УДК 517.958: 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье рассматривается дискретный оператор Шрёдингера на графе с вершинами на двух пересекающихся прямых, возмущенный убывающим потенциалом. Исследуются спектральные свойства этого оператора. Исследуется задача рассеяния для данного оператора в случае малого потенциала, а также в случае, когда малы как потенциал, так и скорость квантовой частицы. Получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы во всех возможных направлениях. Кроме того, исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. Описана картина рассеяния. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения вблизи граничных точек подзон (это отвечает малым скоростям квантовой частицы) в случае малых потенциалов. Рассматривается одночастичный дискретный оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом, возмущенным функцией, периодической по двум переменным и экспоненциально убывающей по третьей. Исследуется задача рассеяния для данного оператора вблизи точки экстремума по третьей координате квазиимпульса некоторого собственного значения оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом в ячейке, то есть для малой перпендикулярной составляющей угла падения частицы на потенциальный барьер. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения.

Ключевые слова: разностное уравнение Шрёдингера, резонанс, собственное значение, уравнение Липпмана–Швингера, рассеяние, вероятности прохождения и отражения.

Введение

Работа посвящена исследованию спектральных свойств, а также рассеяния для некоторых разновидностей одночастичного уравнения Шрёдингера, возникающих в квантовой теории твердого тела. При этом рассматривается конечно-разностное приближение, но можно также считать, что физические модели рассматриваются в приближении сильной связи, поскольку оба приближения с математической точки зрения приводят к похожим разностным уравнениям.

Важность математического исследования уравнения Шрёдингера в разностном подходе (или в приближении сильной связи) объясняется, во-первых, значительно возросшей в последние 20–30 лет популярностью такого подхода в физической литературе, относящейся к наноразмерным устройствам — основе будущей микроэлектроники (см., например, [2–5]). (Заметим, что классическая теория рассеяния для уравнения Шрёдингера, основанная на интегральном (матричном) уравнении Липпмана–Швингера, в настоящее время особенно актуальна для данных физических приложений, поскольку вероятность прохождения оказывается пропорциональной электронной проводимости в квантовой проволоке (см. [1]).) Во-вторых, это связано с тем, что, несмотря на физическую актуальность, математических работ, исследующих данные модели, сравнительно немного и относятся они, как правило, к решеткам $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$. Между тем математические модели в этой области даже в одномерном случае (на графе) имеют достаточно интересные и необычные свойства.

Отметим некоторые математические работы, близкие по содержанию к теме статьи.

В статье [6] рассматривается двумерная модель периодического волновода с дискретным неоднородным оператором Лапласа. Доказано существование квазиуровней (мод) и решения уравнения Липпмана–Швингера. Обсуждаются, на основе численных расчетов, особенности рассеяния вблизи квазиуровней.

В статье [7] рассмотрен разностный оператор Шрёдингера на графе, полученный из обычного оператора Шрёдингера электрона в системе, состоящей из квантовой проволоки и квантовой точки. Изучаются существование и поведение в зависимости от малой константы связи собственных значений и резонансов, а также задача рассеяния для малых потенциалов.

Автор работы [8] рассматривает систему, состоящую из конечной цепочки атомов (бильярда), которая присоединена (параллельно или последовательно) к бесконечной цепочке. Исследовано поведение матрицы рассеяния вблизи резонанса в случае слабой связи бильярда с бесконечной цепочкой.

В статье [9] рассматривается семейство дискретных операторов Шрёдингера $H(k)$, полученных из двухчастичного оператора, где k — двухчастичный квазиимпульс. При определенных условиях для размерностей 1, 2 доказано, что если нуль является квазиуровнем оператора $H(0)$, то операторы $H(k)$ имеют собственное значение левее существенного спектра.

В статье [10] различными способами получены формулы для функции Грина некоторых разновидностей разностного оператора Лапласа.

В [11] показано, что расстояние между собственными значениями дискретного одномерного оператора Шрёдингера для конечной цепочки с граничными условиями Дирихле или Неймана отделено от нуля равномерно по длине цепочки (получена явная оценка снизу). В частности, у спектров таких операторов нет вырожденных собственных значений.

Статья [12] посвящена описанию существенных спектров, а также оценкам убывания собственных функций на бесконечности разностных аналогов операторов Шрёдингера и Дирака.

В статье [13] строится общая теория самосопряженного дискретного оператора Лапласа на графе, при этом основные результаты получены для графов-деревьев определенного вида.

В статье [14] изучается поведение на бесконечности решений одномерного разностного уравнения Шрёдингера с потенциалом, который в некотором смысле убывает на бесконечности. Кроме того, в статье представлен дискретный аналог метода ВКБ.

В данной работе исследуются собственные значения и резонансы, а также изучены задачи рассеяния для разностного уравнения Шрёдингера с потенциалами, описывающими электрон в квантовых проволоках, в квантовом волноводе и в периодической слоистой структуре.

Перейдем к подробному обзору содержания работы.

Обозначим через $\mathcal{G}$ объединение двух «целочисленных» координатных прямых, то есть

$$\mathcal{G} = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}),$$

а через $l^2(X)$, где $X \subset \mathbb{Z}^2$, — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на X со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{l^2(X)} = \sum_{(n,m)\in X} \varphi(n,m)\overline{\psi(n,m)}.$$

В первых шести параграфах работы рассматривается разностный (дискретный) оператор Шрёдингера $\mathcal{H}_0$, действующий в $l^2(\mathcal{G})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_0\psi)(0,0) &= \psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1), \\ (\mathcal{H}_0\psi)(n,0) &= \psi(n+1,0) + \psi(n-1,0), \quad n \neq 0, \\ (\mathcal{H}_0\psi)(0,m) &= \psi(0,m+1) + \psi(0,m-1), \quad m \neq 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Оператор $\mathcal{H}_0$ является гамильтонианом (оператором энергии) электрона вблизи пересечения двух одномерных квантовых проволок. Подобные структуры часто встречаются в физической литературе (см., например, [2]). Близкие модели исследованы в работах [7,8]. Уравнение Шрёдингера рассмотрено для двух различных классов убывающих на бесконечности потенциалов, при этом изучаются спектр и вероятности прохождения квантовой частицы в возможных направлениях движения.

В первом параграфе приводятся определения и утверждения, наиболее часто используемые в работе.

Резольвенту оператора $\mathcal{H}_0$ обозначим через $\mathcal{R}_0(\lambda) = (\mathcal{H}_0 - \lambda I)^{-1}$ (в дальнейшем, следуя [17], для краткости опускаем единичный оператор).

Во втором параграфе найден вид $\mathcal{R}_0(\lambda)$, исследованы существенный и дискретный спектры оператора $\mathcal{H}_0$.

Т е о р е м а 2.1. *Существенный спектр оператора* $\mathcal{H}_0$ *совпадает с отрезком* $[-2,2]$.

Введем в рассмотрение оператор $H_{01}: l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$, действующий по правилу

$$\big(H_{01}\varphi\big)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Резольвенту оператора H_{01} обозначим $R_{01}(\lambda) = (H_{01} - \lambda)^{-1}$. Ядро резольвенты, вообще говоря, продолженное по параметру λ на соответствующую риманову поверхность M, будем называть функцией Грина оператора H_{01} и обозначать как

$$G_{01}(\lambda, n-m) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|n-m|}.$$

Поверхность M получена склейкой двух экземпляров комплексной плоскости вдоль интервала $(-2,2)$; при этом $[-2,2]$ является существенным спектром оператора H_{01} (см. [15]).

В §§ 3–5 рассматривается оператор Шрёдингера $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V}$ с малым параметром $\varepsilon > 0$; здесь $\mathcal{V}$ — оператор умножения на вещественную функцию $\mathcal{V}(n,m) \neq 0$, удовлетворяющую условиям

$$|\mathcal{V}(n,0)| \leqslant \beta e^{-\alpha|n|}, \quad |\mathcal{V}(0,m)| \leqslant \beta e^{-\alpha|m|}, \quad n,m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha,\beta > 0. \tag{0.2}$$

В дальнейшем функции, удовлетворяющие оценкам такого рода, будем называть экспоненциально убывающими. Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ является гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок, при этом $\mathcal{V}$ описывает влияние примесей.

Уравнение Шрёдингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет вид

$$(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V})\psi = \lambda\psi. \tag{0.3}$$

Спектр и существенный спектр оператора A обозначим как $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ соответственно.

Уравнение (0.3), рассматриваемое в классе $l^2(\mathcal{G})$, для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$ можно записать в виде

$$\psi = -\mathcal{R}_0(\lambda)\mathcal{V}\psi. \tag{0.4}$$

Перейдем к новой неизвестной функции $\varphi = \sqrt{|\mathcal{V}|}\psi$ и положим $\sqrt{\mathcal{V}} = \sqrt{|\mathcal{V}|}\mathrm{sgn}\mathcal{V}$ (только для $\mathcal{V}$). Тогда уравнение (0.4) можно переписать в виде

$$\varphi = -\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\varphi \tag{0.5}$$

и, продолжая оператор $-\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$ на двулистную риманову поверхность M функции Грина оператора $\mathcal{H}_0$ (ядра резольвенты $\mathcal{R}_0(\lambda)$) (см. ниже), рассматривать его как оператор в $l^2(\mathcal{G})$ для $\lambda \in M$.

О п р е д е л е н и е 0.1 (ср. [26]). Число λ, принадлежащее второму (так называемому «нефизическому») листу римановой поверхности M, будем называть *резонансом* оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, если существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\mathcal{G})$ уравнения (0.5).

О п р е д е л е н и е 0.2 (ср. [27]). *Квазиуровнем* оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ будем называть его собственное значение или резонанс.

В случае когда λ принадлежит второму листу римановой поверхности M, ненулевые решения ψ уравнения (0.4) (соответствующие решению $\varphi \in l^2(\mathcal{G})$ уравнения (0.5)), вообще говоря, экспоненциально возрастают.

В третьем параграфе работы найден критерий существования квазиуровня оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Кроме того, в этом параграфе исследовано наличие квазиуровней в окрестности нуля для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Для произвольной функции $\varphi(n,m)$, определенной на $\mathcal{G}$, будем пользоваться обозначениями

$$\begin{gathered} f(\varphi) = f(\lambda,\varphi) = \left(R_{01}(\lambda)\varphi\right)(1) + \left(R_{01}(\lambda)\varphi\right)(-1), \\ \varphi_1(n) = \varphi(n,0), \quad \varphi_2(m) = \varphi(0,m), \quad n,m \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{0.6}$$

Т е о р е м а 3.1. *Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ для всех достаточно малых ε не имеет ненулевых квазиуровней в окрестности нуля.*

В четвертом параграфе доказаны существование и единственность для решения модифицированного уравнения Липпмана–Швингера

$$\begin{cases} \varphi_1(n,\lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} - \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(n,\lambda) + \\ + \sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta) + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) - \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), \quad n\in\mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m,\lambda) = -\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_2|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2(m,\lambda) + \\ + \sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) - \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), \quad m\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{0.7}$$

при определенной взаимосвязи между λ и ε; получена асимпотическая формула этого решения.

В следующей теореме рассматривается случай малого потенциала и «медленной» квантовой частицы.

Т е о р е м а 4.1. *Предположим, что $k = A\varepsilon$ в случае знака «+» или $\tilde{k} = A\varepsilon$ в случае знака «−», где $\tilde{k} = -\pi - k$, $A \neq 0$ — вещественная константа. Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение $\varphi \in l^2(\mathcal{G})$ модифицированного уравнения Липпмана–Швингера* (0.7)*, имеющее вид*

$$\varphi_1(n,\varepsilon) = \sqrt{|\mathcal{V}_1(n)|}(\pm 1)^{n+1}(1+n-|n|)Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_2(m,\varepsilon) = \sqrt{|\mathcal{V}_2(m)|}(\pm 1)^{m+1}Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

В § 5 описана картина рассеяния для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, выписаны коэффициенты отражения и прохождения. Получены асимптотические формулы для этих коэффициентов в частном случае.

Обозначим через $P_2^{\pm}(\lambda)$ вероятности прохождения вдоль оси m вверх и вниз соответственно, через $P_1^{\pm}(\lambda)$ — вероятности прохождения вдоль оси n вправо и влево соответственно.

Положим

$$C^- = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+1}(1+j-|j|)\mathcal{V}_2(j) + \frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2j-2+|1-j|+|1+j|)(1+j-|j|)\mathcal{V}_1(j),$$

$$K^- = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+j-|j|)\mathcal{V}_2(j) + \frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j(2j-2+|1-j|+|1+j|)(1+j-|j|)\mathcal{V}_1(j).$$

Т е о р е м а 5.2. *В условиях теоремы* 4.1 *для λ, достаточно близких к точке* 2*, справедливы равенства*

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2C^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3);$$

для λ, достаточно близких к точке -2, равенства

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2K^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

В следующей теореме, в отличие от теоремы 5.2, потенциал мал, а k любое.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть $\lambda = 2\cos k$, $k \in (-\pi, 0)$, фиксировано. Тогда*

$$P_1^+(\lambda) = (1+E)^2 + B^2 + O(\varepsilon), \quad P_1^-(\lambda) = E^2 + B^2 + O(\varepsilon),$$

$$P_2^{\pm}(\lambda) = D^2 + B^2 + O(\varepsilon),$$

где

$$E = -\frac{2 + 2\cos 2k + \sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad B = \frac{\sin 2k(1+\cos 2k)}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad D = \frac{2\sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}.$$

В § 6 получены следующие результаты о квазиуровнях оператора $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$. Здесь $\mathcal{V}$ — это оператор умножения на функцию

$$\mathcal{V}(n,m) = \begin{cases} V_0(\delta_{n,N} + \delta_{n,-N}), & m = 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

при некотором натуральном $N > 1$. Потенциал $\mathcal{V}$ имеет ярко выраженный «резонансный» характер.

Теорема 6.1. 1) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ± 2 для значений V_0, достаточно близких к $\pm 1/N$, существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm = 2\cos k_\pm$ оператора $\mathcal{H}$, причем*

$$k_+ = i\Big(V_0 - \frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0 - \frac{1}{N}\Big),$$
$$k_- = -\pi - i\Big(V_0 + \frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0 + \frac{1}{N}\Big).$$

2) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ± 2 для значений V_0, достаточно близких к $\pm\dfrac{1}{N-1}$, существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm = 2\cos k_\pm$ оператора $\mathcal{H}$, причем*

$$k_+ = \frac{(N-1)^2 i}{(N-1)^2+1}\Big(V_0 - \frac{1}{N-1}\Big) + o\Big(V_0 - \frac{1}{N-1}\Big),$$
$$k_- = -\pi - \frac{(N-1)^2 i}{(N-1)^2+1}\Big(V_0 + \frac{1}{N-1}\Big) + o\Big(V_0 + \frac{1}{N-1}\Big).$$

Кроме того, в этом параграфе доказаны существование и единственность и найден вид решения уравнения Липпмана–Швингера для оператора $\mathcal{H}$ с «налетающей волной», распространяющейся вдоль $\mathbb{Z} \times \{0\}$, а также получен следующий результат.

Теорема 6.2. *В сколь угодно малой окрестности точки $\lambda_0 = 0$ для всех достаточно малых V_0 существует единственное решение λ уравнения $P_1^-(\lambda) = 0$, причем*

$$\lambda = O(V_0^3).$$

В §§ 7–9 исследуется двумерное разностное уравнение Шрёдингера в полосе, что отвечает электрону в квантовом волноводе, также являющееся моделью (более реалистичной) квантовой проволоки (ср. одномерные операторы из предыдущих параграфов). Здесь изучаются резонансы и собственные значения, возникающие, в случае малых потенциалов, вблизи особенностей невозмущенной функции Грина. Также рассматривается задача рассеяния для данного оператора. Получены простые формулы для прохождения (отражения) вблизи упомянутых выше особенностей.

Положим $\Gamma = \mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}^2$.

Введем в рассмотрение оператор $H_0 = (H_{01} \otimes 1) + (1 \otimes H_{02})$, действующий в $l^2(\Gamma)$. Оператор H_{01}, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$, определен выше. Оператор H_{02} действует в $l^2\big(\{1, \dots, N\}\big) \cong \mathbb{C}^N$ и определяется равенствами

$$\big(H_{02}\varphi\big)(m) = \varphi(m-1) + \varphi(m+1), \quad m = 2, \dots, N-1,$$
$$\big(H_{02}\varphi\big)(1) = \varphi(2), \quad \big(H_{02}\varphi\big)(N) = \varphi(N-1).$$

Последние два равенства означают наличие нулевых граничных условий для $m = 0, N$.

Положим $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $\varepsilon > 0$, а V является оператором умножения на вещественную функцию $V(n,m) \neq 0$, заданную на Γ и удовлетворяющую условию

$$|V(n,m)| \leqslant \beta e^{-\alpha|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \{1,\dots,N\}, \tag{0.8}$$

причем $\alpha > 0$.

В § 7 найден вид функции Грина оператора H_0.

Положим

$$\mu_j = \lambda - 2\cos\frac{\pi j m}{N+1}, \quad j = 1,\dots,N, \quad a = \sqrt{\frac{2}{N+1}}.$$

Л е м м а 7.2. *Имеет место формула*

$$G_0(n,m,n',m',\lambda) = \sum_{j=1}^{N} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) G_{01}(n-n',\mu_j),$$

где

$$\lambda \notin \bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big] = \Big[-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big].$$

Т е о р е м а 7.2. *Спектр оператора H_0 имеет вид*

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{j\pi}{N+1}, 2+2\cos\frac{j\pi}{N+1}\Big] = \Big[-2+2\cos\frac{N\pi}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big].$$

§ 8 посвящен изучению спектральных свойств оператора H_ε.

Т е о р е м а 8.1. *Справедливо равенство $\sigma_{ess}(H_\varepsilon) = \sigma(H_0)$.*

Т е о р е м а 8.2. *Предположим, что для некоторого $j \in \{1,\dots,N\}$*

$$v_j^\pm = \sum_{(n',m')\in\Gamma^2} (\pm 1)^{n'} \sin^2\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) V(n',m') \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точек $\lambda_{j0}^\pm = \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственный квазиуровень $\lambda_j^\pm = \lambda_j^\pm(\varepsilon)$ оператора H_ε, аналитически зависящий от ε, для которого справедлива формула

$$\lambda_j^\pm(\varepsilon) = \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \pm \left(\frac{\varepsilon v_j^\pm}{N+1}\right)^2 + O(\varepsilon^4).$$

В § 9 описана картина рассеяния, изучен характер рассеяния вблизи особенностей невозмущенной функции Грина для малых потенциалов.

Положим

$$\sin k_j = -\sqrt{1-(\mu_j/2)^2}, \quad j = 1,\dots,N.$$

В окрестности точки λ_0 рассмотрим уравнение Липпмана–Швингера

$$\psi(n,m,\lambda) = \psi_0(n,m,\lambda) - \varepsilon \sum_{(n',m')\in\Gamma} G_0(n-n',m,m',\lambda) V(n',m') \psi(n',m',\lambda), \tag{0.9}$$

где «налетающая волна» (записанная для переменной k_{j_0}) имеет вид

$$\psi_0(n,m,\lambda) = a\sin\Bigl(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Bigr)e^{ink_{j_0}} \tag{0.10}$$

и удовлетворяет уравнению $H_0\psi_0 = \lambda\psi_0$.

Положим

$$A_j^{\pm}(\lambda) = -\frac{\varepsilon a}{2i\sin k_j}\sum_{(n',m')\in\Gamma}\sin\Bigl(\frac{\pi j m'}{N+1}\Bigr)e^{\mp ik_j n'}V(n',m')\psi(n',m',\lambda). \tag{0.11}$$

Будем предполагать, что

$$\lambda \neq \cos\frac{\pi j}{N+1} + \cos\frac{\pi j'}{N+1}, \quad j,j' = 1,\ldots,N. \tag{0.12}$$

Т е о р е м а 9.1. *Пусть выполнено* (0.12). *Тогда для вероятностей прохождения P_+ и отражения $P_- = 1 - P_+$ в точке λ_0 справедливы формулы*

$$\begin{gathered}
P_+ = \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)}\Bigl|\delta_{jj_0} + A_j^+(\lambda_0)\Bigr|^2\sqrt{\frac{4-\Bigl(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Bigr)^2}{4-\Bigl(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Bigr)^2}},\\
P_- = \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)}\Bigl|A_j^-(\lambda_0)\Bigr|^2\sqrt{\frac{4-\Bigl(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Bigr)^2}{4-\Bigl(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Bigr)^2}},
\end{gathered} \tag{0.13}$$

где $A_j^{\pm}(\lambda)$ определяются равенством (0.11).

Л е м м а 9.2. *Предположим, что для j_0 из* (0.10) *и всех достаточно малых ε справедливо равенство $k_{j_0} = \alpha\varepsilon$ в случае знака «+» или $\widetilde{k}_{j_0} = \alpha\varepsilon$ в случае знака «−», где $\widetilde{k}_{j_0} = -\pi - k_{j_0}$, $\alpha \neq 0$ — вещественная константа. Тогда для решения ψ уравнения Липпмана–Швингера* (0.9) *имеет место равенство*

$$\psi(n,m,\lambda) = \Bigl(1 - \frac{(\pm1)^n a^2 v_{j_0}^{\pm}}{2i\alpha + a^2 v_{j_0}^{+}}\Bigr)a\sin\Bigl(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Bigr) + O(\varepsilon),$$

где

$$v_{j_0}^{\pm} = \sum_{(n,m)\in\Gamma}(\pm1)^n V(n,m)\sin^2\Bigl(\frac{\pi j m}{N+1}\Bigr).$$

Т е о р е м а 9.2. *В условиях леммы* 9.2 *справедливо равенство* $P_- = \dfrac{a^4\Bigl(v_{j_0}^{\pm}\Bigr)^2}{4\alpha^2 + a^4\Bigl(v_{j_0}^{+}\Bigr)^2} + O(\varepsilon)$.

В §§ 10–12 изучается рассеяние для уравнения Шрёдингера на трехмерной решетке с возмущенным периодическим потенциалом, отвечающим бесконечному кристаллу с внедренным плоским слоем. В частности, для малых потенциалов слоя и одновременно малых перпендикулярных по отношению к слою компонент скорости налетающей «блоховской» частицы получены формулы прохождения (отражения), имеющие в своем составе скорость частицы и интеграл по ячейке от произведения квадрата модуля блоховской волновой функции и потенциала слоя.

Рассмотрим оператор Шрёдингера вида

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}(n) + \varepsilon\mathbb{W}(n), \quad n = (n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3,$$

действующий в $l^2(\mathbb{Z}^3)$. Здесь $\mathbb{H}_0$ действует по формуле

$$(\mathbb{H}_0\psi)(n) = \psi(n_1+1,n_2,n_3) + \psi(n_1-1,n_2,n_3) + \psi(n_1,n_2+1,n_3) + \\ + \psi(n_1,n_2-1,n_3) + \psi(n_1,n_2,n_3+1) + \psi(n_1,n_2,n_3-1),$$

$\mathbb{V}(n)$ — вещественный периодический потенциал по всем переменным n_j, $j = 1,2,3$, с периодом $T \geqslant 1$; $\mathbb{W}(n)$ — вещественный периодический по переменным n_1, n_2 с периодом T ненулевой потенциал, удовлетворяющий оценке

$$|\mathbb{W}(n)| \leqslant Ce^{-\alpha|n_3|}, \quad \alpha > 0; \tag{0.14}$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр. Оператор $\mathbb{H}$ представляет собой гамильтониан электрона в конечно-разностном приближении в периодической слоистой структуре.

Через $l^2(A) \otimes L^2(B)$, где $A \subset \mathbb{Z}^n$, B — измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, будем обозначать гильбертово пространство измеримых по x функций $\varphi(n,x)$, где $(n,x) \in A \times B$, таких, что

$$\sum_{n\in A} \int_B |\varphi(n,x)|^2 dx < \infty,$$

с обычным скалярным произведением.

В § 10 приведены вспомогательные конструкции и утверждения.

Для исследования оператора $\mathbb{H}$ потребуется унитарный оператор

$$U : l^2(\mathbb{Z}^3) \to l^2(\Omega_0) \otimes L^2(\Omega_0^*) \overset{def}{=} \int_{\Omega_0^*}^{\otimes} l^2(\Omega_0) dk,$$

$$\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^3) \mapsto (U\varphi)(n,k) = \widehat{\varphi}(n,k) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^3} e^{-iT(\nu,k)} \varphi(n+T\nu)\big|_{\Omega_0\times\Omega_0^*},$$

где $\Omega_0 = \{0,1,\ldots,T-1\}^3$ и $\Omega_0^* = [0, 2\pi/T)^3$ — ячейки в прямой и обратной решетках соответственно. Положим $\mathbb{H}_{\mathbb{V}} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}(n)$. Оператор $U\mathbb{H}_{\mathbb{V}}U^{-1}$ задается семейством операторов $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k) = \mathbb{H}_0(k) + \mathbb{V}$, действующих в $l^2(\Omega_0)$, где $k = (k_1,k_2,k_3) \in \Omega_0^*$ — квазиимпульс, а оператор $\mathbb{H}_0(k)$ имеет тот же вид, что и оператор $\mathbb{H}_0$, но с использованием свойства блоховости

$$\widehat{\varphi}(n+Tn_0,k) = e^{iT(n_0,k)}\widehat{\varphi}(n,k)$$

в случае $n_j \pm 1 \notin \{0,\ldots,T-1\}$, $j = 1,2,3$. При этом говорят, что оператор $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ разложен в прямом интеграле пространств $\int_{\Omega_0^*}^{\otimes} l^2(\Omega_0)dk$.

