участке, причем амплитуда угловой скорости не падает как обычно, а наоборот, возрастает, как показывает анализ, за счет роста величины \dot{b} .

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,00005, \delta := 0, \theta_0 = 80^\circ$$

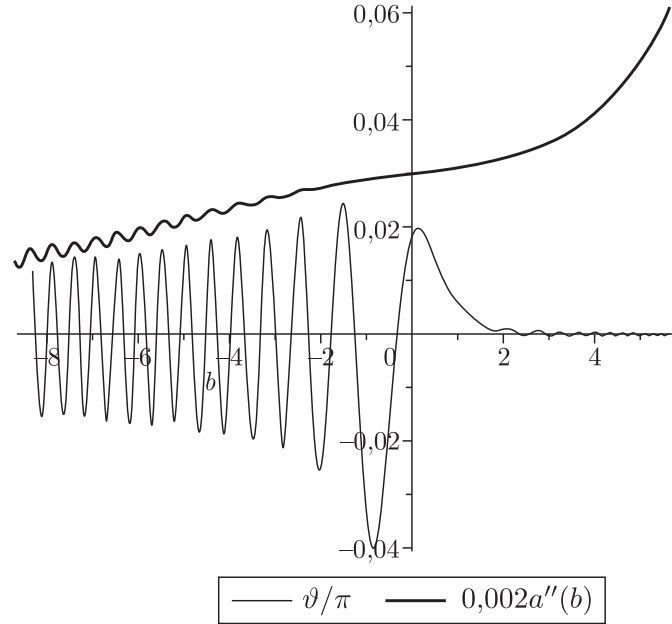


Рис. 8. Поведение угла атаки $\vartheta(b)$ и величины $\frac{d^2a(b)}{db^2}$ при больших отношениях $\frac{\sigma}{J_{Cz}}$ и $\delta = 0$

А так как амплитуда угла атаки по-прежнему падает, то это должно приводить к уменьшению временного периода колебаний угла, а следовательно, повышению частоты излучаемых телом акустических колебаний. Из соотношений амплитуд $\vartheta(b)$ и $\frac{d\Theta}{dt}$ ее спектр в собственной системе отсчета можно оценить примерно в 5–15 Гц для исследуемого набора параметров.

Также нельзя не заметить некую параллельность верхних огибающих кривых для автоколебаний обеих величин и графиков $\frac{d^2a(b)}{db^2}$ и $V(b)$, опять же на участке $b < 0$. Как и следует ожидать, зависящая от кривизны траектории и геометрическая, по сути, характеристика $\frac{d^2a(b)}{db^2}$ коррелирует с геометрической же характеристикой $\vartheta(b)$, а кинематическая характеристика $V(b)$ — с кинематической $\frac{d\Theta}{dt}$.

Расчеты показывают, что аналог полной внутренней энергии тела — сумма потенциальной энергии ориентации $\sigma(1 - \cos \vartheta(b))$ и вращательной кинетической $\frac{J_{Cz}}{2} \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2$ — также аperiodически осциллирует, причем вторая энергия превалирует над первой примерно на два-три порядка. Потому ни о каком переходе одной формы энергии в другую не может быть и речи в этой незамкнутой системе.

$$V = 100, \alpha_0 := 0,0001, \epsilon = 10, \gamma_0 := 0,00005, J_z := 0,001, \\ \sigma := 0,00005, \delta := 0, \theta_0 = 80^\circ$$