Для исследования оператора $\mathbb{H}$ потребуется также унитарный оператор

$$U_{\|} : l^2(\mathbb{Z}^3) \to l^2(\Omega) \otimes L^2(\Omega^*) \overset{def}{=} \int_{\Omega^*}^{\otimes} l^2(\Omega) dk_{\|},$$

$$*\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^3) \mapsto (U_{\|}\varphi)(n,k_{\|}) = \tilde{\varphi}(n,k_{\|}) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2} e^{-iT(\mu,k_{\|})} \varphi(n+T(\mu,0))\big|_{\Omega\times\Omega^*},$$

где $\Omega = \{0,1,\ldots,T-1\}^2 \times \mathbb{Z}$, $\Omega^* = [0,2\pi/T)^2$, $k_{\|} = (k_1,k_2)$. Свойство блоховости здесь имеет вид

$$\tilde{\varphi}(n+T(n_{0\|},0),k_{\|}) = e^{iT(n_{0\|},k_{\|})}\tilde{\varphi}(n,k_{\|}).$$

Оба оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ и $\mathbb{H}$ могут быть разложены в прямом интеграле пространств $\int_{\Omega^*}^{\otimes} l^2(\Omega)dk_{\|}$ в семейства операторов $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_{\|})$ и $\mathbb{H}(k_{\|})$.

Пусть $\lambda_0 = \lambda_{m_0}(k_0)$, где $k_0 = (k_{10},k_{20},k_{30})$ — невырожденное собственное значение оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_0)$, отвечающее нормированному собственному вектору $\psi_{m_0}(n,k_0)$. В дальнейшем предполагается, что

$$\partial\lambda_{m_0}(k_0)/\partial k_3 = 0, \quad \partial^2\lambda_{m_0}(k_0)/\partial k_3^2 \neq 0.$$

Уравнение $\partial\lambda_{m_0}(k)/\partial k_3 = 0$ задает в окрестности точки k_0 поверхность, описываемую аналитической функцией $k_3^{(0)} = k_3^{(0)}(k_\|)$, где $k_\|$ принадлежит некоторой окрестности точки $k_{0\|} = (k_{10}, k_{20})$.

Уравнение $\lambda_{m_0}(k) = \lambda$, рассматриваемое относительно k_3, имеет для $k_\|$ из окрестности точки $k_{0\|}$ ровно два решения $k_{3j} = k_{3j}(k_\|, \lambda)$, $j = 1, 2$, аналитически зависящие от $k_\|, \lambda$ там, где $k_{31} \neq k_{32}$, и сливающиеся, если $k = k_0$. Положим $\xi_j = k_{3j} - k_3^{(0)}(k_\|)$, $j = 1, 2$.

В § 11 рассмотрено уравнение Липпмана–Швингера в $l^2(\mathbb{Z}^3)$, отвечающее оператору $\mathbb{H}$, имеющее вид

$$\psi(n) = \psi_{m_0}(n,k) - \varepsilon \sum_{n' \in \mathbb{Z}^3} \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \lambda + i0)\mathbb{W}(n')\psi(n'), \tag{0.15}$$

где $\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \lambda)$ — функция Грина оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ в $l^2(\mathbb{Z}^3)$, $\lambda = \lambda_{m_0}(k)$ принадлежит внутренности одной из зон (промежутков, образующих спектр оператора $\mathbb{H}$), причем выбираем $k_3 = k_{31}$ (см. выше). Положим

$$\delta_{per}(k_\|) \stackrel{def}{=} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} \delta(k_\| + \frac{2\pi}{T}\mu).$$

Применим к (0.15) оператор $U_\|$, тогда уравнение Липпмана–Швингера в ячейке Ω примет вид

$$\tilde{\psi}(n, \tilde{k}_\|) = \frac{2\pi}{T}\psi_{m_0}(n,k)\delta_{per}(k_\| - \tilde{k}_\|) - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \tilde{k}_\|, \lambda + i0)\mathbb{W}(n')\tilde{\psi}(n', \tilde{k}_\|), \tag{0.16}$$

где $\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k_\|, \lambda)$ — функция Грина оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_\|)$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\xi_1 = A\varepsilon, \quad A = \mathrm{const} \neq 0. \tag{0.17}$$

Л е м м а 11.1. *Предположим, что выполнено* (0.17). *Тогда для* $\tilde{k}_\|$ *из некоторой окрестности точки* $k_{0\|}$ *и достаточно малых* ε *существует единственное решение уравнения Липпмана–Швингера в ячейке* Ω (0.16) *вида*

$$\tilde{\psi}(n, \tilde{k}_\|) = \frac{2\pi}{T}\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_3^{(0)})) \left[\frac{iA\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2}{iA\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} + O(\varepsilon)\right]\delta_{per}(k_\| - \tilde{k}_\|),$$

где

$$\mathbb{W}_0 = T\big(\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_3^{(0)})), \mathbb{W}(n)\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_3^{(0)}))\big),$$

а величина $\sqrt{\mathbb{W}(n)}O(\varepsilon)$ *аналитически зависит от* $k_\|$, ε *как* $l^2(\Omega)$*-значная функция и удовлетворяет оценке*

$$\|\sqrt{\mathbb{W}(n)}O(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon, \quad C = \mathrm{const}.$$

В § 12 найдена асимптотическая формула для решения исходного уравнения Липпмана–Швингера (0.15), результат отражен в следующей лемме.

Л е м м а 12.1 *В условиях леммы* 11.1 *имеем равенства*

$$\psi(n) = a_+\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31})) + \eta_+(n) + O(\varepsilon), \quad n_3 \geqslant 0,$$
$$\psi(n) = \psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31})) + a_-\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{32})) + \eta_-(n) + O(\varepsilon), \quad n_3 < 0,$$

где

$$a_+ = \frac{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} = \frac{i\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3}{i\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3 - \varepsilon\mathbb{W}_0} + O(\varepsilon),$$
$$a_- = \frac{\mathbb{W}_0}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} = \frac{\varepsilon\mathbb{W}_0}{i\partial\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_{31}\big)/\partial k_3 - \varepsilon\mathbb{W}_0} + O(\varepsilon),$$

а функции $\eta_\pm(n) = \eta_\pm(n,k)$ удовлетворяют неравенству (10.1) *и аналитически зависят от k как $l^2(\Omega_\pm)$-значные функции, где $\Omega_+ = \Omega \cap \{n_3 \geqslant 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{n_3 < 0\}$.*

Также в этом параграфе описана картина рассеяния вблизи точки экстремума по третьей координате квазиимпульса собственного значения оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом в ячейке, то есть для малой перпендикулярной составляющей угла падения частицы на потенциальный барьер $\varepsilon\mathbb{W}$. Получены следующие простые формулы для вероятностей прохождения P_+ и отражения P_-:

$$P_+ = |a_+|^2 = \frac{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2}{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2 + \mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon) = \frac{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2}{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2 + \varepsilon^2\mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon),$$

$$P_- = |a_-|^2 = \frac{\mathbb{W}_0^2}{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2 + \mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2\mathbb{W}_0^2}{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2 + \varepsilon^2\mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon).$$

Автор выражает глубокую признательность д. ф.- м. н. Юрию Павловичу Чубурину за постановку задачи, руководство и всестороннюю помощь в ходе исследований.

§ 1. Предварительные сведения

Первые шесть параграфов посвящены изучению функции Грина оператора $\mathcal{H}_0$, действующего в $l^2(\mathcal{G})$, где

$$\mathcal{G} = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}),$$

следующим образом:

$$\begin{gathered}(\mathcal{H}_0\psi)(0,0) = \psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1),\\ (\mathcal{H}_0\psi)(n,0) = \psi(n+1,0) + \psi(n-1,0), \quad n \neq 0,\\ (\mathcal{H}_0\psi)(0,m) = \psi(0,m+1) + \psi(0,m-1), \quad m \neq 0.\end{gathered}$$

Оператор $\mathcal{H}_0$ является оператором энергии (гамильтонианом) электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок. Кроме того, в этих параграфах исследуются квазиуровни и рассеяние для двух разновидностей возмущенного оператора.

В данном параграфе приведены определения и вспомогательные утверждения, наиболее часто встречаемые в работе.

Через $D(A)$ обозначим область определения оператора A.

Определение 1.1 (см. [17, с. 130]). Пусть оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, самосопряжен. Оператор C, такой, что $D(A) \subset D(C)$, называется *относительно компактным* по отношению к A тогда и только тогда, когда оператор $C(A+i)^{-1}$ компактен.

Теорема 1.1 (см. [17, с. 130]). *Пусть A — самосопряженный оператор, и пусть C — его относительно компактное возмущение. Тогда $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+C)$.*

Определение 1.2 (см. [24, с. 140]). *Существенным спектром* самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется множество, состоящее из неизолированных точек спектра и собственных значений бесконечной кратности.

Теорема 1.2 (см. [15, с. 224], аналитическая теорема Фредгольма). *Пусть D — открытое связное подмножество в $\mathbb{C}$. Пусть $A : D \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — аналитическая операторнозначная функция, такая, что $A(z)$ — компактный оператор для каждого $z \in D$. Тогда либо*

a) $[I - A(z)]^{-1}$ не существует ни для какого $z \in D$,

либо

b) $[I - A(z)]^{-1}$ существует для всех $z \in D \setminus S$, где S — дискретное подмножество в D (то есть множество, не имеющее предельных точек в D). В этом случае операторнозначная функция $[I - A(z)]^{-1}$ мероморфна в D, аналитична в $D \setminus S$, ее вычеты в полюсах — операторы конечного ранга, и если $z \in S$, то уравнение $A(z)\psi = \psi$ имеет ненулевое решение в $\mathcal{H}$.

Обозначим множество всех наборов из n неотрицательных чисел $\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ через I_+^n.

Определение 1.3 (см. [15, с. 152]). Множество *быстро убывающих функций* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ есть множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых при всех $\alpha, \beta \in I_+^n$

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Теорема 1.3 (см. [16, с. 49]). *Пусть функция* $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *принадлежит* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — *такая функция, что* $\widehat{u}$ *имеет компактный носитель. Пусть* $\mathcal{Z}$ — *открытое множество, содержащее компактное множество* $\{\operatorname{grad} P(k) | k \in \operatorname{supp} \hat{u}\}$. *Положим*

$$u_t(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp[i(xk - tP(k))]\widehat{u}(k)dk.$$

Тогда для любого m *существует константа* c*, зависящая от* m*,* u *и* $\mathcal{Z}$*, такая, что*

$$|u_t(x)| \leqslant c(1 + |x| + |t|)^{-m}$$

для всех x*,* t*, для которых* x/t *не лежит в* $\mathcal{Z}$*.*

§ 2. Спектр и резольвента невозмущенного оператора для квантовых проволок

В этом параграфе найдены существенный и дискретный спектры оператора $\mathcal{H}_0$, а также вид резольвенты этого оператора.

Введем оператор $F : l^2(\mathcal{G}) \to L^2[-\pi, \pi]$ следующей формулой:

$$\begin{aligned}(F\psi)(x) = \widehat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(&\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \psi(2,0)e^{4ix} + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \\ &+ \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \ldots + \psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \\ &+ \psi(0,3)e^{5ix} + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \ldots\big),\end{aligned}$$

или

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{2.1}$$

где

$$a_{\pm(2n+1)} = \psi(0, \pm(n+1)), \quad a_{\pm 2n} = \psi(\pm n, 0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Лемма 2.1. *Оператор* F *унитарен.*

Доказательство. Покажем, что

$$\|\widehat{\psi}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \|\psi\|_{l^2(\mathcal{G})}$$

для всех $\psi \in l^2(\mathcal{G})$. Функции $\left\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L^2[-\pi, \pi]$. В силу равенства Парсеваля

$$\|\widehat{\psi}\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\Big(\widehat{\psi}, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\Big)\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \Big(\frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\Big)\Big|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \|\psi\|^2_{l^2(\mathcal{G})}.$$

Далее, отображение F сюръективно. Действительно, для каждого $\widehat{\psi} \in L^2[-\pi, \pi]$ найдется прообраз $\psi \in l^2(\mathcal{G})$, определенный с помощью равенства (2.1). □

Теорема 2.1. *Существенный спектр оператора* $\mathcal{H}_0$ *совпадает с отрезком* $[-2, 2]$.

Доказательство. Положим $\widehat{\mathcal{H}}_0 = F\mathcal{H}_0F^{-1}$. Тогда для каждой функции $\widehat{\psi} \in L^2[-\pi,\pi]$ имеем

$$\widehat{\mathcal{H}}_0\widehat{\psi}(x) = F\mathcal{H}_0F^{-1}\widehat{\psi}(x) = F\mathcal{H}_0\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[\psi(1,0)+\psi(-1,0)+\psi(0,1)+\psi(0,-1)+$$
$$+\big(\psi(0,0)+\psi(2,0)\big)e^{2ix}+\big(\psi(-2,0)+\psi(0,0)\big)e^{-2ix}+\big(\psi(1,0)+\psi(3,0)\big)e^{4ix}+$$
$$+\big(\psi(-3,0)+\psi(-1,0)\big)e^{-4ix}+\big(\psi(2,0)+\psi(4,0)\big)e^{6ix}+\big(\psi(-4,0)+\psi(-2,0)\big)e^{-6ix}+\ldots+$$
$$+\big(\psi(0,0)+\psi(0,2)\big)e^{ix}+\big(\psi(0,-2)+\psi(0,0)\big)e^{-ix}+\big(\psi(0,1)+\psi(0,3)\big)e^{3ix}+$$
$$+\big(\psi(0,-3)+\psi(0,-1)\big)e^{-3ix}+\big(\psi(0,2)+\psi(0,4)\big)e^{5ix}+\big(\psi(0,-4)+\psi(0,-2)\big)e^{-5ix}+\ldots\big]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[e^{2ix}\big(\psi(0,0)+\psi(1,0)e^{2ix}+\psi(-1,0)e^{-2ix}+\psi(2,0)e^{4ix}+\psi(-2,0)e^{-4ix}+$$
$$+\psi(3,0)e^{6ix}+\psi(-3,0)e^{-6ix}+\ldots\big)+e^{-2ix}\big(\psi(0,0)+\psi(1,0)e^{2ix}+\psi(-1,0)e^{-2ix}+$$
$$+\psi(2,0)e^{4ix}+\psi(-2,0)e^{-4ix}+\psi(3,0)e^{6ix}+\psi(-3,0)e^{-6ix}+\ldots\big)+e^{2ix}\big(\psi(0,1)e^{ix}+\psi(0,-1)e^{-ix}+$$
$$+\psi(0,2)e^{3ix}+\psi(0,-2)e^{-3ix}+\psi(0,3)e^{5ix}+\psi(0,-3)e^{-5ix}+\ldots\big)+$$
$$+e^{-2ix}\big(\psi(0,1)e^{ix}+\psi(0,-1)e^{-ix}+\psi(0,2)e^{3ix}+\psi(0,-2)e^{-3ix}+\psi(0,3)e^{5ix}+\psi(0,-3)e^{-5ix}+\ldots\big)+$$
$$+\psi(0,1)+\psi(0,-1)+\psi(0,0)e^{ix}+\psi(0,0)e^{-ix}-\psi(0,-1)e^{ix}-\psi(0,1)e^{-ix}\big]=$$
$$=2\cos 2x\cdot\widehat{\psi}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\psi(0,1)+\psi(0,-1)+\psi(0,0)e^{ix}+\psi(0,0)e^{-ix}-\psi(0,-1)e^{ix}-\psi(0,1)e^{-ix}\big).$$

Следовательно, $\widehat{\mathcal{H}}_0 = A + B$, где $A\widehat{\psi}(x) = 2\cos 2x\,\widehat{\psi}(x)$ и

$$B\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\psi(0,1)+\psi(0,-1)+\psi(0,0)e^{ix}+\psi(0,0)e^{-ix}-\psi(0,-1)e^{ix}-\psi(0,1)e^{-ix}\big)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\widehat{\psi}(t)\left(e^{-it}+e^{it}+e^{-ix}+e^{ix}-e^{it}e^{ix}-e^{-it}e^{-ix}\right)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\widehat{\psi}(t)\left(\cos t+\cos x-\cos(t+x)\right)\,dt.$$

Оператор B является конечномерным и, следовательно, компактным. В силу унитарной эквивалентности операторов $\mathcal{H}_0$ и $\widehat{\mathcal{H}}_0$ и теоремы об относительно компактных возмущениях (см. теорему 1.1) имеем

$$\sigma_{ess}(\mathcal{H}_0) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathcal{H}}_0) = \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [-2,2].$$

□

Лемма 2.2. *Из ограниченности и самосопряженности операторов A и B следуют те же свойства для оператора $\mathcal{H}_0$.*

Заметим, что функция

$$g(\lambda) = \lambda/2 - \sqrt{\big(\lambda/2\big)^2 - 1}$$

является обратной к функции Жуковского $w = (z + z^{-1})/2$ для $z = \lambda/2$. Риманова поверхность ν функции g двулистна, причем листы склеиваются вдоль интервала $(-2,2)$, а точки ± 2 являются точками ветвления.

Введем в рассмотрение оператор H_{01}, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(H_{01}\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Известно (см. [15]), что $\sigma(H_{01}) = [-2,2]$. Ядро $G_{01}(n,m,\lambda)$ резольвенты $R_{01}(\lambda) = (H_{01}-\lambda)^{-1}$ оператора H_{01} имеет вид (см. [25])

$$G_{01}(n,m,\lambda) = G_{01}(n-m,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|n-m|} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}g^{|n-m|}\left(\lambda/2\right). \quad (2.2)$$

Функция G_{01} аналитически продолжается по λ на двулистную риманову поверхность ν; при этом на первом листе G_{01} экспоненциально убывает при $|n-m|\to\infty$ и является на нем ядром резольвенты.

Для произвольной функции $\varphi(n,m)$, определенной на $\mathcal{G}$, будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} &f(\varphi) = f(\lambda,\varphi) = \left(R_{01}(\lambda)\varphi\right)(1) + \left(R_{01}(\lambda)\varphi\right)(-1), \\ &\varphi_1(n) = \varphi(n,0), \quad \varphi_2(m) = \varphi(0,m), \quad n,m\in\mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

при этом $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Л е м м а 2.3. *Резольвента $\mathcal{R}_0(\lambda)$ оператора $\mathcal{H}_0$ имеет вид*

$$\mathcal{R}_0(\lambda)\varphi(n,m) = \begin{cases} \left(R_{01}(\lambda)\varphi_1\right)(n) - \dfrac{f(\varphi_2)-f(\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}\left(R_{01}(\lambda)\delta\right)(n), \\ \hfill n\in\mathbb{Z},\ m=0, \\ \left(R_{01}(\lambda)\varphi_2\right)(m) - \dfrac{f(\varphi_1)-f(\varphi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}\left(R_{01}(\lambda)\delta\right)(m), \\ \hfill n=0,\ m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Резольвенту $\mathcal{R}_0(\lambda)$ ищем, решая уравнение

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)\psi = \varphi, \quad \varphi\in l^2(\mathcal{G}) \quad (2.4)$$

относительно ψ для $\lambda\notin[-2,2] = \sigma_{ess}(\mathcal{H}_0)$ (см. теорему 2.1). С учетом (0.1) уравнение (2.4) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \psi(n+1,0)+\psi(n-1,0)-\lambda\psi(n,0) = \varphi(n,0), \quad n\neq 0, \\ \psi(0,m+1)+\psi(0,m-1)-\lambda\psi(0,m) = \varphi(0,m), \quad m\neq 0, \\ \psi(1,0)+\psi(-1,0)+\psi(0,1)+\psi(0,-1)-\lambda\psi(0,0) = \varphi(0,0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Система (2.5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \big((H_{01}-\lambda)\psi_1\big)(n) = \varphi_1(n) - (\psi_2(1)+\psi_2(-1))\delta(n), \quad n\in\mathbb{Z}, \\ \big((H_{01}-\lambda)\psi_2\big)(m) = \varphi_2(m) - (\psi_1(1)+\psi_1(-1))\delta(m), \quad m\in\mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.6)$$

с условием $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Докажем, что если $\varphi\in l^2(\mathcal{G})$ (откуда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$), то данное условие выполняется автоматически. Действительно, при $n=m=0$ из (2.6) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(1)+\psi_1(-1)-\lambda\psi_1(0) = \varphi_1(0) - \left(\psi_2(1)+\psi_2(-1)\right), \\ \psi_2(1)+\psi_2(-1)-\lambda\psi_2(0) = \varphi_2(0) - \left(\psi_1(1)+\psi_1(-1)\right). \end{cases}$$

Отсюда в силу равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ имеем $\lambda\left(\psi_1(0)-\psi_2(0)\right) = 0$ и $\psi_1(0) = \psi_2(0)$.

Подействовав на обе части каждого из уравнений системы (2.6) оператором $R_{01}(\lambda)$, получим систему

$$\begin{cases} \psi_1(n) = \left(R_{01}(\lambda)\varphi_1\right)(n) - \left(\psi_2(1)+\psi_2(-1)\right)\left(R_{01}(\lambda)\delta\right)(n), \quad n\in\mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = \left(R_{01}(\lambda)\varphi_2\right)(m) - \left(\psi_1(1)+\psi_1(-1)\right)\left(R_{01}(\lambda)\delta\right)(m), \quad m\in\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из (2.7) находим линейную систему относительно сумм $\psi_1(1)+\psi_1(-1)$ и $\psi_2(1)+\psi_2(-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & f(\delta) \\ f(\delta) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(1)+\psi_1(-1) \\ \psi_2(1)+\psi_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi_1) \\ f(\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Если $d(\lambda) = 1 - f^2(\lambda, \delta) \neq 0$, то по формулам Крамера

$$\psi_1(1) + \psi_1(-1) = \frac{f(\varphi_1) - f(\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \tag{2.8}$$

$$\psi_2(1) + \psi_2(-1) = \frac{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}. \tag{2.9}$$

(Если $d(\lambda) = 0$, то $\psi_j(1) + \psi_j(-1)$, $j = 1, 2$, не определяются однозначно по φ_1, φ_2 и, следовательно, резольвента $\mathcal{R}_0(\lambda)$ не существует.) Из (2.7)–(2.9) следует, что $\mathcal{R}_0(\lambda)$ имеет вид, указанный в формулировке леммы. □

З а м е ч а н и е 1. Дискретный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ состоит из двух собственных значений $\pm 4/\sqrt{3}$ кратности единица. Действительно, резольвента оператора $\mathcal{H}_0$, как видно из доказательства леммы 2.3, вне существенного спектра имеет полюсы в таких точках λ, в которых

$$1 - f^2(\lambda, \delta) = 0. \tag{2.10}$$

В силу (2.2), (2.3)

$$\begin{gathered} f(\lambda, \delta) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|1-m|} \delta(m) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|-1-m|} \delta(m) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) получаем уравнения

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = 0, \qquad -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = -2.$$

Первое из них имеет корень $\lambda = 0$. Непосредственно проверяется, что для данного λ не существует собственных функций оператора $\mathcal{H}_0$ в классе $l^2(\mathcal{G})$. Второе уравнение имеет два корня $\lambda_\pm = \pm 4/\sqrt{3}$. Нетрудно проверить, что $\lambda_\pm$ являются собственными значениями кратности единица с соответствующими собственными функциями $\psi_\pm(n, m) = (1/\sqrt{3})^{|n|+|m|}$.

§ 3. Квазиуровни слабо возмущенного оператора для квантовых проволок

В данном параграфе доказано, что в окрестности нуля для малых ε нет ненулевых квазиуровней возмущенного оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ (это интересно тем, что возмущение $\varepsilon\mathcal{V}$ оставляет резонанс $\lambda = 0$ оператора $\mathcal{H}_0$ неподвижным). Кроме того, найден критерий существования квазиуровня оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V}$ с малым параметром $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{V}$ — оператор умножения на вещественную функцию $\mathcal{V}(n, m) \neq 0$, удовлетворяющую условиям

$$|\mathcal{V}(n, 0)| \leqslant Ce^{-\alpha|n|}, \quad |\mathcal{V}(0, m)| \leqslant Ce^{-\alpha|m|}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad C = \mathrm{const}. \tag{3.1}$$

Уравнение Шрёдингера $(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V})\psi = \lambda\psi$, рассматриваемое в классе $l^2(\mathcal{G})$, перепишем для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$ в виде

$$\psi = -\varepsilon\mathcal{R}_0(\lambda)\mathcal{V}\psi. \tag{3.2}$$

Введем обозначение $\sqrt{\mathcal{V}} = \sqrt{|\mathcal{V}|}\,\mathrm{sign}\,\mathcal{V}$ (только для $\sqrt{\mathcal{V}}$), тогда $\mathcal{V} = \sqrt{\mathcal{V}}\sqrt{|\mathcal{V}|}$. Сделаем в (3.2) замену, полагая $\varphi = \sqrt{|\mathcal{V}|}\psi$, тогда (3.2) примет вид

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\varphi. \tag{3.3}$$

Операторнозначная функция $\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$ аналитически продолжается в достаточно малую окрестность отрезка $[-2, 2]$ на каждом из листов римановой поверхности ν своей функцией Грина (кроме точек полюса), причем принимает значения в множестве операторов Гильберта–Шмидта. Это следует из вида резольвенты оператора $\mathcal{H}_0$ (см. лемму 2.3) и аналогичного результата для $\sqrt{|\mathcal{V}_j|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_j}$, $j = 1, 2$ (см. [25]).

Уравнение (3.3) будем решать в классе $l^2(\mathcal{G})$. Сделанная замена позволяет находить не только собственные значения (в этом случае $\psi \in l^2(\mathcal{G})$ и тем более $\varphi \in l^2(\mathcal{G})$), но и резонансы (см. ниже), когда ψ, вообще говоря, экспоненциально возрастает. При этом λ не должно совпадать с полюсами $\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$, то есть с точками 0 и $\pm 4/\sqrt{3}$ (см. замечание 1). Особенности в точках $\lambda = \pm 2$ формально присутствуют в выражении для $\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$, поскольку являются особенностями ядра $R_{01}(\lambda)$ (см. лемму 2.3), но, как нетрудно убедиться, являются устранимыми.

О п р е д е л е н и е 3.1 (ср. [26]). Число λ, принадлежащее второму (так называемому «нефизическому») листу римановой поверхности ν, будем называть *резонансом* оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, если существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\mathcal{G})$ уравнения (3.3).

Если решение существует на первом листе, причем $\lambda \notin [-2,2]$, то λ является собственным значением.

Определение резонанса можно сформулировать по-другому. Обозначим через $\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda)$ резольвенту оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. В силу резольвентного тождества имеем

$$\big(1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\big)^{-1}\big(\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\big) = \sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}, \tag{3.4}$$

откуда

$$\big(1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\big)^{-1} = 1 - \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}. \tag{3.5}$$

Вследствие компактности оператора $\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$ и аналитической теоремы Фредгольма (см. теорему 1.2) операторнозначная функция

$$\big(1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\big)^{-1}$$

мероморфна по λ и имеет полюс в точке λ_0 тогда и только тогда, когда

$$\dim\ker\big(1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\big) > 0.$$

Отсюда в силу (3.5) следует, что $\lambda \notin \{0, \pm 4/\sqrt{3}\}$ является резонансом тогда и только тогда, когда операторнозначная функция $\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_\varepsilon(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}$, или, что то же, функция Грина оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, имеет полюс на втором листе ν.

О п р е д е л е н и е 3.2 (см. [27]). Число $\lambda \in \nu$ называется *квазиуровнем* оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, если λ является резонансом или собственным значением оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

В частности, $\lambda = 0$ является резонансом оператора $\mathcal{H}_0$ (если считать, что точки отрезка $[-2,2]$ принадлежат обоим листам) — см. замечание 1.

Заметим, что функция ψ из равенства $\sqrt{|\mathcal{V}|}\psi = \varphi$ восстанавливается по известной функции φ, в том числе и для n, m таких, что $\mathcal{V}(n,m) = 0$, по формуле $\psi = -\varepsilon\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\varphi$. Из равенства $\psi = -\varepsilon\mathcal{R}_0(\lambda)\mathcal{V}\psi$, которое имеет смысл и для элемента $\psi \notin l^2(\mathcal{G})$ такого, что $\sqrt{|\mathcal{V}|}\psi \in l^2(\mathcal{G})$, следует равенство $(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V})\psi = \lambda\psi$. Предположим, что резонанс λ находится на втором листе в достаточно малой окрестности отрезка $[-2,2]$. При помощи леммы 2.3 и оценок функции Грина G_0, подобных сделанным в [25], нетрудно доказать неравенство $|\psi(n,m)| \leqslant Ce^{\delta(|n|+|m|)}$, где C и δ — положительные константы, причем при уменьшении окрестности $[-2,2]$ число δ становится как угодно малым. Если λ — собственное значение, то оценка принимает вид $|\psi(n,m)| \leqslant Ce^{-\delta(|n|+|m|)}$, где $C,\ \delta > 0$.

Пусть λ находится на втором листе. Для того чтобы выполнялось условие $\sqrt{|\mathcal{V}|}\psi \in l^2(\mathcal{G})$, естественно потребовать выполнение неравенства $\delta < \alpha$, где α взято из (3.1). При этом λ должно находиться достаточно близко к отрезку $[-2,2]$, в частности, величина $\operatorname{Im}\lambda$ должна быть малой. Это соответствует физическим требованиям, так как время жизни резонансного состояния должно быть достаточно велико, а оно, как известно из физических соображений (см. главу 13 [28]), обратно пропорционально $|\operatorname{Im}\lambda|$.

Положим $R_{\varepsilon\mathcal{V}_j}(\lambda) = (H_{01} + \varepsilon\mathcal{V}_j - \lambda)^{-1},\ j = 1,2.$

Л е м м а 3.1. *Точка $\lambda \in \nu$, такая, что $\lambda \neq \varepsilon\mathcal{V}_1(0)$ и $1 \neq f^2(\lambda,\delta)$, является квазиуровнем оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ для достаточно малых ε тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}\big(1 - f^2(\lambda,\delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{\mathcal{V}_1}\xi_1) f(\lambda,\delta)\big) \times \\ \times \big(1 - f^2(\lambda,\delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{\mathcal{V}_2}\xi_2) f(\lambda,\delta)\big) = \varepsilon^2 f(\lambda, \sqrt{\mathcal{V}_1}\xi_1) f(\lambda, \sqrt{\mathcal{V}_2}\xi_2),\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\xi_j = \xi_j(n,\lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_j|} R_{\varepsilon\mathcal{V}_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.3) запишем с помощью леммы 2.3 в виде системы

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = -\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\big(R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1 - \dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) - f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_{01}(\lambda)\delta\big)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = -\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_2|}\big(R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2 - \dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) - f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_{01}(\lambda)\delta\big)(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{3.7}$$

или для достаточно малых ε в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = \varepsilon\dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) - f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\big((1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1})^{-1}(\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\delta)\big)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = \varepsilon\dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) - f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\big((1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_2|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_2})^{-1}(\sqrt{|\mathcal{V}_2|}R_{01}(\lambda)\delta)\big)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.8}$$

При этом от решения φ_1, φ_2 системы (3.8) требуется выполнение равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Докажем, что в условиях леммы оно должно выполняться автоматически. После перехода обратно к функциям ψ_1, ψ_2 из (3.7) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(n) = -\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_1\psi_1(n) + \varepsilon\dfrac{f(\mathcal{V}_2\psi_2) - f(\mathcal{V}_1\psi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_{01}(\lambda)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = -\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_2\psi_2(m) + \varepsilon\dfrac{f(\mathcal{V}_1\psi_1) - f(\mathcal{V}_2\psi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_{01}(\lambda)\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{3.9}$$

откуда

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) = -\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1) - y f(\delta), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) = -\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2) - x f(\delta), \end{cases} \tag{3.10}$$

где

$$x = -\varepsilon\frac{f(\mathcal{V}_1\psi_1) - f(\mathcal{V}_2\psi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \quad y = -\varepsilon\frac{f(\mathcal{V}_2\psi_2) - f(\mathcal{V}_1\psi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \tag{3.11}$$

удовлетворяют системе (см. доказательство леммы 2.3)

$$\begin{cases} x + f(\delta) y = -\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1), \\ f(\delta) x + y = -\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2). \end{cases} \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.12) получаем равенства

$$x = \psi_1(1) + \psi_1(-1), \quad y = \psi_2(-1) + \psi_2(-1). \tag{3.13}$$

Применяя теперь к уравнениям (3.9) оператор $H_{01} - \lambda$ и пользуясь (3.11) и (3.13), приходим для $n = m = 0$ к системе

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) + \varepsilon\mathcal{V}_1(0)\psi_1(0) - \lambda\psi_1(0) = -\psi_2(1) - \psi_2(-1), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) + \varepsilon\mathcal{V}_2(0)\psi_2(0) - \lambda\psi_2(0) = -\psi_1(1) - \psi_1(-1). \end{cases}$$

Вследствие равенства $\mathcal{V}_1(0) = \mathcal{V}_2(0)$ получаем

$$(\varepsilon\mathcal{V}_1(0) - \lambda)\psi_1(0) = (\varepsilon\mathcal{V}_1(0) - \lambda)\psi_2(0).$$

В силу условия леммы $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, откуда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Вследствие (3.4) систему (3.8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = \varepsilon \dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2) - f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \big(\sqrt{|\mathcal{V}_1|} R_{\varepsilon\mathcal{V}_1}(\lambda)\delta\big)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = \varepsilon \dfrac{f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1) - f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \big(\sqrt{|\mathcal{V}_2|} R_{\varepsilon\mathcal{V}_2}(\lambda)\delta\big)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Положим $\xi_j(n) = \sqrt{|\mathcal{V}_j|} R_{\varepsilon\mathcal{V}_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1, 2$. Из (3.14) имеем

$$\varphi_j = C_j \xi_j, \quad j = 1, 2, \tag{3.15}$$

где C_j — константы. Заметим, что при малых ε векторы ξ_j близки к $\sqrt{|\mathcal{V}_j|} R_{01}(\lambda)\delta$ и потому отличны от нуля. Из (3.14), (3.15) получаем следующую систему относительно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)} \left(C_2 f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\xi_2) - C_1 f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\xi_1) f(\delta) \right), \\ C_2 = \dfrac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)} \left(C_1 f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\xi_1) - C_2 f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\xi_2) f(\delta) \right). \end{cases} \tag{3.16}$$

В условиях леммы ненулевое решение уравнения (3.3) существует тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение (C_1, C_2) системы (3.16), то есть когда определитель системы (3.16) равен нулю, что и означает выполнение (3.6). □

О п р е д е л е н и е 3.3. Назовем *геометрической кратностью* квазиуровня

$$\dim\ker(1 + \varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}).$$

З а м е ч а н и е 2. В условиях леммы 3.1 геометрическая кратность квазиуровня совпадает с размерностью пространства решений системы (3.16) и равна единице.

В дальнейшем (до конца § 3) будем предполагать, что $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = W$, тогда $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Т е о р е м а 3.1. *Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ для всех достаточно малых ε не имеет ненулевых квазиуровней в окрестности нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f^2(\lambda, \delta) \neq 1$. Предположим вначале, что $W(0) \neq 0$. Из (3.15) получаем (см. доказательство леммы 3.1), что необходимое для наличия квазиуровня равенство $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ выполнено тогда и только тогда, когда $C_1\xi(0) = C_2\xi(0)$. Поскольку для λ, близких к нулю, при $\varepsilon \to 0$

$$\xi(0) = \sqrt{|W(0)|}\big(R_{\varepsilon W}(\lambda)\delta\big)(0) \longrightarrow -\frac{\sqrt{|W(0)|}}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \neq 0,$$

то $C_1 = C_2 = C$. При этом $C \neq 0$ (иначе $\varphi = 0$ и квазиуровней нет). Следовательно, согласно (3.16), $f(\sqrt{W}\xi) \neq 0$ и

$$1 = \frac{\varepsilon f(\sqrt{W}\xi)}{1 - f^2(\delta)}(1 - f(\delta)),$$

откуда получаем уравнение

$$1 + f(\delta) = \frac{2\sqrt{\lambda^2 - 4} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = \varepsilon f(\sqrt{W}\xi),$$

которое при малых ε и λ, очевидно, не имеет решений.

Рассмотрим случай $W(0) = 0$. Тогда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ и условие $\lambda \neq \varepsilon W(0)$ в формулировке леммы 3.1 накладывать не нужно. Из леммы 3.1 следует, что $\lambda \in \nu$ является квазиуровнем H_ε, если λ удовлетворяет одному из уравнений

$$1 - f^2(\lambda, \delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi) f(\lambda, \delta) = \pm\varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi).$$

В случае знака «+» уравнение не имеет решений при малых ε и λ (см. выше). В случае знака «−» получаем уравнение

$$F(\lambda,\varepsilon)=0, \tag{3.17}$$

где

$$F(\lambda,\varepsilon)=1-f(\delta)+\varepsilon f(\sqrt{W}\xi)=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}}+\varepsilon f(\sqrt{W}\xi).$$

Функция $F(\lambda,\varepsilon)$ является аналитической в окрестности точки $(0,0)\in\mathbb{C}^2$ (для любого выбора знака корня $\sqrt{\lambda^2-4}$), причем

$$F(0,0)=0,\quad \frac{\partial F(0,0)}{\partial\lambda}=\pm\frac{1}{2i}\neq 0.$$

В силу теоремы о неявной функции (см. [29]), для любого выбора знака корня для всех достаточно малых ε существует единственное решение $\lambda=\lambda_\pm(\varepsilon)$ уравнения (3.17), причем $\lambda_\pm(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε.

Перепишем уравнение (3.17) в виде

$$\lambda=-\varepsilon\sqrt{\lambda^2-4}f(\sqrt{W}\xi)=\varepsilon\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(q^{|1+n|}+q^{|1-n|}\big)\big(\sqrt{W}\xi\big)(n), \tag{3.18}$$

где

$$q=q(\lambda)=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}.$$

Явно выписывая разные знаки у корня $\sqrt{\lambda^2-4}$, приведем необходимые в дальнейшем равенства:

$$\begin{gathered}
q^\alpha(\lambda)=\left(\frac{\lambda\mp\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^\alpha,\quad (q^\alpha(\lambda))'=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2-4}}q^\alpha(\lambda),\\
(q^\alpha(\lambda))''=\alpha\bigg(\pm\frac{\lambda q^\alpha(\lambda)}{(\lambda^2-4)\sqrt{\lambda^2-4}}+\frac{\alpha q^\alpha(\lambda)}{\lambda^2-4}\bigg),\\
(q^\alpha)(0)=(\mp i)^\alpha,\quad (q^\alpha)'(0)=\mp\frac{\alpha}{2i}(\mp i)^\alpha,\quad (q^\alpha)''(0)=-\frac{\alpha^2}{4}(\mp i)^\alpha,\\
q^{|1+n|}+q^{|1-n|}=\begin{cases}\mp 2i+\lambda\pm\dfrac{i\lambda^2}{4}+O(\lambda^4), & n=0,\\ \lambda q^{|n|}, & n\neq 0.\end{cases}
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Далее, преобразуем для малых λ и ε выражение

$$\begin{aligned}
(\sqrt{W}\xi)(n)&=\sqrt{W}\big(1+\varepsilon\sqrt{|W|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{W}\big)^{-1}\big(\sqrt{|W|}\mathcal{R}_0(\lambda)\delta\big)(n)=\\
&=(WR_0(\lambda)\delta)(n)-\varepsilon(WR_0(\lambda)W\mathcal{R}_0(\lambda)\delta)(n)+\varepsilon^2(W\mathcal{R}_0(\lambda)W\mathcal{R}_0(\lambda)W\mathcal{R}_0(\lambda)\delta)(n)+O(\varepsilon^3)=\\
&=\mp\frac{W(n)}{\sqrt{\lambda^2-4}}q^{|n|}-\frac{\varepsilon W(n)}{\lambda^2-4}\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{|n-m|+|m|}W(m)\mp\\
&\mp\frac{\varepsilon^2W(n)}{(\lambda^2-4)\sqrt{\lambda^2-4}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{|n-k|+|k-m|+|m|}W(k)W(m)+O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

В силу (3.18) $\lambda=O(\varepsilon)$, тогда из (3.18)–(3.20), а также из равенства $W(0)=0$ получаем следующее уравнение:

$$\lambda=\varepsilon\lambda\sum_{n\neq 0}q^{|n|}W(n)\bigg(\mp\frac{q^{|n|}}{\sqrt{\lambda^2-4}}-\frac{\varepsilon}{\lambda^2-4}\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{|n-m|+|m|}W(m)\bigg)+O(\varepsilon^3).$$

Очевидно, что оно не имеет решений, если $\lambda=\lambda(\varepsilon)\not\equiv 0$. □

З а м е ч а н и е 3. Обычно квазиуровни возмущенного оператора возникают как сдвиги полюсов резольвенты невозмущенного оператора под действием возмущения (см., например, [26]). Квазиуровнями (понимаемыми как полюса функции Грина) оператора $\mathcal{H}_0$ являются изолированные собственные значения $\lambda = \pm 4/\sqrt{3}$, поведение которых описывается обычной теорией возмущений, а также резонанс $\lambda = 0$. Таким образом, рассматриваемый в теореме 3.1 оператор имеет весьма необычное свойство: полюс в нуле функции Грина, несмотря на введение возмущающего потенциала, остается неподвижным.

§ 4. Уравнение Липпмана–Швингера для слабо возмущенного оператора для квантовых проволок

В этом параграфе доказаны существование и единственность решения уравнения Липпмана–Швингера, отвечающего оператору $\mathcal{H}_\varepsilon$, для малого параметра ε, получены асимптотические формулы для данного решения.

Пусть переменные k и λ связаны соотношениями

$$\cos k = \lambda/2, \quad \sin k = -\sqrt{1-(\lambda/2)^2}.$$

Кроме того, введем обозначения

$$\mathcal{V}(n,m) = \begin{cases} \mathcal{V}_1(n), & m=0, \\ \mathcal{V}_2(m), & n=0, \end{cases} \qquad \psi(n,m,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(n,\lambda), & m=0, \\ \psi_2(m,\lambda), & n=0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_0 \in (-2,2)$ и λ_0 не является квазиуровнем оператора H_{01}. В некоторой окрестности λ_0 рассмотрим уравнение Шрёдингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$:

$$(\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{V})\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in l^2(\mathcal{G}). \tag{4.1}$$

Перепишем (4.1) в виде системы

$$\begin{cases} \left((H_{01}-\lambda)\psi_1\right)(n,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda) - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \left((H_{01}-\lambda)\psi_2\right)(m,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda) - -(\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{4.2}$$

с условием $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda)$. Заметим, что при $n = m = 0$ из (4.2) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda) - \lambda\psi_1(0,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_1(0)\psi_1(0,\lambda) - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)), \\ \psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda) - \lambda\psi_2(0,\lambda) = -\varepsilon\mathcal{V}_2(0)\psi_2(0,\lambda) - (\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)). \end{cases}$$

Откуда $(\lambda - \varepsilon\mathcal{V}_1(0))\psi_1(0,\lambda) = (\lambda - \varepsilon\mathcal{V}_2(0))\psi_2(0,\lambda)$. Так как $\mathcal{V}_1(0) = \mathcal{V}_2(0)$, то для $\lambda \neq \varepsilon\mathcal{V}_1(0)$ получаем равенство $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda)$. Таким образом, данное условие для решений уравнения (4.2) выполняется автоматически.

Рассмотрим уравнение Липпмана–Швингера для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ с «налетающей волной», распространяющейся вдоль $\mathbb{Z} \times \{0\}$:

$$\begin{cases} \psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon R_{01}(\lambda+i0)\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda) - (\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda))R_{01}(\lambda+i0)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m,\lambda) = -\varepsilon R_{01}(\lambda+i0)\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda) - (\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda))R_{01}(\lambda+i0)\delta(m), & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{4.3}$$

(данное уравнение позволяет описать картину рассеяния для налетающего электрона (см. ниже)). В дальнейшем опускаем $+i0$; данному выбору знака отвечает $k \in (-\pi, 0)$. Действуя на каждое уравнение системы (4.3) оператором $(H_{01} - \lambda)$ и учитывая, что $(H_{01} - \lambda)e^{ikn} = 0$, получим, что решение уравнения Липпмана–Швингера (4.3) является решением уравнения Шрёдингера (4.2), а значит, $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda)$ для $\lambda \neq \varepsilon\mathcal{V}_1(0)$. Далее, из (4.3) видим, что величины $\psi_1(1,\lambda) + \psi_1(-1,\lambda)$ и $\psi_2(1,\lambda) + \psi_2(-1,\lambda)$ удовлетворяют линейной системе

$$\begin{cases} [\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)] + f(\delta)[\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)] = 2\cos k - \varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1), \\ f(\delta)[\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)] + [\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)] = -\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2). \end{cases}$$

По формулам Крамера имеем

$$\psi_1(1,\lambda)+\psi_1(-1,\lambda)=\frac{2\cos k-\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)+\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)},$$

$$\psi_2(1,\lambda)+\psi_2(-1,\lambda)=\frac{-2\cos k\cdot f(\delta)-\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)+\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}.$$

Таким образом, окончательно уравнение Липпмана–Швингера (4.3) принимает вид

$$\begin{cases}\psi_1(n,\lambda)=e^{ikn}-\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_1(n)\psi_1(n,\lambda)+\\ \qquad +\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)-\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), \quad n\in\mathbb{Z},\\ \psi_2(m,\lambda)=-\varepsilon R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_2(m)\psi_2(m,\lambda)+\\ \qquad +\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1)-\varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), \qquad m\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{4.4}$$

Перейдем в (4.4) к новым неизвестным функциям $\varphi_i=\sqrt{|\mathcal{V}_i|}\psi_i$, $i=1,2$ (для $\sqrt{\mathcal{V}_i}$ принимаем равенство $\sqrt{\mathcal{V}_i}=\sqrt{|\mathcal{V}_i|}\mathrm{sign}\mathcal{V}_i$). Домножив оба уравнения на $\sqrt{|\mathcal{V}_1|}$ и $\sqrt{|\mathcal{V}_2|}$ соответственно, получим

$$\begin{cases}\varphi_1(n,\lambda)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn}-\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(n,\lambda)+\\ +\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k\cdot f(\delta)+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)-\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), n\in\mathbb{Z},\\ \varphi_2(m,\lambda)=-\varepsilon\sqrt{|\mathcal{V}_2|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2(m,\lambda)+\\ +\sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k+\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)-\varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), \quad m\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{4.5}$$

Введем обозначения

$$\overline{\mathcal{V}}_1=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_1(j), \quad \overline{\mathcal{V}}_2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_2(j).$$

Условие $k=A\varepsilon$, наложенное в следующей теореме, означает, что для малых потенциалов рассматриваются малые импульсы (скорости) налетающих частиц; в этой ситуации малый потенциал существенно меняет картину рассеяния.

Т е о р е м а 4.1. *Предположим, что $k=A\varepsilon$ в случае знака «+» или $\tilde{k}=A\varepsilon$ в случае знака «−», где $\tilde{k}=-\pi-k$, $A\neq 0$ — вещественная константа. Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение $\varphi\in l^2(\mathcal{G})$ модифицированного уравнения Липпмана–Швингера* (4.5)*, имеющее вид*

$$\varphi_1(n,\varepsilon)=\sqrt{|\mathcal{V}_1(n)|}(\pm 1)^{n+1}(1+n-|n|)Ai\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

$$\varphi_2(m,\varepsilon)=\sqrt{|\mathcal{V}_2(m)|}(\pm 1)^{m+1}Ai\varepsilon+O(\varepsilon^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем несложные преобразования:

$$-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}R_{01}(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(n,\lambda)-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\frac{f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n)=$$

$$=-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\sum_{j\in\mathbb{Z}}G_{01}(\lambda,n-j)\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(j,\lambda)-$$

$$-\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(G_{01}(\lambda,1-j)+G_{01}(\lambda,1+j))\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1(j,\lambda)\cdot 2G_{01}(\lambda,1)}{1-4G_{01}^2(\lambda,1)}\times$$

$$\times G_{01}(\lambda,n)=\sqrt{|\mathcal{V}_1|}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Bigg[-G_{01}(\lambda,n-j)\sqrt{\mathcal{V}_1(j)}-$$

$$-\frac{2G_{01}(\lambda,1)G_{01}(\lambda,n)(G_{01}(\lambda,1-j)+G_{01}(\lambda,1+j))\sqrt{\mathcal{V}_1(j)}}{1-4G_{01}^2(\lambda,1)}\Bigg]\varphi_1(j,\lambda).$$

Обозначим через $L_i = L_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, оператор с ядром

$$l_i(\lambda, n, j) = -\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}G_{01}(\lambda, n-j)\sqrt{\mathcal{V}_i(j)} -$$
$$- \frac{2\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}G_{01}(\lambda, n)G_{01}(\lambda, 1)}{1 - 4G_{01}^2(\lambda, 1)} \left(G_{01}(\lambda, 1-j) + G_{01}(\lambda, 1+j)\right) \sqrt{\mathcal{V}_i(j)}.$$

Легко убедиться, что в условиях теоремы функции $l_i(\lambda, n, j)$ аналитичны по ε.

Систему (4.5) перепишем в виде

$$\begin{cases} (1 - \varepsilon L_1)\, \varphi_1(n, \lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + \sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k \cdot f(\delta) + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}\varphi_2)}{1 - f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ (1 - \varepsilon L_2)\, \varphi_2(m, \lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}\varphi_1)}{1 - f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Положим

$$\xi_1(n, \lambda) = (1 - \varepsilon L_1)\, \varphi_1(n, \lambda), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\xi_2(m, \lambda) = (1 - \varepsilon L_2)\, \varphi_2(m, \lambda), \quad m \in \mathbb{Z},$$

тогда из (4.6) имеем

$$\begin{cases} \xi_1(n, \lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + \sqrt{|\mathcal{V}_1|}\dfrac{2\cos k \cdot f(\delta) + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_2}(1 - \varepsilon L_2)^{-1}\xi_2)}{1 - f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \xi_2(m, \lambda) = \sqrt{|\mathcal{V}_2|}\dfrac{-2\cos k + \varepsilon f(\sqrt{\mathcal{V}_1}(1 - \varepsilon L_1)^{-1}\xi_1)}{1 - f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \xi_1(n, k) = \sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}, & n \in \mathbb{Z}, \\ \xi_2(m, k) = C_2\sqrt{|\mathcal{V}_2|}e^{ik|m|}, & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $C_1 = C_1(k)$ и $C_2 = C_2(k)$ не зависят от n и m.

Несмотря на экспоненциальное возрастание $G_{01}(\lambda, n-j)$ при $|n-j| \to \infty$, для малых k функции $l_i(\lambda, n, j)$, $i = 1, 2$, экспоненциально убывают за счет умножения слева и справа на $\sqrt{|\mathcal{V}_i(n)|}$ и $\sqrt{\mathcal{V}_i(j)}$ соответственно, поэтому $L_i(\lambda)$ определены и ограничены в $l^2(\mathbb{Z})$. Обратные операторы $(1 - \varepsilon L_i(\lambda))^{-1}$, $i = 1, 2$, существуют для малых значений параметра ε, если $\|\varepsilon L_i(\lambda)\| < 1$.

Далее, из (4.7), (4.8) получим

$$\begin{cases} C_1 = \varepsilon\dfrac{f\big(\sqrt{\mathcal{V}_2}(1 - \varepsilon L_2)^{-1}C_2\sqrt{|\mathcal{V}_2|}e^{ik|m|}\big)}{1 - f^2(\delta)} \cdot \dfrac{1}{2i\sin k} + \dfrac{2\cos k \cdot f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \cdot \dfrac{1}{2i\sin k}, \\ C_2 = \varepsilon\dfrac{f\big(\sqrt{\mathcal{V}_1}(1 - \varepsilon L_1)^{-1}\big(\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}\big)\big)}{1 - f^2(\delta)} \cdot \dfrac{1}{2i\sin k} - \dfrac{2\cos k}{1 - f^2(\delta)} \cdot \dfrac{1}{2i\sin k}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Заметим, что

$$f(\mathcal{V}_2 e^{ik|m|}) = \frac{1}{2i\sin k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(e^{ik|1-j|} + e^{ik|1+j|})\mathcal{V}_2(j)e^{ik|j|} =$$
$$= \frac{1}{2i\sin k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(e^{ik(|1-j|+|j|)} + e^{ik(|1+j|+|j|)})\mathcal{V}_2(j) = \frac{\overline{\mathcal{V}}_2}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}.$$

Далее, как нетрудно видеть

$$L_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} = O(1),$$
$$f\big(\sqrt{\mathcal{V}_1}(1 - \varepsilon L_1)^{-1}\big(\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ikn} + C_1\sqrt{|\mathcal{V}_1|}e^{ik|n|}\big)\big) = \frac{(1 + C_1)\overline{\mathcal{V}}_1}{i\sin k} + \frac{O(\varepsilon)}{2i\sin k}.$$

Таким образом, (4.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 + iA\varepsilon - \frac{\varepsilon C_2\overline{\mathcal{V}}_2}{2} + O(\varepsilon^2), \\ C_2 &= iA\varepsilon - \frac{\varepsilon(1+C_1)\overline{\mathcal{V}}_1}{2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_2}{2}C_2 = -1 + iA\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_1}{2}C_1 + C_2 = iA\varepsilon - \dfrac{\varepsilon\overline{\mathcal{V}}_1}{2} + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

По формулам Крамера легко получить

$$C_1 = -1 + iA\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad C_2 = iA\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

откуда

$$\varphi_1(n,\varepsilon) = \varphi_1(n,k) = (1-\varepsilon L_1)^{-1}\xi_1(n,k) = \xi_1(n,k) + O(\varepsilon^2) = \sqrt{|\mathcal{V}_1(n)|}(1+n-|n|)Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$
$$\varphi_2(m,\varepsilon) = \varphi_2(m,k) = (1-\varepsilon L_2)^{-1}\xi_2(n,k) = \xi_2(n,k) + O(\varepsilon^2) = \sqrt{|\mathcal{V}_2(m)|}Ai\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Асимптотическая формула для случая $k = -\pi - A\varepsilon$ доказывается аналогично, с использованием равенства

$$e^{ik\gamma} = (-1)^\gamma e^{-i\tilde{k}\gamma},$$

где $\tilde{k} = A\varepsilon$. □

§ 5. Нестационарная картина рассеяния для слабо возмущенного оператора

В этом параграфе описана картина рассеяния для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, выписаны коэффициенты отражения и прохождения. Получены асимптотические формулы для этих коэффициентов в частном случае.

Рассмотрим при $t \in \mathbb{R}$ нестационарное уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{01}\psi, \tag{5.1}$$

где $\psi = \psi(n,t)$ с условием в нуле

$$\psi(n,0) = \psi_0(n), \quad \psi_0 \in l^2(\mathbb{Z}), \tag{5.2}$$

принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}, l^2(\mathbb{Z}))$ ($C^1(\mathbb{R}, l^2(\mathbb{Z}))$ обозначает пространство непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций со значениями в $l^2(\mathbb{Z})$).

Введем преобразование Фурье $F : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2[-\pi,\pi]$ формулой

$$\widehat{\psi}(k) = (F\psi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi(n)e^{-ikn}.$$

Л е м м а 5.1. *Решение уравнения* (5.1) *с начальным условием* (5.2) *имеет вид*

$$\psi(n,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{\psi}_0(k)e^{ink}e^{-2it\cos k}dk. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подействовав преобразованием F на уравнение (5.1), получим

$$i\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t} = 2\cos k \cdot \widehat{\psi},$$

где $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}(k,t) \in L^2[-\pi,\pi]$. Отсюда, с учетом (5.2), имеем $\widehat{\psi}(k,t) = \widehat{\psi}_0(k)e^{-2i\cos k\cdot t}$ и, следовательно, (5.3). □

С л е д с т в и е 5.1. *В силу самосопряженности оператора* H_{01} (см., например, [15])

$$\|\psi(n,t)\| = \|\psi_0(n)\| = \|\widehat{\psi}_0(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначения

$$\eta_1^+(n,k) = -\varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,\lambda),$$

$$\eta_1^-(n,k) = -\varepsilon \sum_{j<n} \frac{e^{ik(n-j)} - e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,\lambda),$$

$$C_1(k) = \frac{2\cos k \cdot f(\delta) + \varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2) - \varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)},$$

$$A_1^\pm(k) = -\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\mp ikj}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,\lambda) + \frac{C_1(k)}{2i\sin k}.$$

Из первого уравнения (4.4) имеем

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{ik|n-j|}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k} = e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) -$$

$$- \varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k},$$

или

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} - \varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) -$$

$$- \varepsilon \sum_{j<n} \frac{e^{ik(n-j)} - e^{-ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1(j)\psi_1(j,\lambda) + C_1(k)\frac{e^{ik|n|}}{2i\sin k}.$$

Отсюда

$$\psi_1(n,\lambda) = e^{ikn} + A_1^\pm(k)e^{\pm ikn} + \eta_1^\pm(n,k) \tag{5.4}$$

(знаки «+» и «−» отвечают $n > 0$ и $n \leqslant 0$ соответственно). Рассуждая аналогично, получаем

$$\psi_2(m,\lambda) = A_2^\pm(k)e^{\pm ikm} + \eta_2^\pm(m,k), \tag{5.5}$$

где

$$\eta_2^-(m,k) = -\varepsilon \sum_{j<m} \frac{e^{ik(m-j)} - e^{-ik(m-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda),$$

$$\eta_2^+(m,k) = -\varepsilon \sum_{j>m} \frac{e^{-ik(m-j)} - e^{ik(m-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda),$$

$$C_2(k) = \frac{-2\cos k + \varepsilon f(\mathcal{V}_1\psi_1) - \varepsilon f(\mathcal{V}_2\psi_2) f(\delta)}{1 - f^2(\delta)},$$

$$A_2^\pm(k) = -\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\mp ikj}}{2i\sin k} \mathcal{V}_2\psi_2(j,\lambda) + \frac{C_2(k)}{2i\sin k}.$$

Определим функцию

$$\eta(n,m,k) = \begin{cases} \eta_1^+(n,k), & n > 0,\ m = 0, \\ \eta_1^-(n,k), & n \leqslant 0,\ m = 0, \\ \eta_2^+(m,k), & n = 0,\ m > 0, \\ \eta_2^-(m,k), & n = 0,\ m \leqslant 0. \end{cases}$$

Л е м м а 5.2. *Функция $\eta(n,m,k)$ является $l^2(\mathcal{G})$-значной аналитической функцией в окрестности точки $\lambda_0 = 2\cos k_0,\ k_0 \in [-\pi, 0]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\|\eta(n,m,k)\|^2_{l^2(\mathcal{G})} = \sum_{(n,m)\in\mathcal{G}} |\eta(n,m,k)|^2 = \sum_{n>0} |\eta_1^+(n,k)|^2 + \sum_{n\leqslant 0} |\eta_1^-(n,k)|^2 + \\ + \sum_{m>0} |\eta_2^+(m,k)|^2 + \sum_{m\leqslant 0} |\eta_2^-(m,k)|^2.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка

$$|\eta_1^+(n,k)| = \Big| -\varepsilon \sum_{j>n} \frac{e^{-ik(n-j)} - e^{ik(n-j)}}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,k)\Big| = \varepsilon\Big| \sum_{j>n} \frac{-2i\sin[k(n-j)]}{2i\sin k} \mathcal{V}_1\psi_1(j,k)\Big| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\Big(\sum_{j>n} \frac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} |\mathcal{V}_1(j)|\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j>n} |\varphi_1(j,k)|^2\Big)^{1/2}. \tag{5.6}$$

В окрестности $k_0 \neq 0$, очевидно, справедливо $\dfrac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} < C$. В случае $k_0 = 0$

$$\frac{\sin^2[k(n-j)]}{\sin^2 k} \leqslant \frac{k^2(n-j)^2}{\sin^2 k} \leqslant C'(n^2 + j^2).$$

Таким образом, из (5.6) имеем

$$|\eta_1^+(n,k)| \leqslant C_1\Big(\sum_{j>n} (n^2+j^2) e^{-\alpha|j|}\Big)^{1/2} \|\varphi_1\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leqslant C_2\Big(\sum_{j>n} j^2 e^{-\alpha|j|}\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_2 e^{-\frac{\alpha|n|}{2}} \Big(\sum_{j>n} j^2 e^{-\frac{\alpha|j|}{2}}\Big)^{1/2} = C_3 e^{-\frac{\alpha|n|}{2}}.$$

Отсюда следуют экспоненциальное убывание η_1^+ и равномерная сходимость в (комплексной) окрестности точки λ_0

$$\|\eta_1^+(n,k) - (\eta_1^+)_M(n,k)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \to 0, \quad M \to \infty,$$

где $(\eta_1^+)_M(n,k) = \chi_{[-M,M]}(n) \cdot \eta_1^+(n,k)$, $\chi_{[-M,M]}(n)$ — характеристическая функция отрезка $[-M,M]$. Аналогичные рассуждения справедливы и для $\eta_1^-(n,k)$, $\eta_2^+(m,k)$, $\eta_2^-(m,k)$. Следовательно, $\sum\limits_{(n,m)\in\mathcal{G}} |\eta(n,m,k)|^2 \leqslant C \sum\limits_{n<0} e^{-\frac{\alpha|n|}{2}}$. В силу (векторнозначной) теоремы Вейерштрасса $l^2(G)$-значная функция $\eta(n,m,\lambda)$ аналитична в окрестности точки λ_0. $\square$

Будем искать решение уравнения

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathcal{H}_\varepsilon\varphi,$$

где $\varphi = \varphi(n,m,t)$ — $l^2(\mathcal{G})$-значная функция аргумента t, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, l^2(\mathcal{G}))$, в виде

$$\varphi(n,m,t) = \int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma} C(\lambda)\psi(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\, d\lambda, \tag{5.7}$$

где $\sigma > 0$ достаточно мало, $C(\lambda) \in C_0^\infty(\lambda_0-\sigma, \lambda_0+\sigma)$, $\psi(n,m,\lambda)$ — решение уравнения

Липпмана–Швингера (4.4). Используя (5.4), (5.5), перепишем (5.7) в виде

$$\varphi(n,m,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma}C(\lambda)\left(e^{ikn}+A_1^{\pm}(k)e^{\pm ikn}+\eta_1^{\pm}(n,k)\right)e^{-i\lambda t}\,d\lambda,\ n\in\mathbb{Z},\ m=0,\\ \displaystyle\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma}C(\lambda)\left(A_2^{\pm}(k)e^{\pm ikm}+\eta_2^{\pm}(m,k)\right)e^{-i\lambda t}\,d\lambda,\ n=0,\ m\in\mathbb{Z},\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle -2\int_{-\pi}^{0}C(\lambda)\left(e^{ikn}+A_1^{\pm}(k)e^{\pm ikn}+\eta_1^{\pm}(n,k)\right)e^{-2it\cos k}\sin k\,dk,\ n\in\mathbb{Z},\ m=0,\\ \displaystyle -2\int_{-\pi}^{0}C(\lambda)\left(A_2^{\pm}(k)e^{\pm ikm}+\eta_2^{\pm}(m,k)\right)e^{-2it\cos k}\sin k\,dk,\quad n=0,\ m\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{5.8}$$

знаки «+» и «−» отвечают $n,m>0$ и $n,m\leqslant 0$ соответственно. Рассмотрим норму выражений в (5.8), отвечающих $\eta_{1,2}^{\pm}$. Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\left\|\int_{\lambda_0-\sigma}^{\lambda_0+\sigma}C(\lambda)\eta_{1,2}^{\pm}e^{-i\lambda t}\,d\lambda\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2\to 0,\quad t\to\infty.$$

Таким образом, соответствующие интегралы не играют роли в рассеянии.

Далее,

$$\int_{-\pi}^{0}C(k)A_1^{\pm}(k)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk=A_1^{\pm}(k_0)\int_{-\pi}^{0}C(k)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk+$$
$$+\int_{-\pi}^{0}C(k)\left(A_1^{\pm}(k)-A_1^{\pm}(k_0)\right)e^{-2it\cos k\pm ikn}\sin k\,dk,\tag{5.9}$$

где k_0 отвечает λ_0 (точнее, $\lambda_0=2\cos k_0$). Сравнивая второе слагаемое в правой части (5.9) с (5.3), из следствия леммы 5.1 при $\hat\psi_0(k)=\sqrt{2\pi}C(k)(A_1^{\pm}(k)-A_1^{\pm}(k_0))\sin k$ получаем, что норма данного слагаемого в $l^2(\mathbb{Z})$ при всех t совпадает с

$$\sqrt{2\pi}\left\|C(k)\left[A_1^{\pm}(k)-A_1^{\pm}(k_0)\right]\sin k\right\|_{L^2[-\pi,0]}$$

и может быть сделана сколь угодно малой равномерно по t выбором носителя функции $C(\lambda)$ в достаточно малой окрестности точки λ_0 при сохранении нормы этой функции в $L^2[-\pi,0]$. Аналогичные рассуждения верны и для интеграла, отвечающего $A_2^{\pm}$. Таким образом, для частиц с достаточно локализованным волновым вектором k картина рассеяния определяется числами $A_1^{\pm}(k_0)$ и $A_2^{\pm}(k_0)$.

Далее, вследствие теоремы о стационарной фазе (см. теорему 1.3) для всех n и t таких, что $|n/t+2\sin k_0|\geqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало, интеграл в первом слагаемом правой части (5.9) стремится к нулю по норме в $l^2(\mathbb{Z})$ при $|t|\to\infty$. Следовательно, для больших $|t|$ в рассеянии играют роль лишь такие n, для которых

$$-\varepsilon<n/t+2\sin k_0<\varepsilon\tag{5.10}$$

(аналогичные выводы справедливы и для подобных интегралов во втором уравнении (5.8)).

Суммируя сказанное, приходим к следующему описанию рассеяния. Предположим, что

$$\sqrt{2\pi}\,\|2\sin k\cdot C(k)\|_{L^2[-\pi,0]}=1.\tag{5.11}$$

При $t<0$ имеется волновой пакет, отвечающий налетающей с вероятностью 1 частице, локализованный в основном в подмножестве $\mathbb{Z}$ вида (5.10) (норма соответствующей функции стремится к единице в этой области при $t\to-\infty$). При $t\to\infty$ пакет делится на четыре части, отвечающие разным полуосям. Отраженной волне отвечает коэффициент $A_1^-(\lambda_0)$. Скорость волнового пакета приближенно равна по модулю (в любом направлении) $|2\sin k_0|$.

В силу равенства

$$\|\varphi(n,m,t)\|^2_{l^2(G)} = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

для заданного произвольно малого $\varepsilon > 0$, сужая окрестность точки λ_0, содержащую носитель функции $C(\lambda)$ и устремляя $|t|$ к бесконечности, получаем неравенство

$$|1 - (|1 + A_1^+(k_0)|^2 + |A_1^-(k_0)|^2 + |A_2^-(k_0)|^2 + |A_2^+(k_0)|^2)| < \varepsilon. \tag{5.12}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.1. *Имеет место равенство*

$$|1 + A_1^+(\lambda_0)|^2 + |A_1^-(\lambda_0)|^2 + |A_2^+(\lambda_0)|^2 + |A_2^-(\lambda_0)|^2 = 1. \tag{5.13}$$

С л е д с т в и е 5.2. *Из проведенных рассуждений следует, что для вероятностей прохождения и отражения в точке λ_0 справедливы формулы*

$$P_1^+(\lambda_0) = |1 + A_1^+(\lambda_0)|^2, \quad P_1^- = |A_1^-(\lambda_0)|^2, \quad P_2^\pm = |A_2^\pm(\lambda_0)|^2, \tag{5.14}$$

где $P_2^\pm(\lambda)$ — вероятности прохождения вдоль оси Om вверх и вниз соответственно, $P_1^\pm$ — вероятности прохождения вдоль оси On вправо и влево соответственно.

Для малых ε при определенном соотношении между ε и λ существует практически полное прохождение вдоль оси абсцисс.

Положим (определение константы A см. в формулировке теоремы 4.1)

$$C^\pm = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+1}(1+j-|j|)\mathcal{V}_2(j) +$$
$$+ \frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\mp 2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1+j-|j|)\mathcal{V}_1(j),$$
$$F^\pm = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+j-|j|)\mathcal{V}_1(j) +$$
$$+ \frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+1}(\mp 2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1+j-|j|)\mathcal{V}_2(j).$$
$$K^- = 2A^2 - \frac{1}{2}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+j-|j|)\mathcal{V}_2(j) +$$
$$+ \frac{1}{4}Ai\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j}(2j - 2 + |1-j| + |1+j|)(1+j-|j|)\mathcal{V}_1(j).$$

В следующей теореме 5.2 предполагается малость как потенциала, так и скорости частицы (приближенно пропорциональной k, см. выше, при малых k).

Т е о р е м а 5.2. *В условиях теоремы* 4.1 *для λ, достаточно близких к точке* 2, *справедливы равенства*

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2C^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

и для λ, достаточно близких к точке -2 равенства

$$P_1^+(\lambda) = P_2^+(\lambda) = P_2^-(\lambda) = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad P_1^-(\lambda) = 1 + (A^2 - 2K^-)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя теорему 4.1, для λ, близких к точке 2, найдем

$$A_1^{\pm}(\lambda) = -1 + iA\varepsilon + C^{\pm}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad A_2^{\pm}(\lambda) = iA\varepsilon + F^{\pm}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Тогда

$$P_1^-(\lambda) = |A_1^-(\lambda)|^2 = |-1 + iA\varepsilon + C^-\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = 1 + A^2\varepsilon^2 - 2C^-\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_1^+(\lambda) = |1 + A_1^+(\lambda)|^2 = |iA\varepsilon + C^+\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$P_2^{\pm}(\lambda) = |A_2^{\pm}(\lambda)|^2 = |iA\varepsilon + F^{\pm}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)|^2 = A^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Для λ, близких к точке -2, доказательство аналогично. □

В следующей теореме 5.3, в отличие от теоремы 5.2, мал только возмущающий потенциал (описывающий, например, примесь).

Т е о р е м а 5.3. *Пусть $\lambda = 2\cos k$, $k \in (-\pi, 0)$ фиксировано. Тогда*

$$P_1^+(\lambda) = (1+E)^2 + B^2 + O(\varepsilon), \quad P_1^-(\lambda) = E^2 + B^2 + O(\varepsilon), \quad P_2^{\pm}(\lambda) = D^2 + B^2 + O(\varepsilon),$$

где

$$E = -\frac{2 + 2\cos 2k + \sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad B = \frac{\sin 2k(1+\cos 2k)}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}, \quad D = \frac{2\sin^2 2k}{(1+\cos 2k)^2 + 4\sin^2 2k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения модифицированного уравнения Липпмана–Швингера (4.5) следуют из рассуждений, аналогичных представленным в доказательстве теоремы 4.1. Справедливость формул для $P_1^{\pm}(\lambda)$ и $P_2^{\pm}(\lambda)$ легко следует из равенств

$$A_1^{\pm}(k) = E + Bi + O(\varepsilon), \quad A_2^{\pm}(k) = D + Bi + O(\varepsilon). \qquad \square$$

§ 6. Квазиуровни и рассеяние для оператора $\mathcal{H}$

В настоящем параграфе рассмотрен оператор $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$. Здесь $\mathcal{V}$ — это оператор умножения на функцию

$$\mathcal{V}(n,m) = \begin{cases} V_0(\delta_{n,N} + \delta_{n,-N}), & m = 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

при некотором натуральном $N > 1$. Доказаны существование и единственность квазиуровней этого оператора в окрестностях точек ± 2 для определенных значений V_0, получены асимптотические формулы для квазиуровней. Кроме того, доказано существование точки в $(-2, 2)$, коэффициент отражения в которой в задаче рассеяния равен нулю для всех достаточно малых V_0.

Уравнение Шрёдингера $(\mathcal{H}_0 + \mathcal{V})\psi = \lambda\psi$, рассматриваемое в классе $l^2(\mathcal{G})$, для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$ перепишем в виде

$$\psi = -\mathcal{R}_0(\lambda)\mathcal{V}\psi. \tag{6.1}$$

Здесь $\mathcal{V}$ — это оператор умножения на функцию

$$\mathcal{V}(n,m) = \begin{cases} V_0(\delta_{n,N} + \delta_{n,-N}), & m = 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

при некотором натуральном N и вещественном V_0. Данный потенциал, в отличие, вообще говоря, от потенциала §§ 3–5, имеет ярко выраженный «резонансный» характер: квантовая частица может последовательно отражаться бесконечное число раз от потенциалов $V_0\delta_{n,N}$ и $V_0\delta_{n,-N}$. Положим $\varphi = \sqrt{|\mathcal{V}|}\psi$, тогда (6.1) примет вид

$$\varphi = -\sqrt{|\mathcal{V}|}\mathcal{R}_0(\lambda)\sqrt{\mathcal{V}}\varphi. \tag{6.2}$$

Определения квазиуровней оператора $\mathcal{H}$ аналогичны определениям, данным в предыдущем параграфе для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Определим k равенствами $\cos k = \lambda/2$, $\sin k = -\sqrt{1 - (\lambda/2)^2}$.

Т е о р е м а 6.1. 1) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ± 2 для значений V_0, достаточно близких к $\pm 1/N$, существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm = 2\cos k_\pm$ оператора $\mathcal{H}$, причем*

$$k_+ = i\Big(V_0 - \frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0 - \frac{1}{N}\Big),$$
$$k_- = -\pi - i\Big(V_0 + \frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0 + \frac{1}{N}\Big).$$

2) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ± 2 для значений V_0, достаточно близких к $\pm\dfrac{1}{N-1}$, существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm = 2\cos k_\pm$ оператора $\mathcal{H}$, причем*

$$k_+ = \frac{(N-1)^2 i}{(N-1)^2+1}\Big(V_0 - \frac{1}{N-1}\Big) + o\Big(V_0 - \frac{1}{N-1}\Big),$$
$$k_- = -\pi - \frac{(N-1)^2 i}{(N-1)^2+1}\Big(V_0 + \frac{1}{N-1}\Big) + o\Big(V_0 + \frac{1}{N-1}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (6.1) запишем в виде системы (см. лемму 2.3)

$$\begin{cases} \psi_1(n) = -(R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_1\psi_1)(n) - \dfrac{f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}(R_{01}(\lambda)\delta)(n), & n\in\mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = \dfrac{f(\mathcal{V}_1\psi_1)}{1-f^2(\delta)}(R_{01}(\lambda)\delta)(m), & m\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Первое уравнение системы (6.3) с учетом (2.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(n) = \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(q^{|n-N|}\psi_1(N) + q^{|n+N|}\psi_1(-N)\right) + \\ + \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(q^{N-1}+q^{N+1}\right)\left(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\right)\frac{2q^{|n|+1}}{\lambda^2-4-4q^2}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $q = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}}{2} = e^{ik}$.

Заметим, что, зная $\psi_1(n)$, легко найти $\psi_2(m)$. Далее, в силу (6.4) для нахождения $\psi_1(n)$ достаточно знать $\psi_1(N)$ и $\psi_1(-N)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \psi_1(N) = \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\psi_1(N)+q^{2N}\psi_1(-N)\right) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(q^{N-1}+q^{N+1}\right)\times \\ \qquad\qquad \times\left(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\right)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}, \\ \psi_1(-N) = \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(q^{2N}\psi_1(N)+\psi_1(-N)\right) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(q^{N-1}+q^{N+1}\right)\times \\ \qquad\qquad \times\left(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\right)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}. \end{cases}$$

Условие существования ненулевого решения, то есть равенство нулю определителя системы, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$a = 1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \frac{2V_0q^{N+1}\left(q^{N-1}+q^{N+1}\right)}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)}, \quad b = -\frac{V_0q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \frac{2V_0q^{N+1}\left(q^{N-1}+q^{N+1}\right)}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)},$$

или

$$1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \frac{2V_0q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} = \pm\Big(\frac{V_0q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2-4}} + \frac{2V_0q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}\,(\lambda^2-4-4q^2)}\Big). \tag{6.5}$$

Для определенности рассмотрим случай V_0 вблизи $1/N$. Уравнение (6.5) для знака «$-$» можно переписать следующим образом:

$$1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(1-q^{2N}\right) = 0,$$

или

$$1 + \frac{V_0}{2i\sin k}(1-e^{2Nik}) = 0. \tag{6.6}$$

Обозначим $F(V_0,k) = 1 + \dfrac{V_0}{2i\sin k}(1-e^{2Nik})$. Проведем несложные преобразования для k, близких к нулю:

$$F(V_0,k) = 1 + \frac{V_0(-2Nik+o(k^2))}{2ik+o(k^3)} = 1 - V_0N + o(k) = o(k). \tag{6.7}$$

Очевидно, что функция $o(k)$ аналитически зависит от k. Если $V_0 = 1/N$, то, согласно (6.7), $k=0$ — решение уравнения (6.6). Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{V_0N^2}{i} + o(k), \quad \frac{\partial F}{\partial V_0} = -N + o(k).$$

Заметим, что $\dfrac{\partial F}{\partial k}\Big(\dfrac{1}{N},0\Big) \neq 0$. По теореме о неявной функции (см., например, [29]) в достаточно малой окрестности точки $1/N$ существует единственное решение $k = k(V_0)$ уравнения (6.6), причем

$$k(V_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial V_0}\Big(\dfrac{1}{N},0\Big)}{\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\Big(\dfrac{1}{N},0\Big)}\Big(V_0-\frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0-\frac{1}{N}\Big) = i\Big(V_0-\frac{1}{N}\Big) + o\Big(V_0-\frac{1}{N}\Big).$$

Аналогично доказываются оставшиеся утверждения теоремы. □

С л е д с т в и е 6.1. *Из* (6.3) *вытекает экспоненциальное убывание на бесконечности, а следовательно принадлежность $l^2(\mathcal{G})$, функции ψ в случае, если $\operatorname{Im} k > 0$* (ср. [30]). *Таким образом, для V_0, достаточно близких к $\pm 1/N$ и $|V_0| > 1/N$, значения $\lambda_\pm$ являются собственными значениями оператора $\mathcal{H}$. В случае V_0, достаточно близких к $\pm\dfrac{1}{N-1}$ и $|V_0| > \dfrac{1}{N-1}$, значения $\lambda_\pm$ также являются собственными значениями оператора $\mathcal{H}$.*

Рассмотрим уравнение Липпмана–Швингера для оператора $\mathcal{H}$ с «налетающей волной», распространяющейся вдоль $\mathbb{Z}\times\{0\}$:

$$\begin{cases} \psi_1(n) = e^{ikn} - R_{01}(\lambda)\mathcal{V}_1\psi_1(n) + \dfrac{2\cos k\cdot f(\delta) - f(\mathcal{V}_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(n), \quad n\in\mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = \dfrac{-2\cos k + f(\mathcal{V}_1\psi_1)}{1-f^2(\delta)}R_{01}(\lambda)\delta(m), \quad m\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(n) = e^{ikn} - \frac{V_0}{2i\sin k}\left(e^{ik|n-N|}\psi_1(N) + e^{ik|n+N|}\psi_1(-N)\right) - \\ - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+|n|)}}{\sin^2 k + e^{2ik}} + \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N+|n|)}(\psi_1(N)+\psi_1(-N))}{\sin^2 k + e^{2ik}}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Положим

$$\Delta = \left(1 + \frac{V_0}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)^2 - \left(\frac{V_0e^{2ikN}}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)^2,$$

$$\Delta_1 = \left(e^{ikN} - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)\left(1 + \frac{V_0}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right) - \\ - \left(e^{-ikN} - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)\left(\frac{V_0 e^{2ikN}}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right),$$

$$\Delta_2 = \left(1 + \frac{V_0}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)\left(e^{-ikN} - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right) - \\ - \left(\frac{V_0 e^{2ikN}}{2i\sin k} - \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right)\left(e^{ikN} - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\right).$$

Л е м м а 6.1. *Пусть $\Delta \neq 0$, тогда существует единственное решение уравнения Липпмана–Швингера* (6.8)*, которое имеет вид*

$$\psi_1(n) = e^{ikn} - \frac{V_0}{2i\sin k}\Big(e^{ik|n-N|}\frac{\Delta_1}{\Delta} + e^{ik|n+N|}\frac{\Delta_2}{\Delta}\Big) - \frac{\cos k\cdot e^{ik(1+|n|)}}{\sin^2 k + e^{2ik}} + \\ + \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N+|n|)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\Big(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\Big),$$

$$\psi_2(m) = \frac{i\sin k\cos k}{\sin^2 k + e^{2ik}} - \frac{V_0 e^{ik(N+|m|)}\cos k}{\sin^2 k + e^{2ik}}\Big(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (6.9) для нахождения $\psi_1(n)$ достаточно найти величины $\psi_1(N)$ и $\psi_1(-N)$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \psi_1(N) = e^{ikN} - \dfrac{V_0}{2i\sin k}\big(\psi_1(N) + e^{2ikN}\psi_1(-N)\big) - \\ - \dfrac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}} + \dfrac{V_0}{2i\sin k}\cdot\dfrac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}(\psi_1(N) + \psi_1(-N))}{\sin^2 k + e^{2ik}}, \\ \psi_1(-N) = e^{-ikN} - \dfrac{V_0}{2i\sin k}\big(e^{2ikN}\psi_1(N) + \psi_1(-N)\big) - \\ - \dfrac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}} + \dfrac{V_0}{2i\sin k}\cdot\dfrac{\cos k\cdot e^{ik(1+2N)}(\psi_1(N) + \psi_1(-N))}{\sin^2 k + e^{2ik}}. \end{cases}$$

Записав решение полученной системы с помощью формул Крамера, получим требуемую формулу для $\psi_1(n)$. После этого легко получаем формулу для $\psi_2(m)$. □

Обозначим через $P_1^-(\lambda)$ вероятность отражения в точке $\lambda \in (-2, 2)$. Имеем равенство $P_1^-(\lambda) = |A_1^-(\lambda)|^2$, где $A_1^-(\lambda)$ — коэффициент отражения (вдоль прямой $\mathbb{Z}\times\{0\}$), который легко выписывается из вида решения уравнения Липпмана–Швингера (см. лемму 6.1):

$$\psi_1(n) = e^{ikn} + Ce^{-ikn}, \quad n < -N,$$

где

$$C = A_1^-(\lambda, V_0) = -\frac{V_0}{2i\sin k}\Big(e^{ikN}\frac{\Delta_1}{\Delta} + e^{-ikN}\frac{\Delta_2}{\Delta}\Big) - \frac{\cos k\cdot e^{ikn}}{\sin^2 k + e^{2ik}} + \\ + \frac{V_0}{2i\sin k}\cdot\frac{\cos k\cdot e^{ik(1+N)}}{\sin^2 k + e^{2ik}}\Big(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\Big).$$

Для краткости будем пользоваться обозначением $A_1^-(k, V_0)$ вместо $A_1^-(2\cos k, V_0)$.

Т е о р е м а 6.2. *В сколь угодно малой окрестности точки $\lambda_0 = 0$ для всех достаточно малых V_0 существует единственное решение λ уравнения $P_1^-(\lambda) = 0$, причем*

$$\lambda = O(V_0^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно убедиться, что значения $V_0 = 0$, $k = \pi/2$ удовлетворяют уравнению $A_1^-(k, V_0) = 0$, и найти частные производные

$$\frac{\partial A_1^-(k,V_0)}{\partial V_0}(\pi/2,0) = 0, \quad \frac{\partial A_1^-(k,V_0)}{\partial k}(\pi/2,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 A_1^-(k,V_0)}{\partial V_0^2}(\pi/2,0) = 0.$$

В силу теоремы о неявной функции в сколь угодно малой окрестности точки $k_0 = \pi/2$ для V_0, близких к нулю, существует единственное решение уравнения $A_1^-(\lambda, V_0) = 0$, для которого справедлива асимптотическая формула

$$k = k(V_0) = \pi/2 + O(V_0^3).$$

Положим $\tilde{k} = k - \pi/2 = O(V_0^3)$, тогда $\lambda = 2\cos k = -2\sin\tilde{k} = O(V_0^3)$. □

§ 7. Спектральные свойства оператора H_0

В §§ 7–9 рассматривается оператор $H_0 = (H_{01} \otimes 1) + (1 \otimes H_{02})$, действующий в $l^2(\Gamma)$, где $\Gamma = \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, N\} \subset \mathbb{Z}^2$. Оператор $H_{01} : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ действует по правилу

$$\big(H_{01}\varphi\big)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор H_{02} действует в $l^2\big(\{1, \ldots, N\}\big) \cong \mathbb{C}^N$ и определяется равенствами

$$\begin{gathered}\big(H_{02}\varphi\big)(m) = \varphi(m-1) + \varphi(m+1), \quad m = 2, \ldots, N-1, \\ \big(H_{02}\varphi\big)(1) = \varphi(2), \\ \big(H_{02}\varphi\big)(N) = \varphi(N-1).\end{gathered}$$

Последние два равенства означают наличие нулевых граничных условий для $m = 0, N$.

В данных параграфах собраны результаты, относящиеся к исследованию оператора $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $\varepsilon > 0$, а V является оператором умножения на вещественную функцию $V(n,m) \neq 0$, заданную на Γ и удовлетворяющую условию

$$|V(n,m)| \leqslant \beta e^{-\alpha|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \{1, \ldots, N\},$$

причем $\alpha > 0$.

В § 7 найдены вид ядра резольвенты и спектр оператора H_0.

Т е о р е м а 7.1. *Оператор H_0 самосопряжен и ограничен.*

Теорема проверяется непосредственно. В дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Л е м м а 7.1. *Существует ровно N различных собственных значений оператора H_{02} :*

$$\lambda_j = 2\cos\frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

с соответствующими собственными функциями

$$\varphi_j(m) = a \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big), \quad j = 1, \ldots, N,$$

образующими ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$, где $a = \sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$ — нормировочный коэффициент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение на собственные значения

$$H_{02}\varphi = \lambda\varphi$$

перепишем в виде

$$\begin{gathered} \varphi(m-1) + \varphi(m+1) = \lambda\varphi(m), \quad m = 2, \dots, N-1, \\ \varphi(2) = \lambda\varphi(1), \quad \varphi(N-1) = \lambda\varphi(N). \end{gathered} \tag{7.1}$$

Решение уравнения (7.1) ищем в виде

$$\varphi(m) = c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Для $m \in \{2, \dots, N-1\}$ имеем

$$c_1 e^{ikm}(e^{-ik} + e^{ik}) + c_2 e^{-ikm}(e^{-ik} + e^{ik}) = \lambda(c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}).$$

Следовательно, $\lambda = e^{-ik} + e^{ik} = 2\cos k$. Второе уравнение (7.1) примет вид

$$c_1 e^{2ik} + c_2 e^{-2ik} = (e^{-ik} + e^{ik})(c_1 e^{ik} + c_2 e^{-ik}),$$

откуда $c_1 = -c_2 = c$. Подставим $\varphi(m) = c\big(e^{ikm} - e^{-ikm}\big)$ в третье уравнение (7.1):

$$ce^{ik(N-1)} - ce^{-ik(N-1)} = (e^{-ik} + e^{ik})(ce^{ikN} - ce^{-ikN}).$$

Следовательно, $\sin k(N+1) = 0$, откуда

$$k = \frac{\pi j}{N+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, существует ровно N различных собственных значений оператора H_{02} :

$$\lambda_j = 2\cos\frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

которым соответствуют N собственных функций

$$\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big), \quad j = 1, \dots, N.$$

Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны, а их количество совпадает с размерностью пространства. Следовательно, функции $a_j \sin\Big(\dfrac{\pi j m}{N+1}\Big)$, $j = 1, \dots, N$, образуют ортонормированный базис с соответствующими нормировочными коэффициентами a_j, $j = 1, \dots, N$. Известна формула

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{N} \sin^2\frac{\pi j m}{N+1} = \frac{N+1}{2}.$$

Отсюда легко видеть, что $a = \sqrt{\dfrac{2}{N+1}}$.

$\square$

Ядро $\{G_0(n, m, n', m', \lambda)\}_{(n,m),(n',m')\in\Gamma}$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 назовем функцией Грина этого оператора.

Положим

$$\begin{gathered}\mu_j = \lambda - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1,\dots,N,\\ \cos k_j = \mu_j/2, \quad j = 1,\dots,N,\\ \sin k_j = -\sqrt{1-(\mu_j/2)^2}, \quad j = 1,\dots,N.\end{gathered} \tag{7.2}$$

Функцию Грина оператора H_{01}, как и прежде, будем обозначать как

$$G_{01}(\lambda, n-m) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\Big)^{|n-m|}.$$

Л е м м а 7.2. *Имеет место формула*

$$G_0(n,m,n',m',\lambda) = \sum_{j=1}^{N} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) G_{01}(n-n',\mu_j), \tag{7.3}$$

где

$$\lambda \notin \bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big] = \Big[-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$R_0(\lambda)(H_0-\lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma).$$

Имеем

$$R_0(\lambda)(H_0-\lambda)\varphi(n,m) = \sum_{(n',m')\in\Gamma} G_0(n,m,n',m',\lambda)\big((H_0-\lambda)\varphi\big)(n',m') =$$

$$= \sum_{m'=2}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m',\lambda)\big(\varphi(n'+1,m')+\varphi(n'-1,m')+\varphi(n',m'+1)+\varphi(n',m'-1)-\lambda\varphi(n',m')\big)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\big(\varphi(n'+1,1)+\varphi(n'-1,1)+\varphi(n',2)-\lambda\varphi(n',1)\big)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\big(\varphi(n'+1,N)+\varphi(n'-1,N)+\varphi(n',N-1)-\lambda\varphi(n',N)\big)=$$

$$= \sum_{m'=2}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \big(G_0(n,m,n'-1,m',\lambda)+G_0(n,m,n'+1,m',\lambda)-\lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m') +$$

$$+\sum_{m'=3}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'-1,\lambda)\varphi(n',m') + \sum_{m'=1}^{N-2}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'+1,\lambda)\varphi(n',m') +$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \big(G_0(n,m,n'-1,1,\lambda)+G_0(n,m,n'+1,1,\lambda)\big)\varphi(n',1) +$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\varphi(n',2) - \sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\lambda\varphi(n',1) + \sum_{n'\in\mathbb{Z}}\big(G_0(n,m,n'-1,N,\lambda)+$$

$$+G_0(n,m,n'+1,N,\lambda)\big)\varphi(n',N) + \sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\varphi(n',N-1) -$$

$$-\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\lambda\varphi(n',N) = \sum_{(n',m')\in\Gamma}\big(G_0(n,m,n'-1,m',\lambda)+G_0(n,m,n'+1,m',\lambda)-$$

$$- \lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m') + \sum_{m'=2}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'-1,\lambda)\varphi(n',m') +$$

$$+ \sum_{m'=1}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'+1,\lambda)\varphi(n',m') =$$

$$= \sum_{(n',m')\in\Gamma} \big(H_0 G_0(n,m,n',m',\lambda) - \lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m').$$

Справедливо равенство

$$(H_0 - \lambda)G_0(n,m,n',m',\lambda) = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Действительно,

$$(H_0 - \lambda)G_0(n,m,n',m',\lambda) = \big((H_{01}\otimes 1) - \lambda\big)\sum_{j=1}^{N} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)G_{01}\big(n-n',\mu_j\big) +$$

$$+ \big(1\otimes H_{02}\big)\sum_{j=1}^{N} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)G_{01}\big(n-n',\mu_j\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\big((H_{01}\otimes 1) - \lambda_j\big)a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)G_{01}\big(n-n',\mu_j\big) =$$

$$= \delta_{nn'}\sum_{j=1}^{N} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Осталось показать справедливость равенства

$$(H_0 - \lambda)R_0(\lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma), \tag{7.4}$$

при условии, что оператору $R_0(\lambda)$ отвечает ядро (7.3). Используя лемму 7.1, получим

$$(H_0 - \lambda)R_0(\lambda)\varphi(n,m) = ((H_{01}\otimes 1) - \lambda)\sum_{j=1}^{N} a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sum_{(n',m')\in\Gamma} a\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\times$$

$$\times G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\varphi(n',m') +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\lambda_j a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sum_{(n',m')\in\Gamma} a\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\varphi(n',m') =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sum_{m'=1}^{N} a\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\big((H_{01}\otimes 1) - \mu_j\big)\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_{01}(n-n',\mu_j)\varphi(n',m') =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\sum_{m'=1}^{N} a\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\varphi(n,m'). \tag{7.5}$$

Считая n константой, разложим $\varphi(n,m)$ по базису $\Big\{a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\Big\}_{j=1}^{N}$:

$$\varphi(n,m) = \sum_{j=1}^{N} c_j(n)a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big),$$

где

$$c_j(n) = \Big(\varphi(n,m), a\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)\Big)_{l^2(\{1,\dots,N\})} = \sum_{m'=1}^{N}\varphi(n,m')a\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big).$$

Имеем
$$\varphi(n,m)=\sum_{j=1}^{N}a\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sum_{m'=1}^{N}a\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\varphi(n,m'). \qquad (7.6)$$
Из (7.5) и (7.6) следует справедливость равенства (7.4).

То же равенство (7.4) можно доказать следующим способом. Положим $R_0(\lambda)(H_0-\lambda)\varphi=\psi$, в силу доказанного выше $(H_0-\lambda)(\varphi-\psi)=0$. Осталось доказать, что если $(H_0-\lambda)\xi=0$, то $\xi=0$. Имеем
$$\xi(n,m)=\sum_{j=1}^{N}b_j(n)a\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big), \qquad (7.7)$$
где
$$b_j(n)=\Big(\xi(n,m),a\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\Big)_{l^2(\{1,\dots,N\})}=\sum_{m'=1}^{N}\xi(n,m')a\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big).$$
Отсюда
$$(H_0-\lambda)\xi(n,m)=\sum_{j=1}^{N}(H_{01}-(\lambda-\lambda_j))b_j(n)a\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)=0$$
и $(H_{01}-(\lambda-\lambda_j))b_j(n)=0,\quad j=1,\dots,N$. Но по условию $\lambda-\lambda_j\notin[-2,2]$. Беря преобразование Фурье F (см. параграф 2), получаем
$$[2\cos k-(\lambda-\lambda_j)]\widehat{b}_j(k)=0,$$
откуда $\widehat{b}_j(k)=0,\quad j=1,\dots,N$. Следовательно, $b_j=0$, $j=1,\dots,N$, и в силу (7.7) лемма доказана. □

Т е о р е м а 7.2. *Спектр оператора H_0 имеет вид*
$$\sigma(H_0)=\bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{j\pi}{N+1},2+2\cos\frac{j\pi}{N+1}\Big]=\Big[-2+2\cos\frac{N\pi}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big]. \qquad (7.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим
$$A=\bigcup_{j=1}^{N}\Big[-2+2\cos\frac{\pi j}{N+1},2+2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big].$$
Пусть $\lambda\notin A$. Покажем, что $\lambda\notin\sigma(H_0)$, то есть $R_0(\lambda)$ — ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$. Действительно, тогда $\mu_j=\lambda-\lambda_j\notin[-2,2]$, $j=1,\dots,N$. Поэтому ядра $G_{01}(n-n',\mu_j)$ определяют ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$ и, следовательно, ядро G_0 оператора $R_0(\lambda)$ определяет ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$ в силу (7.3).

Пусть теперь $\lambda\in A$, то есть найдется такое $j_0\in\{1,\dots,N\}$, что
$$\lambda\in\Big[-2+2\cos\frac{\pi j_0}{N+1},2+2\cos\frac{\pi j_0}{N+1}\Big].$$

Покажем, что найдется последовательность $\{\varphi_r\}_{r=1}^{\infty}\subset l^2(\Gamma)$ такая, что
$$\|\varphi_r\|=1,\quad (H_0-\lambda)\varphi_r\to 0 \text{ при } r\to\infty.$$
Это, в силу критерия Вейля (см., например, [15, с. 262]), будет означать, что $\lambda\in\sigma(H_0)$.

Рассмотрим последовательность
$$\varphi_r(n,m)=\frac{a}{\widehat{c}}e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big),$$

где

$$\chi_{[-r,r]}(n) = \begin{cases} 1, & n \in [-r,r], \\ 0, & n \notin [-r,r], \end{cases}$$

$$\widehat{c} = \widehat{c}(r) = \sum_{n=-r}^{r} \left|e^{ik_{j_0}n}\right|^2 = 2r+1.$$

Имеем

$$\|\varphi_r(n,m)\|^2_{l^2(\Gamma)} = \sum_{(n,m)\in\Gamma} \left|\frac{a}{\widehat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\right|^2 =$$
$$= \left\|\frac{1}{\widehat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\right\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} \cdot \left\|a\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\right\|^2_{l^2(\{1,\dots,N\})} =$$
$$= \left\|\frac{1}{\widehat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\right\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} = 1.$$

Далее,

$$\big((H_0-\lambda)\varphi_r\big)(n,m) = \big((H_{01}\otimes 1) - \mu_{j_0}\big)\Big(\frac{1}{\widehat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\Big)a\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{\widehat{c}(r)}a\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\big(e^{ik_{j_0}(n+1)}\chi_{[-r,r]}(n+1) + e^{ik_{j_0}(n-1)}\chi_{[-r,r]}(n-1) -$$
$$- \mu_{j_0}e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\big) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\widehat{c}(r)}a\sin\left(\dfrac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\big(e^{ik_{j_0}(n+1)} + e^{ik_{j_0}(n-1)} - \mu_{j_0}e^{ik_{j_0}n}\big), & r \in [-r+1, r-1], \\ \dfrac{1}{\widehat{c}(r)}a\sin\left(\dfrac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\big(e^{\pm ik_{j_0}(r-1)} - \mu_{j_0}e^{\pm ik_{j_0}r}\big), & n = \pm r, \\ \dfrac{1}{\widehat{c}(r)}a\sin\left(\dfrac{\pi j_0 m}{N+1}\right)e^{\pm ik_{j_0}r}, & n = \pm(r+1), \\ 0, & |n| \geqslant r+2. \end{cases}$$

Так как $|e^{ik_{j_0}}| = 1$ и $\widehat{c}(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, то очевидно, что

$$|(H_0-\lambda)\varphi_r(n,m)| \to 0, \quad r \to \infty. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е 4. Промежутки в объединении (7.8) в физической литературе называются подзонами.

§ 8. Квазиуровни слабо возмущенного оператора

В данном параграфе исследуются спектральные свойства оператора $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$. В частности, доказано, что для малых убывающих потенциалов вблизи особенностей невозмущенной функции Грина возникают собственные значения или резонансы, найдена их асимптотика.

Рассмотрим оператор H_ε и его резольвенту $R_\varepsilon(\lambda)$. В дальнейшем будем использовать обозначение $\sqrt{V} = \sqrt{|V|}\,\operatorname{sign} V$ (только для $\sqrt{V}$), тогда $V = \sqrt{V}\sqrt{|V|}$.

Уравнение на собственные значения оператора H_ε в области, где существует резольвента $R_0(\lambda)$, можно записать в виде

$$\psi = -\varepsilon R_0(\lambda)(V\psi), \tag{8.1}$$

где функция $\psi \in l^2(\Gamma)$ и отлична от нуля. Для того чтобы, оставаясь в рамках пространства $l^2(\Gamma)$, исследовать также резонансы, переходим к новой функции $\varphi = \sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$.

Обозначим через $L(\lambda) = \sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ оператор с ядром

$$l(n,m,n',m',\lambda) = \sqrt{|V(n,m)|}\sum_{j=1}^{N} a^2\sin\left(\frac{\pi jm}{N+1}\right)\sin\left(\frac{\pi jm'}{N+1}\right)G_{01}(n-n',\mu_j)\sqrt{V(n',m')} \tag{8.2}$$

(аналитическое продолжение операторнозначной функции, осуществляемое ее ядром, обозначаем тем же символом).

Обозначим через $\mathcal{V}$ риманову поверхность, образованную аналитическими продолжениями функции l из области

$$\Big(-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big)\times(0,\infty)$$

в область

$$\Big(-2+2\cos\frac{\pi N}{N+1}, 2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\Big)\times(-\delta,\infty)$$

$\big($включая точки $\pm 2+2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\big)$, где $\delta>0$ настолько мало, что l принимает значения в $l^2(\Gamma^2)$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda\neq\cos\frac{\pi j}{N+1}+\cos\frac{\pi j'}{N+1},\quad j,j'=1,\dots,N. \tag{8.3}$$

Докажем, что в этом случае все величины $-2\sin k_j$ различны. Действительно, если при $j\neq j'$ $\sin k_j=\sin k_{j'}$, то $\cos k_{j'}=-\cos k_j$. Но тогда из равенств

$$\lambda=2\cos k_j+2\cos\frac{\pi j}{N+1}=2\cos k_{j'}+2\cos\frac{\pi j'}{N+1}$$

вытекает, что $2\cos k_j=\cos\dfrac{\pi j'}{N+1}-\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, что противоречит (8.3).

Л е м м а 8.1. *Оператор $\big(1-L(\lambda)\big)^{-1}$ существует и аналитически зависит от λ на многообразии $\mathcal{V}\setminus S$, где S — некоторое дискретное подмножество в $\mathcal{V}$ (то есть множество, не имеющее предельных точек в $\mathcal{V}$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, для каждого $\lambda\in\mathcal{V}$ покажем компактность оператора $L(\lambda)$. Для этого достаточно, чтобы он являлся оператором Гильберта–Шмидта, то есть достаточно выполнения условия

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma}\sum_{(n',m')\in\Gamma}|l(n,m,n',m',\lambda)|^2<+\infty,$$

для фиксированного $\lambda\in\mathcal{V}$.

Пусть $\lambda\in\mathcal{V}$, тогда

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma}\sum_{(n',m')\in\Gamma}|l(n,m,n',m',\lambda)|^2=\sum_{(n,m)\in\Gamma}\sum_{(n',m')\in\Gamma}\Big|\sqrt{|V(n,m)|}\sum_{j=1}^{N}\sin\Big(\frac{\pi jm}{N+1}\Big)\sin\Big(\frac{\pi jm'}{N+1}\Big)\times$$
$$\times G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\sqrt{V(n',m')}\Big|^2\leqslant C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{-\alpha|n|}e^{-\alpha|n'|}\sum_{j=1}^{N}\big|G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\big|^2. \tag{8.4}$$

Имеем

$$\big|G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\big|\leqslant\frac{e^{\sigma|n-n'|}}{\big|\sqrt{\mu_j^2-4}\big|}$$

для всех j, где $\sigma>0$. Следовательно, полученная в (8.4) сумма для $\sigma<\alpha$, то есть для достаточно малых σ, не превосходит

$$C\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\big|\sqrt{\mu_j^2-4}\big|^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{-(\alpha-\sigma)|n|}e^{-(\alpha-\sigma)|n'|}<\infty. \tag{8.5}$$

Во-вторых, покажем, что отображение $\lambda \in \mathcal{V} \to L(\lambda) \in \mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ является аналитической операторнозначной функцией в $\mathcal{V}$ (под $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ понимаем множество линейных ограниченных операторов, действующих в $l^2(\Gamma)$).

Неравенства (8.4) и (8.5) показывают, что ряд (8.2) сходится равномерно на компактах из $\mathcal{V} \setminus S$. В силу (векторнозначного варианта) теоремы Вейерштрасса об аналитичности ряда из аналитических функций функция $l(n, m, n', m', \lambda)$ определяет аналитическую функцию в $\mathcal{V} \setminus S$ со значениями в $l^2(\Gamma \times \Gamma)$. Следовательно, и $L(\lambda)$ является аналитической функцией в $\mathcal{V} \setminus S$ со значениями в $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$.

Вследствие оценок (8.4) и (8.5) $\|L(\lambda)\| < 1$ для достаточно больших $|\lambda|$. Отсюда вытекает существование обратного оператора $(1 - L(\lambda))^{-1}$ для таких λ. В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [15]) это доказывает лемму. □

Следствие 8.1. *В комплексной окрестности произвольной точки $\lambda_0 \in \sigma(H_0)$ может быть лишь конечное число квазиуровней. Не более, чем счетное множество S может иметь предельные точки либо на границе $\mathcal{V}$, либо в множестве точек $\pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, $j = 1, \dots, N$. Но в окрестности точек $\pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ функция l становится мероморфной после замены*

$$\cos k_j = \Big(\lambda - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)/2, \tag{8.6}$$

где k_j меняется в окрестности точки 0 или точки π, причем, например, для $k_j \approx 0$ имеем

$$l(n - n', m, m', k_j) = \frac{\sqrt{|V(n,m)|V(n',m')}}{2ik_j} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) + O(1) \tag{8.7}$$

(легко видеть, что случай $\sin k_j = \sin k_{j'} = 0$ возможен лишь если $j = j'$). Следовательно, вычет является оператором ранга один, и в силу мероморфной теоремы Фредгольма [17] в окрестности точек $k_j = 0$ оператор $(1 - L(k_j))^{-1}$ существует всюду, кроме, возможно, конечного числа точек.

Теорема 8.1. *Справедливо равенство*

$$\sigma_{ess}(H_\varepsilon) = \sigma(H_0).$$

Доказательство. Покажем, что V — относительно компактное возмущение оператора H_0, то есть что оператор $VR_0(\lambda)$ компактен для некоторого $\lambda \notin \sigma(H_0)$. Имеем

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma} \sum_{(n',m')\in\Gamma} |V(n,m) G_0(n, m, n', m', \lambda)|^2 \leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\alpha|n|} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{N} |q_j|^{|n-n'|} =$$
$$= C \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\alpha|n|} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} |q_j|^{|n'|} < +\infty,$$

где $|q_j| < 1$, $j = 1, \dots, N$, $C = \mathrm{const}$. Следовательно, оператор $VR_0(\lambda)$ является оператором Гильберта–Шмидта, а значит, компактен. Утверждение данной теоремы вытекает из теоремы 1.1. □

Определение 8.1 (ср. определение 3.2). Назовем *резонансом* оператора H_ε значение $\lambda \in \mathcal{V}$, не являющееся собственным значением, для которого существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\Gamma)$ уравнения

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|V|} R_0(\lambda) \sqrt{V} \varphi \tag{8.8}$$

(здесь $\lambda \neq \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, $j = 1, \dots, N$).

О п р е д е л е н и е 8.2. Назовем *квазиуровнем* оператора H_ε его собственное значение или резонанс.

В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. теорему 1.2 в § 1) и равенства

$$\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V} = (1 + \varepsilon\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V})^{-1}\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V} \tag{8.9}$$

λ является квазиуровнем тогда и только тогда, когда в этой точке существует полюс операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}$.

Т е о р е м а 8.2. *Предположим, что для некоторого* $j \in \{1, \dots, N\}$

$$v_j^\pm = \sum_{(n',m')\in\Gamma^2} (\pm 1)^{n'} \sin^2\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) V(n', m') \neq 0. \tag{8.10}$$

Тогда в некоторой окрестности точек $\lambda_{j0}^\pm = \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$ *для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует единственный квазиуровень* $\lambda_j^\pm = \lambda_j^\pm(\varepsilon)$ *оператора* H_ε, *аналитически зависящий от* ε, *для которого справедлива формула*

$$\lambda_j^\pm(\varepsilon) = \pm 2 + 2\cos\frac{\pi j}{N+1} \pm \Big(\frac{\varepsilon v_j^\pm}{N+1}\Big)^2 + O(\varepsilon^4). \tag{8.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В окрестности, например, точки λ_{j0}^+ произведем замену (8.6) с k_j из окрестности нуля. Тогда (см. (8.7)) уравнение (8.8) можно записать в виде

$$\varphi(n,m) = -\frac{\varepsilon a^2\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\dfrac{\pi j m}{N+1}\Big)}{2ik_j} \times$$
$$\times \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\varphi(n',m') + \varepsilon K(k_j)\varphi(n,m),$$

где $K(k_j)$ — некоторый оператор Гильберта–Шмидта, аналитически зависящий от k_j. Положим для достаточно малых ε

$$\xi(n,m) = (1 - \varepsilon K(k_j))\varphi(n,m),$$

тогда

$$\xi(n,m) = -\frac{\varepsilon a^2\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\dfrac{\pi j m}{N+1}\Big)}{2ik_j} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')} \times$$
$$\times \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)(1 - \varepsilon K(k_j))^{-1}\xi(n',m') = C\sqrt{|V(n,m)|}\sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big),$$

где $C = \mathrm{const}$, откуда

$$k_j = -\frac{\varepsilon a^2}{2i} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)(1 - \varepsilon K(k_j))^{-1}\Big(\sqrt{|V(n',m')|}\sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)\Big) =$$
$$= -\frac{\varepsilon a^2}{2i} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sin^2\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)V(n',m') + O(\varepsilon^2) = -\frac{\varepsilon a^2 v_j}{2i} + O(\varepsilon^2). \tag{8.12}$$

Правая часть полученного уравнения аналитически зависит от ε, k_j. Вследствие теоремы о неявной функции для аналитических функций [29] и условия (8.10) данное уравнение имеет для всех достаточно малых ε единственное решение $k_j = k_j(\varepsilon)$, аналитически зависящее от ε. Возвращаясь к переменной

$$\lambda = 2\cos\frac{\pi j}{N+1} + 2\cos k_j = 2\cos\frac{\pi j}{N+1} + 2\Big(1 - \frac{k_j^2}{2}\Big) + O(k_j^4),$$

получаем с помощью (8.12) формулу (8.11).

Случай точки λ_{j0}^{-} рассматривается аналогично с заменой k_j на $-\pi-\widetilde{k}_j$, при этом пользуемся равенствами $\sin(-\pi-\widetilde{k}_j)=\sin\widetilde{k}_j$ и

$$e^{-i(\pi+\widetilde{k}_j)|n-n'|}=e^{-i\pi|n-n'|}\cdot e^{-i\widetilde{k}_j|n-n'|}=(-1)^n(-1)^{n'}e^{-i\widetilde{k}_j|n-n'|}. \tag{8.13}$$

□

Следствие 8.2. *Квазиуровень $\lambda_N^{-}(\varepsilon)$ вблизи левой граничной точки λ_{N0}^{-} является собственным значением при $v_N>0$.*

Доказательство. Действительно, функция Грина G_0 (см. (7.3)) экспоненциально убывает в точке $\lambda=\lambda_N^{-}(\varepsilon)$ при $|n|\to\infty$, это следует из (8.12) после перехода в (7.3) к переменной k_N. Запишем уравнение (8.8) в виде $\psi=-\varepsilon R_0(\lambda)V\psi$, где $\psi=-\varepsilon R_0(\lambda)\sqrt{V}\varphi$ $(=\varphi/\sqrt{|V|}$ в точках, где $V\neq 0)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера $H_\varepsilon\psi=\lambda\psi$ при $\lambda=\lambda_N^{-}(\varepsilon)$. Легко видеть, что функция ψ вместе с G_0 экспоненциально убывает (ср. аналогичные рассуждения в [25]), так что $\psi\in l^2(\Gamma)$ (более того, экспоненциально убывает) и $\lambda_N^{-}(\varepsilon)$ есть собственное значение. Аналогично, квазиуровень $\lambda_1^{+}(\varepsilon)$ вблизи правой граничной точки λ_{10}^{+} существенного спектра является собственным значением при $v_1<0$ (показатель экспоненты в составе функции Грина, согласно (8.13), меняет знак).

§ 9. Нестационарная картина рассеяния для слабо возмущенного оператора

В данном параграфе описана картина рассеяния: явление дифракции (рассеяние главным образом по конечному числу выделенных направлений в двумерном и трехмерном случаях) трансформируется в рассматриваемой квазиодномерной системе в наличие волн вероятностей прохождения (отражения) во времени. Изучен характер рассеяния для малых потенциалов вблизи особенностей невозмущенной функции Грина.

Пусть $\lambda_0-2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\in(-2,2)$, причем $\lambda_0\neq\pm2+2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}$, $j=1,\ldots,N$, и λ_0 не является квазиуровнем. В окрестности точки λ_0 рассмотрим уравнение Липпмана–Швингера

$$\psi(n,m,\lambda)=\psi_0(n,m,\lambda)-\varepsilon\sum_{(n',m')\in\Gamma}G_0(n-n',m,m',\lambda)V(n',m')\psi(n',m',\lambda), \tag{9.1}$$

где «налетающая волна» (записанная для переменной k_{j_0}) имеет вид

$$\psi_0(n,m,\lambda)=a\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)e^{ink_{j_0}} \tag{9.2}$$

и удовлетворяет уравнению $H_0\psi_0=\lambda\psi_0$. Решение уравнения (9.1) ищем в классе функций ψ таких, что $\sqrt{|V|}\psi=\varphi\in l^2(\Gamma)$. В силу леммы 8.1 в окрестности точки λ_0 существует решение «модифицированного» [16] уравнения Липпмана–Швингера

$$\varphi(n,m,\lambda)=\varphi_0(n,m,\lambda)-\varepsilon\sum_{(n',m')\in\Gamma}\sqrt{|V(n,m)|}G_0(n-n',m,m',\lambda)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m',\lambda) \tag{9.3}$$

относительно $\varphi=\sqrt{|V|}\psi$, где $\varphi_0=\sqrt{|V|}\psi_0$, аналитически, как $l^2(\Gamma)$-значная функция, зависит от λ.

В дальнейшем для краткости пользуемся обозначениями

$$\sum{}'=\sum_{j:\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)},\quad \sum{}''=\sum_{j:\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\notin(-2,2)}$$

$(j\in\{1,\ldots,N\})$.

Согласно (7.3) имеем

$$\sum_{(n',m')\in\Gamma} G_0(n-n',m,m',\lambda)V(n',m')\psi(n',m') =$$
$$= \sum{}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m') +$$
$$+ \sum{}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m'). \tag{9.4}$$

В обеих суммах в правой части (9.4)

$$G_{01}\Big(n,\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\in l^\infty(\mathbb{Z}).$$

Кроме того, $\sqrt{V},\varphi\in l^2(\Gamma)$. Оценивая правую часть с помощью неравенства Коши–Буняковского, получаем ограниченность решения ψ уравнения Липпмана–Швингера (9.1).

Переходя в слагаемых первой суммы правой части (9.4) к переменным $k_j = k_j(\lambda)$, запишем уравнение (9.1) в виде

$$\begin{gathered}\psi(n,m,\lambda) = \psi_0(n,m,\lambda) - \varepsilon \sum{}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) \times \\ \times \frac{e^{ik_j|n-n'|}}{2i\sin k_j} V(n',m')\psi(n',m',\lambda) - \varepsilon\sum{}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) \times \\ \times G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)V(n',m')\psi(n',m',\lambda).\end{gathered} \tag{9.5}$$

Положим для j из суммы $\sum'$

$$A_j^{\pm}(\lambda) = -\frac{\varepsilon a}{2i\sin k_j}\sum_{(n',m')\in\Gamma} \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big)e^{\mp i k_j n'}V(n',m')\psi(n',m',\lambda). \tag{9.6}$$

В силу аналитичности функции $\varphi(n,m,\lambda) = \sqrt{|V(n,m)|}\psi(n,m,\lambda)$ функции $A_j^{\pm}(\lambda)$ также являются аналитическими в окрестности точки λ_0.

Далее, определим функцию

$$\eta(n,m,\lambda) = \begin{cases} \eta_+(n,m,\lambda), n\geqslant 0,\\ \eta_-(n,m,\lambda), n<0,\end{cases}$$

где

$$\begin{gathered}\eta_{\pm}(n,m,\lambda) = -\varepsilon\sum{}' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) \times \\ \times \left[\frac{e^{ik_j|n-n'|}-e^{\pm ik_j(n-n')}}{2i\sin k_j}\right] V(n',m')\psi(n',m',\lambda) - \\ - \varepsilon\sum{}'' \sum_{(n',m')\in\Gamma} a^2 \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big) \sin\Big(\frac{\pi j m'}{N+1}\Big) G_{01}\Big(n-n',\lambda-2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)V(n',m')\psi(n',m',\lambda).\end{gathered} \tag{9.7}$$

Вследствие (9.2), (9.5) имеем

$$\psi(n,m,\lambda) = a\sin\Big(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\Big)e^{ik_{j_0}n} + \sum{}' A_j^{\pm}(\lambda) a \sin\Big(\frac{\pi j m}{N+1}\Big)e^{\pm i k_j n} + \eta(n,m,\lambda), \tag{9.8}$$

где знаки «+» и «−» отвечают $n\geqslant 0$ и $n<0$ соответственно.

Л е м м а 9.1. *Функция $\eta(n,m,\lambda)$ является $l^2(\Gamma)$-значной аналитической функцией в окрестности точки λ_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы для второй суммы в (9.7) вытекает из аналитичности резольвенты оператора H_{01}, примененной к аналитической $l^2(\mathbb{Z})$-значной функции $V(n',m')\psi(n',m',\lambda)$ (при фиксированном m') — см. лемму 8.1. Далее, в окрестности точки $k_j^{(0)}$ из первой суммы, отвечающей λ_0, оценим, пользуясь неравенством Коши–Буняковского и условием (0.8), например, для $n \geqslant 0$, ряд

$$\Big|\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \frac{e^{ik_j|n-n'|}-e^{ik_j(n-n')}}{2i\sin k_j} V(n',m')\psi(n',m',\lambda)\Big| =$$
$$= \Big|\sum_{n'>n} \frac{\sin[(n'-n)k_j]}{\sin k_j}\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m',\lambda)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{n'>n}\frac{\sin^2[(n'-n)k_j]}{\sin^2 k_j}|V(n',m')|\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n'>n}|\varphi(n',m',\lambda)|^2\Big)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant C'\Big(\sum_{n'>n} n'^2 e^{-\alpha|n'|}\Big)^{\frac12} \leqslant C' e^{-\frac{\alpha|n|}{4}}\Big(\sum_{n'>n} n'^2 e^{-\frac{\alpha|n'|}{2}}\Big)^{\frac12} = C'' e^{-\frac{\alpha|n|}{4}}.$$

Отсюда вытекает экспоненциальное убывание первой суммы — обозначим ее через $\alpha(n,m,\lambda)$ — в (9.7). Кроме того, из данной оценки следует равномерная в (комплексной) окрестности точки λ_0 сходимость

$$\|\alpha(n,m,\lambda)-\alpha_M(n,m,\lambda)\|_{l^2(\Gamma)} \to 0, M\to\infty,$$

где $\alpha_M(n,m,\lambda) = \chi_{[-M,M]}(n)\alpha(n,m,\lambda)$, $\chi_{[-M,M]}(n)$ — характеристическая функция отрезка $[-M,M]$. В силу (векторнозначной) теоремы Вейерштрасса $l^2(\Gamma)$-значная функция $\alpha(n,m,\lambda)$ аналитична в окрестности точки λ_0. Тем самым лемма доказана.

Теперь будем искать решение уравнения

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H_\varepsilon\varphi,$$

где $\varphi=\varphi(n,m,t)$ — $l^2(\Gamma)$-значная функция аргумента t, в виде

$$\varphi(n,m,t) = \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} C(\lambda)\psi(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\,d\lambda, \tag{9.9}$$

где $\delta>0$ достаточно мало, $C(\lambda)\in C_0^\infty(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$, $\psi(n,m,\lambda)$ — решение уравнения Липпмана–Швингера (9.1). Введем обозначение $\widetilde{f}(k_j) = f\left(2\cos k_j + 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\right)$. Пользуясь (9.8), перепишем (9.9) в виде

$$\begin{aligned}\varphi(n,m,t) = -2ae^{-2it\cos\frac{\pi j_0}{N+1}}\sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\int_{-\pi}^{0}\sin k_{j_0}\widetilde{C}(k_{j_0})e^{-2it\cos k_{j_0}+ik_{j_0}n}\,dk_{j_0} -\\ -2{\sum}' ae^{-2it\cos\frac{\pi j}{N+1}}\sin\left(\frac{\pi jm}{N+1}\right)\int_{-\pi}^{0}\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j)\sin k_j\widetilde{C}(k_j)e^{-2it\cos k_j\pm ik_jn}\,dk_j +\\ +\int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}C(\lambda)\eta(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\,d\lambda,\end{aligned} \tag{9.10}$$

где знак «$\pm$» совпадает со знаком n. Промежуток интегрирования выбран таким, чтобы движение налетающей частицы происходило слева направо (см. ниже (9.13)).

Рассмотрим норму последнего выражения в (9.10). Имеем

$$\Big\|\int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}C(\lambda)\eta(n,m,\lambda)e^{-i\lambda t}\,d\lambda\Big\|^2_{l^2(\Gamma)} =$$
$$= \sum_{(n,m)\in\Gamma}\int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}\int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}C(\lambda)\overline{C(\lambda')}\eta(n,m,\lambda)\overline{\eta(n,m,\lambda)}e^{-i(\lambda-\lambda')t}\,d\lambda\,d\lambda'. \tag{9.11}$$

Пользуясь равенством
$$e^{-i(\lambda-\lambda')t}d\lambda = d\big(e^{-i(\lambda-\lambda')t}\big)/(-it),$$
проинтегрируем по частям и, с помощью неравенства Коши–Буняковского и леммы 9.1, получим стремление к нулю слагаемых в (9.11) при $|t|\to\infty$. Следовательно, функция η не играет роли в рассеянии.

Рассмотрим теперь интегралы в (9.10) из суммы $\sum'$. Имеем
$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{0}\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j)\sin k_j\widetilde{C}(k_j)e^{-2it\cos k_j\pm ik_jn}\,dk_j = \widetilde{A}_j^{\pm}\big(k_j^{(0)}\big)\int_{-\pi}^{0}\sin k_j\widetilde{C}(k_j)e^{-2it\cos k_j\pm ik_jn}\,dk_j+\\ +\int_{-\pi}^{0}\big[\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j)-\widetilde{A}_j^{\pm}\big(k_j^{(0)}\big)\big]\sin k_j\widetilde{C}(k_j)e^{-2it\cos k_j\pm ik_jn}\,dk_j,\end{gathered}\tag{9.12}$$
где $k_j^{(0)}$ отвечает λ_0. Выбираем $k_j^{(0)}\in(-\pi,0)$, тогда $\sin k_j^{(0)}<0$ (имеем промежуток $(-\pi,0)$ вместо $(0,\pi)$, поскольку изначально изменен знак оператора H_0, который является конечно-разностной аппроксимацией Δ вместо $-\Delta$ в операторе Шрёдингера). Это обеспечит стандартное движение налетающей волны слева направо (см. ниже). Сравнивая второе слагаемое в правой части (9.12) с (5.3), из следствия леммы 5.1 получаем, что норма данного слагаемого в $l^2(\mathbb{Z})$ при всех t совпадает с
$$\sqrt{2\pi}\big\|\big[\widetilde{A}_j^{\pm}(k_j)-\widetilde{A}_j^{\pm}\big(k_j^{(0)}\big)\big]\sin k_j\widetilde{C}(k_j)\big\|_{L^2(-\pi,0)}$$
и может быть сделана сколь угодно малой равномерно по t выбором носителя функции $C(\lambda)$ в достаточно малой окрестности точки λ_0 при сохранении нормы этой функции в $L^2(-\pi,0)$ (точнее, ниже требуем выполнения равенства (9.14)). Таким образом, для частиц с достаточно локализованным волновым вектором картина рассеяния определяется числами $\widetilde{A}_j^{\pm}\big(k_j^{(0)}\big)$.

Далее, вследствие теоремы о стационарной фазе (см. теорему 1.3 в § 1) для всех n и t таких, что $\big|n/t+2\sin k_j^{(0)}\big|\geqslant\sigma$, где $\sigma>0$ достаточно мало, интеграл в первом слагаемом правой части (9.12) стремится к нулю по норме в $l^2(\mathbb{Z})$ при $|t|\to\infty$. Следовательно, для больших $|t|$ в рассеянии играют роль лишь такие n, для которых
$$-\sigma<n/t+2\sin k_j^{(0)}<\sigma.\tag{9.13}$$

Суммируя сказанное, приходим к следующему описанию рассеяния. Предположим, что
$$\sqrt{2\pi}\big\|2\sin k_{j_0}\widetilde{C}(k_{j_0})\big\|_{L^2(-\pi,0)}=1.\tag{9.14}$$
Тогда (см. следствие леммы 5.1) имеем
$$\|\varphi(n,m,t)\|^2_{l^2(\Gamma)}=1,\quad t\in\mathbb{R}.$$
Поэтому при $t<0$ имеется волновой пакет, отвечающий налетающей с вероятностью 1 частице, локализованный в основном в подмножестве $\mathbb{Z}$ вида (9.13) для $j=j_0$ (норма соответствующей функции стремится к единице в этой области при $t\to-\infty$). При $t\to\infty$ пакет делится на $2n_0$ частей, где n_0 — число k_j таких, что $\lambda_0-2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)$, при этом отраженной волне отвечает коэффициент $A_j^-(\lambda_0)$, а проходящей — коэффициент $A_j^+(\lambda_0)$. Скорость j-го волнового пакета, согласно (9.13), приближенно равна по модулю (в любом направлении) $-2\sin k_j^{(0)}$. В силу предположения (8.3) все скорости различны.

Из сказанного вытекает, что для достаточно малых σ (что соответствует достаточно большой локализации волнового вектора) множества в $\mathbb{Z}$ вида (9.13) не пересекаются. Таким образом, в рассматриваемом квазиодномерном случае наличие поперечных волн приводит не к явлению дифракции (то есть преимущественному распространению волновых пакетов в трехмерном пространстве по конечному числу определенного рода направлений — см. [13]), а к дроблению исходного волнового пакета во времени на конечное число «меньших» пакетов, движущихся один за другим вперед или назад с разными скоростями. Для заданного произвольно малого $\varepsilon > 0$, сужая окрестность точки λ_0, содержащую носитель функции $C(\lambda)$, устремляя $|t|$ к бесконечности, а также используя следствие леммы 5.1, получаем неравенство

$$\Big|1 - \sum{}' \big(\big|\delta_{jj_0} + \widetilde{A}_j^+\big(k_j^{(0)}\big)\big|^2 + \big|\widetilde{A}_j^-\big(k_j^{(0)}\big)\big|^2\big)\big\|2\sqrt{2\pi}\sin k_j \widetilde{C}(k_j)\big\|^2_{L^2(-\pi,0)}\Big| < \varepsilon, \tag{9.15}$$

где δ_{jj_0} — символ Кронекера.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \big\|2\sin k_j \widetilde{C}(k_j)\big\|^2_{L^2(-\pi,0)} &= 4\int_{-\pi}^{0} \sin^2 k_j \Big|C\Big(2\cos k_j + 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)\Big|^2 dk_j = \\ &= \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} \sqrt{4 - \Big(\lambda - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\Big)^2}\,|C(\lambda)|^2\, d\lambda. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Предположим, что выполнено (8.3). Тогда имеет место равенство

$$\sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)} \Big(\big|\delta_{jj_0} + A_j^+(\lambda_0)\big|^2 + \big|A_j^-(\lambda_0)\big|^2\Big)\sqrt{\frac{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)^2}{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Big)^2}} = 1. \tag{9.17}$$

Действительно, выберем в (9.15) $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, а также соответствующие последовательности стягивающихся к точке λ_0 ее окрестностей и функций $C_n(\lambda)$ с носителями в этих окрестностях таких, что выполнено (9.14). Переходя в (9.15) к пределу с учетом (9.14), (9.16), где также переходим к пределу, получаем равенство (9.17).

Теорема 9.1. *Пусть выполнено* (8.3). *Тогда для вероятностей прохождения P_+ и отражения $P_- = 1 - P_+$ в точке λ_0 справедливы формулы*

$$\begin{aligned} P_+ &= \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)} \Big|\delta_{jj_0} + A_j^+(\lambda_0)\Big|^2 \sqrt{\frac{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)^2}{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Big)^2}}, \\ P_- &= \sum_{j:\lambda_0 - 2\cos\frac{\pi j}{N+1}\in(-2,2)} \Big|A_j^-(\lambda_0)\Big|^2 \sqrt{\frac{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)^2}{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Big)^2}}, \end{aligned} \tag{9.18}$$

где $A_j^\pm(\lambda)$ определяются равенством (9.6).

Следствие 9.1. *Имеем*

$$\sqrt{\frac{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j}{N+1}\Big)^2}{4 - \Big(\lambda_0 - 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}\Big)^2}} = \left|\frac{\sin k_j^{(0)}}{\sin k_{j_0}^{(0)}}\right|$$

— отношение скоростей.

Для малой константы связи ε в потенциале εV при определенном соотношении между ε и λ существуют простые формулы как для решения уравнения Липпмана–Швингера, так и для вероятностей отражения и прохождения вблизи точек $\lambda^\pm_{j_0 0} = \pm 2 + 2\cos\dfrac{\pi j_0}{N+1}$, где j_0 взято из (9.2).

Л е м м а 9.2. *Предположим, что для* j_0 *из* (9.2) *и всех достаточно малых* ε *справедливо равенство* $k_{j_0} = A\varepsilon$ *в случае знака «+» или* $\widetilde{k}_{j_0} = A\varepsilon$ *в случае знака «−», где* $\widetilde{k}_{j_0} = -\pi - k_{j_0}$ (*см. конец доказательства теоремы* 8.2), $A \neq 0$ — *вещественная константа. Тогда для решения* ψ *уравнения Липпмана–Швингера* (9.1) *имеет место равенство*

$$\psi(n,m,\lambda) = \left(1 - \frac{(\pm 1)^n a^2 v_{j_0}^{\pm}}{2iA + a^2 v_{j_0}^{+}}\right) a \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) + O(\varepsilon),$$

где

$$v_{j_0}^{\pm} = \sum_{(n,m)\in\Gamma} (\pm 1)^n V(n,m) \sin^2\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности докажем утверждение для знака «+». Действуя, как и при доказательстве теоремы 8.2 и в тех же обозначениях, перепишем уравнение (9.3) в виде

$$\varphi(n,m,\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) - \frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)}{2ik_{j_0}} \times$$
$$\times \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \varphi(n',m',\lambda) + \varepsilon K(k_{j_0}) \varphi(n,m,\lambda),$$

откуда, для достаточно малых ε,

$$\xi(n,m,\lambda) = (1 - \varepsilon K(k_{j_0}))\, \varphi(n,m,\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) -$$
$$- \frac{\varepsilon a^2 \sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)}{2ik_{j_0}} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times (1 - \varepsilon K(k_{j_0}))^{-1}\, \xi(n',m',\lambda) = \varphi_0(n,m,\lambda) + C\sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right).$$

Следовательно,

$$C = -\Big[\varepsilon a^3 \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times (1 - \varepsilon K(k_{j_0}))^{-1} \left(\sqrt{|V(n',m')|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) e^{in' k_{j_0}}\right)\Big] \Big/$$
$$\Big[2ik_{j_0} + \varepsilon a^2 \sum_{(n',m')\in\Gamma} \sqrt{V(n',m')} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) \times$$
$$\times (1 - \varepsilon K(k_{j_0}))^{-1} \left(\sqrt{|V(n',m')|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right)\right)\Big]$$

и, далее,

$$\varphi(n,m,\lambda) = (1 - \varepsilon K(k_{j_0}))^{-1} \left(\varphi_0(n,m,\lambda) + C\sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right)\right) =$$
$$= \left(a e^{ik_{j_0} n} - \frac{a^3 \sum\limits_{(n',m')\in\Gamma} V(n',m') \sin^2\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) e^{in' k_{j_0}} + O(\varepsilon)}{2iA + a^2 \sum\limits_{(n',m')\in\Gamma} V(n',m') \sin^2\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) + O(\varepsilon)} \right) \times$$
$$\times \sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) + O(\varepsilon) =$$
$$= \left(1 - \frac{a^2 v_{j_0}^{+}}{2iA + a^2 v_{j_0}^{+}}\right) a \sqrt{|V(n,m)|} \sin\left(\frac{\pi j_0 m}{N+1}\right) + O(\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 9.2. *В условиях леммы 9.2 справедливо равенство*

$$P_- = \frac{a^4 \left(v_{j_0}^{\pm}\right)^2}{4A^2 + a^4 \left(v_{j_0}^{+}\right)^2} + O(\varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем (см. (9.6)) $A_j^-(\lambda) = O(\varepsilon)$, $j \neq j_0$ (если $k_{j_0} = O(\varepsilon)$, то, как легко проверить, соотношение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} k_j = 0$ для $j \neq j_0$ невозможно). Далее, вследствие (9.6) и леммы 9.2 имеем

$$A_{j_0}^-(\lambda) = -\frac{a^2}{2iA} \sum_{(n',m')\in\Gamma} (\pm 1)^{n'} \sin^2\left(\frac{\pi j_0 m'}{N+1}\right) V(n',m') \left(1 - \frac{(\pm 1)^{n'} a^2 v_{j_0}^{\pm}}{2iA + a^2 v_{j_0}^{+}}\right) + O(\varepsilon) =$$
$$= -\frac{a^2}{2iA}\left(v_{j_0}^{\pm} - \frac{a^2 v_{j_0}^{+} v_{j_0}^{\pm}}{2iA + a^2 v_{j_0}^{+}}\right) + O(\varepsilon) = -\frac{a^2 v_{j_0}^{\pm}}{2iA + a^2 v_{j_0}^{+}} + O(\varepsilon).$$

Применение формулы (9.18) завершает доказательство.

С л е д с т в и е 9.2. *Волновые операторы* $\Omega^{\pm}(H_\varepsilon, H_0)$ *существуют и полны. Действительно, в силу теоремы Куроды–Бирмана* [10] *достаточно доказать, что*

$$R_\varepsilon(i) - R_0(i) = -\varepsilon R_0(i) V R_\varepsilon(i) = -\varepsilon R_0(i)\sqrt{|V|}\sqrt{V} R_\varepsilon(i) \tag{9.19}$$

есть оператор со следом. Ядра операторов $R_0(i)\sqrt{|V|}$, $\sqrt{V}R_0(i)$ *суммируемы с квадратом, поэтому эти операторы являются операторами Гильберта–Шмидта. Следовательно,*

$$\sqrt{V} R_\varepsilon(i) = \sqrt{V} R_0(i)\left(1 - \varepsilon V R_\varepsilon(i)\right)$$

также есть оператор Гильберта–Шмидта, а потому оператор (9.19) *является оператором со следом.*

§ 10. Вспомогательные конструкции и утверждения

Последние три параграфа работы посвящены изучению задачи рассеяния для разностного оператора

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}(n) + \varepsilon \mathbb{W}(n), \quad n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3,$$

действующего в $l^2(\mathbb{Z}^3)$. Здесь $\mathbb{H}_0$ действует по формуле

$$(\mathbb{H}_0\psi)(n) = \psi(n_1+1, n_2, n_3) + \psi(n_1-1, n_2, n_3) + \psi(n_1, n_2+1, n_3) + \psi(n_1, n_2-1, n_3) +$$
$$+ \psi(n_1, n_2, n_3+1) + \psi(n_1, n_2, n_3-1),$$

$\mathbb{V}(n)$ — вещественный периодический потенциал по всем переменным n_j, $j = 1, 2, 3$, с периодом $T \geqslant 1$, $\mathbb{W}(n)$ — вещественный периодический по переменным n_1, n_2 с периодом T ненулевой потенциал, удовлетворяющий оценке

$$|\mathbb{W}(n)| \leqslant C e^{-\alpha|n_3|}, \quad \alpha > 0, \tag{10.1}$$

$\varepsilon > 0$ — малый параметр. Оператор $\mathbb{H}$ представляет собой гамильтониан электрона в периодической слоистой структуре в конечно-разностном приближении.

В этом параграфе приведены, в основном, известные вспомогательные конструкции и утверждения, необходимые для дальнейших рассуждений и используемые в доказательствах.

Рассмотрим унитарный оператор (ср. [17, 25])

$$U : l^2(\mathbb{Z}^3) \to l^2(\Omega_0) \otimes L^2(\Omega_0^*) \stackrel{def}{=} \int_{\Omega_0^*}^{\otimes} l^2(\Omega_0)\,dk,$$

$$\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^3) \mapsto (U\varphi)(n,k) = \widehat{\varphi}(n,k) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^3} e^{-iT(\nu,k)} \varphi(n + T\nu)\big|_{\Omega_0\times\Omega_0^*},$$

где $\Omega_0 = \{0, 1, \dots, T-1\}^3$ и $\Omega_0^* = [0, 2\pi/T)^3$ — ячейки в прямой и обратной решетках соответственно. Положим $\mathbb{H}_{\mathbb{V}} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}(n)$. Оператор $U\mathbb{H}_{\mathbb{V}}U^{-1}$ задается семейством операторов $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k) = \mathbb{H}_0(k) + \mathbb{V}$, действующих в $l^2(\Omega_0)$, где $k = (k_1, k_2, k_3) \in \Omega_0^*$ — квазиимпульс, а оператор $\mathbb{H}_0(k)$ имеет тот же вид, что и оператор $\mathbb{H}_0$, но с использованием свойства блоховости

$$\widehat{\varphi}(n + Tn_0, k) = e^{iT(n_0,k)}\widehat{\varphi}(n, k) \tag{10.2}$$

в случае $n_j \pm 1 \notin \{0, \dots, T-1\}$, $j = 1, 2, 3$. При этом говорят, что оператор $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ разложен в прямом интеграле пространств $\displaystyle\int_{\Omega_0^*}^{\otimes} l^2(\Omega_0)dk$.

Для исследования оператора $\mathbb{H}$ потребуется также унитарный оператор (ср. [31, 32])

$$U_{\|} : l^2(\mathbb{Z}^3) \to l^2(\Omega) \otimes L^2(\Omega^*) \stackrel{def}{=} \int_{\Omega^*}^{\otimes} l^2(\Omega)dk_{\|}, \tag{10.3}$$

$$\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^3) \mapsto (U_{\|}\varphi)(n, k_{\|}) = \tilde{\varphi}(n, k_{\|}) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} e^{-iT(\mu, k_{\|})}\varphi(n + T(\mu, 0))\big|_{\Omega\times\Omega^*},$$

где $\Omega = \{0, 1, \dots, T-1\}^2 \times \mathbb{Z}$, $\Omega^* = [0, 2\pi/T)^2$, $k_{\|} = (k_1, k_2)$. Свойство блоховости здесь имеет вид

$$\tilde{\varphi}(n + T(n_{0\|}, 0), k_{\|}) = e^{iT(n_{0\|}, k_{\|})}\tilde{\varphi}(n, k_{\|}). \tag{10.4}$$

Оба оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ и $\mathbb{H}$ могут быть разложены в прямом интеграле пространств $\displaystyle\int_{\Omega^*}^{\otimes} l^2(\Omega)dk_{\|}$ в семейства операторов $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_{\|})$ и $\mathbb{H}(k_{\|})$ соответственно.

Обозначим через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ спектр и существенный спектр оператора A соответственно. Заметим, что $\sigma(\mathbb{H}_V(k_{\|}))$ имеет «зонную структуру» (см. [17]), то есть справедливо равенство

$$\sigma(\mathbb{H}_V(k_{\|})) = \bigcup_{k_3 \in [0, 2\pi/T)} \sigma(\mathbb{H}_V(k)),$$

и спектр $\sigma(\mathbb{H}_V(k_{\|}))$ состоит, таким образом, из объединения промежутков (зон). Подобно [31] можно доказать следующее равенство:

$$\sigma_{ess}(\mathbb{H}(k_{\|})) = \sigma(\mathbb{H}_V(k_{\|})).$$

Оператор $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k)$, действующий в конечномерном пространстве $l^2(\Omega_0) \cong \mathbb{C}^{T^3}$, является самосопряженным, и, следовательно, в $l^2(\Omega_0)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\psi_m(n, k)$ оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_m(k)$, $m = 1, \dots, T^3$, занумерованных, с учетом кратности, в порядке возрастания. Ядро резольвенты (функцию Грина) оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k)$ обозначим через

$$\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k, \lambda) = \sum_{m=1}^{T^3} \frac{\psi_m(n, k)\overline{\psi_m(n', k)}}{\lambda_m(k) - \lambda}. \tag{10.5}$$

Через $\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k_{\|}, \lambda)$ будем обозначать функцию Грина оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_{\|})$. Связь между двумя функциями Грина выражается формулами (ср. [25])

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n - (0, 0, Tm_3), n', k_{\|}, \lambda) = \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n' + (0, 0, Tm_3), k_{\|}, \lambda) = \\ = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi/T} \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k, \lambda)e^{-iTm_3k_3}dk_3,\end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k, \lambda) = \sum_{m_3 \in \mathbb{Z}} e^{iTm_3k_3}\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n - (0, 0, Tm_3), n', k_{\|}, \lambda).$$

Пусть $\lambda_0 = \lambda_{m_0}(k_0)$, где $k_0 = (k_{10}, k_{20}, k_{30})$ — невырожденное собственное значение оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_0)$, отвечающее нормированному собственному вектору $\psi_{m_0}(n, k_0)$. Можно считать, что функции $\lambda_{m_0}(k)$, $\psi_{m_0}(n, k)$ аналитически зависят от k в некоторой окрестности точки k_0 (см. [17]). В дальнейшем предполагается, что

$$\partial\lambda_{m_0}(k_0)/\partial k_3 = 0, \quad \partial^2\lambda_{m_0}(k_0)/\partial k_3^2 \neq 0. \tag{10.7}$$

В силу (10.7) и теоремы о неявной функции [6] уравнение $\partial\lambda_{m_0}(k)/\partial k_3 = 0$ задает в окрестности точки k_0 поверхность, описываемую аналитической функцией $k_3^{(0)} = k_3^{(0)}(k_\parallel)$, где $k_\parallel$ принадлежит некоторой окрестности точки $k_{0\parallel} = (k_{10}, k_{20})$. Далее, будем предполагать, что в окрестности точки k_0 равенство $\lambda_m(k) = \lambda_0$ при фиксированном $k_\parallel$ может выполняться не более чем в конечном числе точек $k_{m,\alpha} = \left(k_\parallel, k_3^{(m,\alpha)}\right)$, $\alpha = 1, \ldots, A_m$, в которых для $m \neq m_0$ при этом выполнено соотношение $\partial\lambda_m(k_{m,\alpha})\big/\partial k_3 \neq 0$, а собственные значения $\lambda_m(k_{m,\alpha})$ невырождены. Множество точек $k_{m,\alpha}$, в которых данные производные положительны (соответственно отрицательны) обозначим через N_+ (соответственно через N_-). Далее, произвольные $n, n' \in \Omega$ запишем в виде

$$n = n_0 + T(0,0,\nu), \quad n' = n_0' + T(0,0,\nu'),$$

где $n_0, n_0' \in \Omega_0$, $\nu, \nu' \in \mathbb{Z}$. Введем обозначение (только для $\mathbb{W}$) $\sqrt{\mathbb{W}} = \sqrt{|\mathbb{W}|}\mathrm{sgn}\mathbb{W}$.

Согласно [31], уравнение $\lambda_{m_0}(k) = \lambda$, рассматриваемое относительно k_3, имеет для $k_\parallel$ из окрестности точки $k_{0\parallel}$ ровно два решения $k_{3j} = k_{3j}(k_\parallel, \lambda)$, $j = 1, 2$, аналитически зависящие от $k_\parallel, \lambda$ там, где $k_{31} \neq k_{32}$, и сливающиеся, если $k = k_0$. Положим $\xi_j = k_{3j} - k_3^{(0)}(k_\parallel)$, $j = 1, 2$, тогда имеем $\xi_2 = f(\xi_1)$, где f — аналитическая функция такая, что $f'(0) = -1$ (см. [31]). Таким образом, $\xi_2 = -\xi_1 + o(\xi_1)$. В дальнейшем вместо параметра λ будем часто пользоваться параметром ξ_1. Аргумент $k_\parallel$ у функции $k_3^{(0)}$ для краткости обычно будет опускаться.

Из (10.5), (10.6), как и в [31,33], можно получить следующие утверждения, в которых приведены несколько отличающиеся друг от друга формулы для функции Грина $\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k_\parallel, \lambda)$.

Л е м м а 10.1. *Для точек $\lambda \neq \lambda_0$ из достаточно малой окрестности точки λ_0 имеет место формула*

$$\begin{gathered}
\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n_0 + T(0,0,\nu), n_0' + T(0,0,\nu'), k_\parallel, \lambda + i0) = \\
= -\frac{T}{i} \sum_{m: k_{m,\alpha} \in N_+} \frac{\psi_m(n_0 + T(0,0,\nu), k_{m,\alpha})\overline{\psi_m(n_0' + T(0,0,\nu'), k_{m,\alpha})}}{\partial\lambda_m(k_{m,\alpha})/\partial k_3} \times \\
\times \theta(\nu - \nu' - 1) + \\
+ \frac{T}{i} \sum_{m: k_{m,\alpha} \in N_-} \frac{\psi_m(n_0 + T(0,0,\nu), k_{m,\alpha})\overline{\psi_m(n_0' + T(0,0,\nu'), k_{m,\alpha})}}{\partial\lambda_m(k_{m,\alpha})/\partial k_3} \times \\
\times \theta(\nu' - \nu) + \gamma(n, n', k_\parallel, \lambda),
\end{gathered}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, а γ удовлетворяет оценке

$$|\gamma(n, n', k_\parallel, \lambda)| \leqslant Ce^{-\sigma|\nu - \nu'|}, \quad \sigma > 0,$$

причем

$$\sqrt{\mathbb{W}(n)}\gamma(n, n', k_\parallel, \lambda), \quad \gamma(n, n', k_\parallel, \lambda)\sqrt{\mathbb{W}(n')}$$

аналитически зависят от $(k_\parallel, \lambda)$ из некоторой окрестности точки $(k_{0\parallel}, \lambda_0)$ как $l^2(\Omega \times \Omega)$-значные функции.

В следующей лемме опускаем $\pm i0$ в выражении $\xi_1 \pm i0$ (см. ниже замечание перед леммой 11.1).

Л е м м а 10.2. *Для точек* $(k_\|, \xi_1)$, *где* $\xi_1 \neq 0$, *из достаточно малой окрестности точки* $(k_{0\|}, 0)$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k_\|, \xi_1) = -\frac{T\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_3^{(0)}))\overline{\psi_{m_0}(n', (k_\|, k_3^{(0)})}}{i\xi_1 \partial^2 \lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2} + g(n, n', k_\|, \xi_1),$$

причем $\sqrt{|\mathbb{W}(n)|}g(n, n', k_\|, \xi_1)\sqrt{\mathbb{W}(n')}$ *является* $l^2(\Omega \times \Omega)$*-значной аналитической функцией от* $(k_\|, \xi_1)$ *в окрестности точки* $(k_{0\|}, 0)$.

§ 11. Уравнение Липпмана–Швингера для слабо возмущенного оператора

В этом параграфе доказаны существование и единственность решения модифицированного уравнения Липпмана–Швингера, а также найдена асимптотическая формула для его решения.

Уравнение Липпмана–Швингера в $l^2(\mathbb{Z}^3)$, отвечающее оператору $\mathbb{H}$, запишем в виде

$$\psi(n) = \psi_{m_0}(n, k) - \varepsilon \sum_{n' \in \mathbb{Z}^3} \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \lambda + i0)\mathbb{W}(n')\psi(n'), \tag{11.1}$$

где $\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \lambda)$ — функция Грина оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}$ в $l^2(\mathbb{Z}^3)$, $\lambda = \lambda_{m_0}(k)$ принадлежит внутренности одной из зон, причем выбираем $k_3 = k_{31}$ (см. выше). Применяя к (11.1) (формально) оператор $U_\|$ и пользуясь (10.3), (10.4), получим уравнение Липпмана–Швингера в ячейке Ω:

$$\tilde{\psi}(n, \tilde{k}_\|) = \frac{2\pi}{T}\psi_{m_0}(n, k)\delta_{per}(k_\| - \tilde{k}_\|) - \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} \mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', \tilde{k}_\|, \lambda + i0)\mathbb{W}(n')\tilde{\psi}(n', \tilde{k}_\|), \tag{11.2}$$

где

$$\delta_{per}(k_\|) \stackrel{def}{=} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} \delta(k_\| + \frac{2\pi}{T}\mu)$$

и

$$\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n, n', k_\|, \lambda) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} e^{iT(\mu, k_\|)}\mathbb{G}_{\mathbb{V}}(n - T(\mu, 0), n', \lambda)$$

— функция Грина оператора $\mathbb{H}_{\mathbb{V}}(k_\|)$ (ср. [25]).

Полагая $k_3 = k_{31} = k_3^{(0)}(k_\|) + \xi_1$, запишем, с помощью леммы 10.2, уравнение (11.2) для $k_\|$, близких к $k_{0\|}$, и малых ξ_1 в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(n, \tilde{k}_\|) = \frac{2\pi}{T}\psi_{m_0}(n, k)\delta_{per}(k_\| - \tilde{k}_\|) &+ \\ + \frac{\varepsilon T\psi_{m_0}(n, (\tilde{k}_\|, k_3^{(0)}))}{i\xi_1\partial^2\lambda_{m_0}(\tilde{k}_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2} &\sum_{n' \in \Omega} \overline{\psi_{m_0}(n', (\tilde{k}_\|, k_3^{(0)}))}\mathbb{W}(n')\tilde{\psi}(n', \tilde{k}_\|) - \\ &- \varepsilon \sum_{n' \in \Omega} g(n, n', \tilde{k}_\|, \xi_1)\mathbb{W}(n')\tilde{\psi}(n', \tilde{k}_\|).\end{aligned} \tag{11.3}$$

Обозначим через $K(\tilde{k}_\|, \xi_1)$ оператор с ядром

$$-\sqrt{|\mathbb{W}(n)|}g(n, n', \tilde{k}_\|, \xi_1)\sqrt{\mathbb{W}(n')}.$$

Введем обозначения $\varphi = \sqrt{|\mathbb{W}|}\tilde{\psi}$, $\varphi_{m_0} = \sqrt{|\mathbb{W}|}\psi_{m_0}$ и положим

$$\theta(n, \tilde{k}_\|) = (1 - \varepsilon K(\tilde{k}_\|, \xi_1))\varphi(n, \tilde{k}_\|). \tag{11.4}$$

Для новой неизвестной функции φ уравнение (11.3) примет вид

$$\begin{aligned}\varphi(n, \tilde{k}_\|) = \frac{2\pi}{T}\varphi_{m_0}(n, k)\delta_{per}(k_\| - \tilde{k}_\|) + \frac{\varepsilon T\varphi_{m_0}(n, (\tilde{k}_\|, k_3^{(0)}))}{i\xi_1\partial^2\lambda_{m_0}(\tilde{k}_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2} \times \\ \times \sum_{n' \in \Omega} \sqrt{\mathbb{W}(n')}\,\overline{\psi_{m_0}(n', (\tilde{k}_\|, k_3^{(0)}))}\,\varphi(n', \tilde{k}_\|) + \varepsilon K(\tilde{k}_\|, \xi_1)\varphi(n, \tilde{k}_\|).\end{aligned} \tag{11.5}$$

Решение φ уравнения (11.5) будем искать в классе $l^2(\Omega)$-значных обобщенных периодических функций с периодом $2\pi/T$ по переменным $\tilde{k}_j$, $j = 1,2$, поскольку такой функцией является «правая часть» уравнения (11.5) $(2\pi/T)\varphi_{m_0}(n,k)\delta_{per}(k_\parallel - \tilde{k}_\parallel)$. Поэтому поясним действие операторнозначной функции K в (11.4), (11.5) на векторнозначную обобщенную функцию.

Заметим, что K можно (не единственным образом) представить в виде ряда (см. [38])

$$K(\tilde{k}_\parallel, \xi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m(\tilde{k}_\parallel) A_m,$$

где $\{\lambda_m\} \in l^1$, $\{\varphi_m\}$ и $\{A_m\}$ — сходящиеся к нулю последовательности в $\mathcal{E}(\omega)$ и $L(l^2(\Omega))$ соответственно. Тогда

$$(K(\tilde{k}_\parallel, \xi_1)\varphi(n, \tilde{k}_\parallel))(\psi) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m \varphi(n, \tilde{k}_\parallel)(\varphi_m \psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Корректность такого действия нетрудно обосновать с помощью теории топологических тензорных произведений (см. [40–43]).

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\xi_1 = A\varepsilon, \quad A = \mathrm{const} \neq 0, \tag{11.6}$$

тогда $\xi_2 = -A\varepsilon + o(\varepsilon)$ (см. рассуждения перед леммой 10.1). Данное предположение означает, что для малых потенциалов рассматриваются частицы с малой третьей компонентой скорости (см. ниже). Заметим, что выбор знака $\lambda + i0$ в уравнении (11.2) означает выбор определенного знака у $\xi_1 \pm i0$. Принятое условие (11.6) делает полюс в точке $\xi_1 = 0$ (см. (11.3)) устранимым. Таким образом, выбор знака не играет роли и в дальнейшем опускается.

Л е м м а 11.1. *Предположим, что выполнено* (11.6). *Тогда для $\tilde{k}_\parallel$ из некоторой окрестности точки $k_{0\parallel}$ и достаточно малых ε существует единственное решение уравнения Липпмана–Швингера в ячейке Ω (11.2) вида*

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(n, \tilde{k}_\parallel) = \frac{2\pi}{T}\psi_{m_0}\big(n, \big(k_\parallel, k_3^{(0)}\big)\big) \times \\ \times \left[\frac{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\parallel, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\parallel, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} + O(\varepsilon)\right]\delta_{per}(k_\parallel - \tilde{k}_\parallel),\end{aligned} \tag{11.7}$$

где

$$\mathbb{W}_0 = T\Big(\psi_{m_0}\big(n, \big(k_\parallel, k_3^{(0)}\big)\big), \mathbb{W}(n)\psi_{m_0}\big(n, \big(k_\parallel, k_3^{(0)}\big)\big)\Big),$$

а величина $\sqrt{\mathbb{W}(n)}O(\varepsilon)$ аналитически зависит от $k_\parallel, \varepsilon$ как $l^2(\Omega)$–значная функция и удовлетворяет оценке

$$\|\sqrt{\mathbb{W}(n)}O(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon, \quad C = \mathrm{const}. \tag{11.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (11.4) и (11.5) имеем в окрестности точки $k_{0\parallel}$

$$\theta = \frac{2\pi}{T}\varphi_{m_0}(n,k)\delta_{per}\big(k_\parallel - \tilde{k}_\parallel\big) + C\varphi_{m_0}\big(n, \big(\tilde{k}_\parallel, k_3^{(0)}\big)\big), \tag{11.9}$$

где C не зависит от n. Подставляя (11.9) в (11.5), находим выражение для C и затем получаем формулу

$$\begin{aligned}\varphi(n, \tilde{k}_\parallel) = (1 - \varepsilon K)^{-1}\theta(n, \tilde{k}_\parallel) = \\ = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(\tilde{k}_\parallel, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(\tilde{k}_\parallel, k_3^{(0)}\big) - \mathbb{W}_0} + O(\varepsilon)\right)\varphi_{m_0}\big(n, \big(\tilde{k}_\parallel, k_3^{(0)}\big)\big)\delta_{per}\big(k_\parallel - \tilde{k}_\parallel\big).\end{aligned}$$

Аналитическая зависимость $\sqrt{\mathbb{W}(n)}O(\varepsilon)$ от $k_\parallel, \varepsilon$ следует из леммы 10.1, а оценка (11.8) очевидна.

§ 12. Рассеяние для слабо возмущенного оператора

В данном параграфе описана картина рассеяния для оператора $\mathbb{H}$ в случае малого ε и малой перпендикулярной составляющей угла падения частицы на потенциальный барьер $\varepsilon\mathbb{W}$. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения.

Пользуясь (11.2), (11.7), а также леммой 10.1, запишем решение ψ уравнения (11.2) в виде, подходящем для исследования рассеяния. Имеем, для $n_0, n_0' \in \Omega_0$,

$$\tilde{\psi}\big(n_0 + T(0,0,\nu), \tilde{k}_\|\big) = \frac{2\pi}{T}\Big[1 + \frac{T}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} \times$$

$$\times \sum_{n' \in \Omega, \nu' \leqslant \nu - 1} \big|\psi_{m_0}\big(n_0' + T(0,0,\nu'), \big(k_\|, k_3^{(0)}\big)\big)|^2 \mathbb{W}(n_0' + T(0,0,\nu'))\Big]\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31}))\delta_{per}\big(k_\| - \tilde{k}_\|\big) +$$

$$+ \frac{2\pi}{T}\Big[\frac{T}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} \sum_{n' \in \Omega, \nu' \geqslant \nu} \big|\psi_{m_0}\big(n_0' + T(0,0,\nu'), \big(k_\|, k_3^{(0)}\big)\big)\big|^2 \mathbb{W}(n_0' + T(0,0,\nu'))\Big] \times$$

$$\times \psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{32}))\delta_{per}\big(k_\| - \tilde{k}_\|\big) + O(\varepsilon)\delta_{per}\big(k_\| - \tilde{k}_\|\big). \tag{12.1}$$

Здесь η является суммой слагаемых, порожденных слагаемым γ в лемме 10.1, а также слагаемыми, отвечающими $k_{m,\alpha} \neq (k_\|, k_{3j})$, $j = 1, 2$ (у этих слагаемых знаменатели по условию не обращаются в нуль при $\lambda_m(k) = \lambda_0$, и, таким образом, все они войдут в состав $O(\varepsilon)$). Легко видеть, что величина $O(\varepsilon)$ аналитически зависит от $(k_\|, \varepsilon)$, близких к $(k_{0\|}, 0)$.

Используя (10.3), (10.4), (12.1), найдем решение исходного уравнения Липпмана–Швингера (11.1) в $\mathbb{Z}^2$ (точный смысл интеграла от периодической обобщенной функции см. в [34]). Имеем для $n = \overline{n} + T(\mu_\|, 0)$, где $\overline{n} = n_0 + T(0,0,\mu_3) \in \Omega$, $n_0 \in \Omega_0$,

$$\begin{gathered}
\psi(n) = \frac{T}{2\pi}\int_{\Omega^*} e^{iT(\mu_\|, \tilde{k}_\|)}\tilde{\psi}\big(\overline{n}, \tilde{k}_\|\big)d\tilde{k}_\| = \Big[1 + \frac{T}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, \partial k_3^2\big) - \mathbb{W}_0} \times \\
\times \sum_{n' \in \Omega, \mu_3' \leqslant \mu_3 - 1} \big|\psi_{m_0}\big(n_0' + T(0,0,\mu_3'), \big(k_\|, k_3^{(0)}\big)\big)\big|^2 \mathbb{W}(n_0' + T(0,0,\mu_3'))\Big]\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31})) + \\
+ \Big[\frac{T}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^2\big) - \mathbb{W}_0} \sum_{n' \in \Omega, \mu_3' > \mu_3} \big|\psi_{m_0}\big(n_0' + T(0,0,\mu_3'), \big(k_\|, k_3^{(0)}\big)\big)\big|^2 \times \\
\times \mathbb{W}(n_0' + T(0,0,\mu_3'))\Big]\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{32})) + O(\varepsilon).
\end{gathered} \tag{12.2}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Л е м м а 12.1. *В условиях леммы* 11.1 *имеем равенства*

$$\begin{gathered}
\psi(n) = a_+\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31})) + \eta_+(n) + O(\varepsilon), \quad n_3 \geqslant 0, \\
\psi(n) = \psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{31})) + a_-\psi_{m_0}(n, (k_\|, k_{32})) + \eta_-(n) + O(\varepsilon), \quad n_3 < 0,
\end{gathered} \tag{12.3}$$

где

$$a_+ = \frac{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} = \frac{i\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3}{i\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3 - \varepsilon\mathbb{W}_0} + O(\varepsilon),$$

$$a_- = \frac{\mathbb{W}_0}{iA\partial^2\lambda_{m_0}\big(k_\|, k_3^{(0)}\big)/\partial k_3^2 - \mathbb{W}_0} = \frac{\varepsilon\mathbb{W}_0}{i\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3 - \varepsilon\mathbb{W}_0} + O(\varepsilon),$$

а функции $\eta_\pm(n) = \eta_\pm(n, k)$ удовлетворяют неравенству (10.1) *и аналитически зависят от k как $l^2(\Omega_\pm)$-значные функции, где $\Omega_+ = \Omega \cap \{n_3 \geqslant 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{n_3 < 0\}$.*

Из рассмотрения нестационарного уравнения Шрёдингера и волновых пакетов вытекает равенство $P_\pm = |a_\pm|^2$. Отсюда получаем теорему.

Т е о р е м а 12.1. *Имеют место равенства*

$$P_+ = \frac{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2}{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2 + \mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon) = \frac{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2}{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2 + \varepsilon^2\mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon),$$

$$P_- = |a_-|^2 = \frac{\mathbb{W}_0^2}{A^2(\partial^2\lambda_{m_0}(k_\|, k_3^{(0)})/\partial k_3^2)^2 + \mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2\mathbb{W}_0^2}{(\partial\lambda_{m_0}(k_\|, k_{31})/\partial k_3)^2 + \varepsilon^2\mathbb{W}_0^2} + O(\varepsilon).$$

Список литературы

1. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31. № 10. P. 6207–6215.
2. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. № 5. 056611 (7 p).
3. Bellissard J., Schulz-Baldes H. Scattering theory for lattice operators in dimension $d \geqslant 3$ // Rev. Math. Phys. 2012. Vol. 24. 1250020 (51 p).
4. Karachalios N.I. The number of bound states for a discrete Schrödinger operator on Z_N, $N \geqslant 1$, lattices // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. № 45. 455201.
5. Ziletti A., Borgonovi F., Celardo G.L., Izrailev F.M., Karlan L., Zelevinsky V.G. Coherent transport in multi-branch circuits // Phys. Rev. B. 2012. Vol. 85. № 5. 052201 (5 p).
6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides // arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. 2010.
7. Чубурин Ю.П. Об одном дискретном операторе Шрёдингера на графе // Теор. и матем. физика. 2010. Т. 165. № 1. С. 119–133.
8. Арсеньев А.А. Резонансы и туннелирование при рассеянии на квантовом бильярде в приближении сильной связи // Теор. и матем. физика. 2004. Т. 141. № 1. С. 100–112.
9. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О спектре двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Теор. и матем. физика. 2008. Т. 155. № 2. С. 287–300.
10. Chung F., Yau S.-T. Discrete Green's Function // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2000. Vol. 91. № 1–2. P. 191–214.
11. Rivkind A., Krivolapov Y., Fishman S., Soffer A. Eigenvalue repulsion estimates and some applications for the one-dimensional Anderson model // J. Phys. A.: Math. Theor. 2011. Vol. 44. № 30. 305206 (19 p).
12. Rabinovich V.S., Roch S. Essential spectra and exponential estimates of eigenfunctions of lattice operators of quantum mechanics // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. № 38. 385207 (21 p).
13. Dutkay D.E., Jorgensen P.E.T. Spectral theory for discrete Laplacians // Complex Analysis and Operator Theory. 2010. Vol. 4. № 1. P. 1–38.
14. Evans M., Harrell II. On the behavior at infinity of solutions to difference equations in Schrödinger form // arXiv:1109.4691v1 [math.CA]. 2011.
15. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 446 с.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
18. Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П. Квазиуровни дискретного оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом на графе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2009. Вып. 3. С. 104–113.
19. Тинюкова Т.С. Квазиуровни дискретного оператора Шрёдингера для квантового волновода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 88–97.
20. Тинюкова Т.С. Уравнение Липпмана–Швингера для квантовых проволок // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 99–104.
21. Тинюкова Т.С. Рассеяние в случае дискретного оператора Шрёдингера для пересекающихся квантовых проволок // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 74–84.
22. Тинюкова Т.С. Дискретное уравнение Шрёдингера для квантового волновода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 80–93.
23. Tinyukova T.S., Chuburin Yu.P. Electron scattering by a crystal layer // Theor. Math. Phys. 2013. Vol. 176. № 3. P. 1207–1219.
24. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 392 с.

25. Baranova L.Y., Chuburin Y.P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A.: Math. Theor. 2008. Vol. 41. 435205 (11 p).
26. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. 568 с.
27. Гатауллин Т.М., Карасев М.В. О возмущении квазиуровней оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом // Теор. и матем. физика. 1971. Т. 9. № 2. С. 252–263.
28. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 567 с.
29. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 395 с.
30. Морозова Л.Е., Чубурин Ю.П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 85–94.
31. Чубурин Ю.П. О малых возмущениях оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1997. Т. 110. № 3. С. 443–453.
32. Chuburin Yu.P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator // Commun. Math. Phys. 2004. Vol. 249. P. 497–510.
33. Чубурин Ю.П. О решениях уравнения Шрёдингера в случае полуограниченного кристалла // Теор. и матем. физика. 1994. Т. 98. № 1. С. 38–47.
34. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
35. Schwartz L. Theorie des distributions a valeurs vectoriels I // Ann. Inst. Fourier. 1958. Vol. 7. P. 1–142.
36. Schwartz L. Theorie des distributions a valeurs vectoriels II // Ann. Inst. Fourier. 1958. Vol. 8. P. 1–210.
37. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. American Mathematical Society, 1979.
38. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.

Поступила в редакцию 21.08.2013

REFERENCES

1. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings, *Phys. Rev. B.*, 1985, vol. 31, no. 10, pp. 6207–6215.

2. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays, *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 72, no. 5, 056611 (7 p).

3. Bellissard J., Schulz-Baldes H. Scattering theory for lattice operators in dimension $d \geqslant 3$, *Rev. Math. Phys.*, 2012, vol. 24, 1250020 (51 p).

4. Karachalios N.I. The number of bound states for a discrete Schrödinger operator on Z_N, $N \geqslant 1$, lattices, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2008, vol. 41, no. 45, 455201.

5. Ziletti A., Borgonovi F., Celardo G.L., Izrailev F.M., Karlan L., Zelevinsky V.G. Coherent transport in multi-branch circuits, *Phys. Rev. B.*, 2012, vol. 85, no. 5, 052201 (5 p).

6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides, 2010, arXiv: 1101.0170v1 [math-ph].

7. Chuburin Yu.P. A discrete Schrödinger operator on a graph, *Theor. Math. Phys.*, 2010, vol. 165, issue 1, pp. 1335–1347.

8. Arseniev A.A. Resonances and tunneling in the tight-binding approximation to scattering in a quantum billiard, *Theor. Math. Phys.*, 2004, vol. 141, issue 1, pp. 1415–1426.

9. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. Spectrum of the two-particle Schrödinger operator on a lattice, *Theor. Math. Phys.*, 2008, vol. 155, issue 2, pp. 754–765.

10. Chung F., Yau S.-T. Discrete Green's function, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2000, vol. 91, no. 1–2, pp. 191–214.

11. Rivkind A., Krivolapov Y., Fishman S., Soffer A. Eigenvalue repulsion estimates and some applications for the one-dimensional Anderson model, *J. Phys. A.: Math. Theor.*, 2011, vol. 44, no. 30, 305206 (19 p).

12. Rabinovich V.S., Roch S. Essential spectra and exponential estimates of eigenfunctions of lattice operators of quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, no. 38, 385207 (21 p).

13. Dutkay D.E., Jorgensen P.E.T. Spectral theory for discrete Laplacians, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 1–38.

14. Evans M., Harrell II. On the behavior at infinity of solutions to difference equations in Schrödinger form, 2011, arXiv:1109.4691v1 [math.CA].

15. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. I. Funktsionalnyi analiz* (Methods of modern mathematical physics, Vol. I: Functional analysis), Moscow: Mir, 1977, 360 p.

16. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. III. Teoriya rasseyaniya* (Methods of modern mathematical physics, Vol. III: Scattering theory), Moscow: Mir, 1982, 443 p.

17. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. IV. Analiz operatorov* (Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators), Moscow: Mir, 1982, 428 p.

18. Tinyukova T.S., Chuburin Yu.P. Quasi–levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasion potential on a graph, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 104–113.

19. Tinyukova T.S. Quasi–levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 88–97.

20. Tinyukova T.S. The Lippmann–Schwinger equation for quantum wires, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 99–104.

21. Tinyukova T.S. Scattering in the case of the discrete Schrödinger operator for intersected quantum wires, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 74–84.

22. Tinyukova T.S. The discrete Schrödinger equation for a quantum waveguide, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 80–93.

23. Tinyukova T.S., Chuburin Yu.P. Electron scattering by a crystal layer, *Theor. Math. Phys*, 2013, vol. 176, no. 3, pp. 1207–1219.

24. Berezin F.A., Schubin M.A. *Uravnenie Shredingera* (Schrödinger equaion), Moscow: Moscow State University, 1983, 392 p.

25. Baranova L.Y., Chuburin Y.P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential, *J. Phys. A.: Math. Theor.*, 2008, vol. 41, 435205 (11 p).

26. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. *Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike* (Solvable models in quantum mechanics), Moscow: Mir, 1991, 568 p.

27. Gataullin T.M., Karasev M.V. On the perturbation of the quasilevels of a Schrödinger operator with complex potential, *Theor. Math. Phys.*, 1971, vol. 9, issue 2, pp. 1117–1126.

28. Taylor J. *Teoriya rasseyaniya. Kvantovaya teoriya nerelyativistskikh stolknovenii* (Scattering theory: the quantum theory of nonrelativistic collisions), Moscow: Mir, 1975, 567 p.

29. Gunning R., Rossi H. Analytic functions of several complex variables, New York: Prentice-Hall, 1965.

30. Morozova L.E., Chuburin Yu.P. On levels of the one-dimensional discrete Schrödinger operator with a decreasing small potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, no. 1 (29), pp. 85–94.

31. Chuburin Yu.P. On small perturbations of the Schrödinger operator with a periodic potential, *Theor. Math. Phys.*, 1997, vol. 110, issue 3, pp. 351–359.

32. Chuburin Yu.P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator, *Commun. Math. Phys.*, 2004, vol. 249, pp. 497–510.

33. Chuburin Yu.P. Solutions of the Schrodinger equation in the case of a semiinfinite crystal, *Theor. Math. Phys.*, 1994, vol. 98, issue 1, pp. 38–47.

34. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1971, 512 p.

35. Schwartz L. Theorie des distributions a valeurs vectoriels I, *Ann. Inst. Fourier.*, 1958, vol. 7, pp. 1–142.

36. Schwartz L. Theorie des distributions a valeurs vectoriels II, *Ann. Inst. Fourier.*, 1958, vol. 8, pp. 1–210.

37. Grothendieck A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, American Mathematical Society, 1979.

38. Schaefer H.H. *Topologicheskie vektornye prostranstva* (Topological vector spaces), Moscow: Mir, 1971, 360 p.

Received 21.08.2013

T. S. Tinyukova

Research of the difference Schrödinger operator for some physical models

In this paper, the discrete Schrödinger operator on a perturbed by the decreasing potential graph with vertices at the two intersecting lines is considered. We investigate spectral properties of this operator and the scattering problem for the above operator in the case of a small potential and also in the case when both a potential and velocity of a quantum particle are small. Asymptotic formulas for the probabilities of the particle propagation in all possible directions are obtained. In addition, we investigate the spectral properties of the discrete Schrödinger operator for the infinite band with zero boundary conditions. The scattering pattern is described. Simple formulas for transmission and reflection coefficients near boundary points of the subbands (this corresponds to small velocities of quantum particles) for small potentials are obtained. We consider a one-particle discrete Schrödinger operator with a periodic potential perturbed by a function which is periodic in two variables and exponentially decreases in third variable. In the paper, we also investigate the scattering problem for this operator near the extreme point of the eigenvalue of the periodic Schrödinger operator in the cell with respect to the third component of the quasimomentum, i.e. for the small perpendicular component of the angle of incidence of a particle on the potential barrier. Simple formulas of the propagation and reflection probabilities are obtained.

Keywords: difference Schrödinger operator, resonance, eigenvalue, Lippmann–Schwinger equation, scattering, propagation and reflection probabilities.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, старший преподаватель, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: tashih@mail.ru

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia. E-mail: tashih@mail.ru