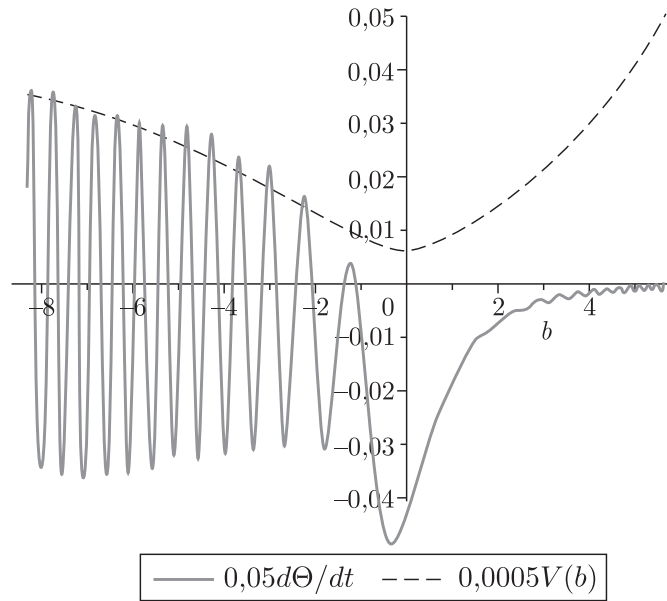


Рис. 9. То же для $V(b)$ и $\frac{d\Theta}{dt}$

§ 7. Выводы

Таким образом, предложенный метод численного интегрирования в проективных переменных математически более удобен, нежели стандартный метод временного интегрирования уравнений в декартовой системе.

Он позволяет также произвести численно качественный анализ рассматриваемой динамической системы с тремя степенями свободы или ее аналога с целью построения ее фазового портрета и детального изучения переменной диссипации [3].

Что же касается прикладного значения, то предложенная система уравнений (3.6) может быть взята за основу альтернативной модели динамики как спортивного, так и боевого снаряда, после уточнения и детализации законов для аэродинамических сил и пар — модели, которую можно использовать при разработке соответствующих баллистических калькуляторов для лука, арбалета, артиллерийских орудий и др., а также для конструирования и совершенствования их снарядов. Также, учитывая неудачное выступление российской стрелковой сборной на Олимпийских играх 2012 г. в Лондоне, модель может быть применена для анализа траекторий использованных на соревнованиях пуль с целью выяснения возможных объективных причин неудач и для нахождения путей их устранения.

Список литературы

1. Rheingans W.R. Exterior and interior ballistics of bows and arrows // Review. Archery Review. March and April, 1936. A.T.S. P. 236 ff. URL: <http://home.att.net/sajackson/ArcheryPhysics.html>
2. Gkritzapis D.N., Margaris D.P., Panagiotopoulos E.E. et al. Prediction of the impact point for spin and fin stabilized projectiles // WSEAS transactions on information science and applications. Iss. 12. Vol. 5. Dec. 2008. P. 1667–1676.
3. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.
4. Чистяков В.В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 3. С. 265–277
5. Чистяков В.В. Интегрирование уравнений свободного движения тяжелой точки в среде с вертикальным градиентом плотности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 120–132.

6. Чистяков В.В. Численно-аналитическое интегрирование уравнений свободного движения гиростабилизированного тела вблизи звукового пика показателя степенного сопротивления // XLVII Всерос. конф. по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники (к 100-летию профессора Я.П. Терлецкого): тез. докл. М.: РУДН, 2012. С. 141–144.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 478 с.
8. McCoy R.L. Modern exterior ballistics: the launch and flight dynamics of symmetric projectiles, 1999, Schiffer Publishing Ltd. 454 p.
9. Коновалов А.А., Николаев Ю.В. Внешняя баллистика. М.: ЦНИИ информации, 1979. 228 с.

Поступила в редакцию 01.02.2013

V. V. Chistyakov

On one way of integrating the equations of a finned body projectile motion in resistive medium

An alternative way is suggested for integrating in projective variables the equations of free resistive planar motion of a symmetrical body affected by drag and lift forces along with static and damping momenta all above being quadratic in speed. This method diminishes the dimensionality of dynamical ODE system on one unit and may eliminate transcendent variables. There were obtained at different parameters various solutions responding to aperiodic self-oscillations of the attack angle value, as well as its quasi-stabilization at some positive level.

Keywords: projectile planar motion, lift power, quadratic drag force, static/damping momenta, non-transcendent variables, angle of attack, stabilization, auto oscillations.

Mathematical Subject Classifications: 34B15, 34C15, 70E15, 70K75

Чистяков Виктор Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра электрификации, Ярославская государственная сельскохозяйственная академия, 150042, Россия, Ярославль, Тутаевское шоссе, 58. E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

Chistyakov Viktor Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Yaroslavl State Academy of Agriculture, Tutaevskoe sh., 58, Yaroslavl, 150042, Russia. E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru