УДК 517.934

© *Л. С. Чиркова*

УКЛОНЕНИЕ ОТ ГРУППЫ ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ В ИГРЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

Рассматривается задача о конфликтном взаимодействии одного убегающего с группой преследователей при равных динамических возможностях всех игроков. Движение каждого из них описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка. В начальный момент времени заданы начальные условия. Доказано, что если ноль не принадлежит выпуклой оболочке, натянутой на векторы начальных условий, то в игре происходит уклонение от встречи.

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, фазовые ограничения, уклонение от встречи.

Введение

В [1] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников. Показано, что поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

В работе [2] исследована задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследователей, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Доказано, что в игре происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.

В [3] рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что среди преследователей имеются как участники, максимальные скорости которых совпадают с максимальной скоростью убегающего, так и участники, у которых максимальные скорости строго меньше максимальной скорости убегающего, и при этом убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены условия, при которых преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

Задачи уклонения, в которых возможности убегающего превосходят возможности преследователей, рассматривались В. Л. Заком. В работе [4] доказана возможность уклонения из любых начальных позиций в дифференциальных играх второго порядка при условии, что возможности убегающего больше возможностей преследователей.

В работах [5, 6] рассматривалась задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а закон движения каждого из них — дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Было получено достаточное условие уклонения от встречи при дискриминации преследователей.

Нестационарная задача уклонения в дифференциальных играх второго порядка расматривалась в работах [7, 10].

В [8] рассматривалась задача о преследовании одного убегающего группой преследователей. Уравнение движения участников игры — дифференциальное уравнение третьего порядка. Получены достаточные условия уклонения от встречи в игре с равными возможностями участников.

В данной работе найдены достаточные условия уклонения от встречи при условии, что все участники обладают равными возможностями, преследователи дискриминированы, закон движения каждого из участников — дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Стратегия уклонения убегающего имеет определенное сходство со стратегией уклонения из работы [8] и строится следующим образом. До сближения с очередным преследователем

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

и далее, после того как данный преследователь будет оставлен позади, убегающий выбирает постоянное управление. При сближении с очередным преследователем либо строится специальное управление, позволяющее уклониться от встречи на достаточно малом отрезке времени, либо управление убегающего выбирается равным управлению преследователя. Если убегающий встречается с несколькими преследователями, то маневр «обхода» совершается по очереди, подпуская следующего преследователя ближе, чем предыдущего. Так как преследователей конечное число, то такой маневр позволяет избежать поимки.

Работа примыкает к исследованиям [9, 11, 12].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\begin{gathered} x_i^{\mathrm{iv}} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \\ x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \quad \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0, \quad \dddot{x}_i(0) = \dddot{x}_i^0. \end{gathered} \tag{1}$$

Закон движения убегающего имеет вид

$$\begin{gathered} y^{\mathrm{iv}} = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \\ y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0, \quad \dddot{y}(0) = \dddot{y}^0. \end{gathered} \tag{2}$$

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} & z_i^{\mathrm{iv}} = u_i - v, \\ & z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \qquad \dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, \\ & \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0, \qquad \dddot{z}_i(0) = \dddot{z}_i^0 = \dddot{x}_i^0 - \dddot{y}^0, \end{aligned} \tag{3}$$

полученную заменой $z_i = x_i - y$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_q = \{1, \ldots, q\}$, $Q_m^r = \{r+1, \ldots, r+m\}$. Обозначим через $\operatorname{Int} X$, ∂X, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, границу и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$. И пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Определение 1. Говорят, в дифференциальной игре (3) возможно убегание из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \dddot{z}_1^0, \ldots, z_n^0, \dot{z}_n^0, \ddot{z}_n^0, \dddot{z}_n^0)$, если по любым измеримым функциям $u_i(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_n$, можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $v(t) \in S$, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $t \geqslant 0$.

При этом в момент $t \geqslant 0$ управление убегающего формируется на основе информации о состоянии $z^0 = (z_1(s), \dot{z}_1(s), \ddot{z}_1(s), \dddot{z}_1(s), \ldots, z_n(s), \dot{z}_n(s), \ddot{z}_n(s), \dddot{z}_n(s))$ при $s \leqslant t$ и о значениях $u_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_n$ в тот же момент времени. Управление преследователей в момент $t \geqslant 0$ формируется на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры (3). Обозначим данную игру через Γ.

§ 2. Решение задачи

Теорема 1. *Пусть* $0 \notin \operatorname{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dddot{z}_i^0\}$, *тогда в дифференциальной игре* Γ *из начального состояния* $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \dddot{z}_1^0, \ldots, z_n^0, \dot{z}_n^0, \ddot{z}_n^0, \dddot{z}_n^0)$ *возможно убегание.*

Доказательство. Пусть $0 \notin \operatorname{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dddot{z}_i^0\}$. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существуют вектор $p \in \partial S$ и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\epsilon. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \eta_1(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|\ddot{z}_i(t)\|), \quad \eta_2(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|\dot{z}_i(t)\|), \quad \eta_3(t) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|z_i(t)\|), \\ \delta = \min\{1, \epsilon, \sqrt{\eta_1(0)}, \sqrt{\eta_2(0)}, \sqrt{\eta_3(0)}\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Случай 1. Пусть $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(z_i^0,p)\leqslant 0$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0$. Зададим управление убегающего следующим образом: $v(t)=p$, $t\in[0,+\infty)$. Тогда

$$z_i(t)=z_i^0+t\cdot\dot z_i^0+\frac{t^2}{2}\cdot\ddot z_i^0+\frac{t^3}{3!}\cdot\dddot z_i^0+\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-p)\,d\tau, \tag{6}$$

$$(z_i(t),p)=(z_i^0,p)+t\cdot(\dot z_i^0,p)+\frac{t^2}{2}\cdot(\ddot z_i^0,p)+\frac{t^3}{3!}\cdot(\dddot z_i^0,p)+\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-p,p)\,d\tau<0,$$

так как $(z_i^0,p)\leqslant 0$, $(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$, $(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0$ в силу предположения, $(\dddot z_i^0,p)\leqslant-2\epsilon$ в силу неравенства (4), $(u_i(\tau)-p,p)\leqslant 0$ из определения вектора p. В случае 1 убегание доказано.

Случай 2. Предположим, что неравенство $(\ddot z_l^0,p)>0$ справедливо для некоторого $l\in\mathbb{N}_n$ и $(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0\ \forall i\in\mathbb{N}_n\setminus\{l\}$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(z_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1=\frac{\delta}{4},\quad \delta_1=\delta\frac{\tau_1}{3}+\frac{(\tau_1)^2}{12}. \tag{7}$$

Справедливы неравенства $\eta_1(0)>\delta_1$, $\eta_2(0)>\delta_1$, $\eta_3(0)>\delta_1$. Положим $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\ddot z_l(t_1)\|=\delta_1$ и $(\ddot z_l(t_1),p)>0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1<+\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом, а при $t\geqslant t_1+\tau_1$ опять положим равным p. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{l\}$, по существу, не влияет на исход игры. Действительно, из определения числа τ_1 и неравенства (4) следует, что

$$\begin{aligned}(z_i(t),p)&=(z_i^0,p)+t\cdot(\dot z_i^0,p)+\frac{t^2}{2}\cdot(\ddot z_i^0,p)+\frac{t^3}{3!}\cdot(\dddot z_i^0,p)+\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-v(\tau),p)\,d\tau=\\&=(z_i^0,p)+t\cdot(\dot z_i^0,p)+\frac{t^2}{2}\cdot(\ddot z_i^0,p)+\frac{t^3}{3!}\cdot(\dddot z_i^0,p)+\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{3!}\cdot(u_i(\tau)-p,p)\,d\tau<0\end{aligned}$$

при любом $t\geqslant 0$ и любых управлениях $u_i(s)$, $s\in[0,+\infty)$, $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$. На основе рассуждений, приведенных в случае 1, заключаем, что $\|z_i(t)\|\neq 0$ при $t\geqslant 0$, $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{l\}$. Так как $(\ddot z_l(t_1),p)>0$, $(\dddot z_l(t_1),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t_1,t_1+\tau_1]$

$$\begin{aligned}(z_l(t_1+\tau_1),p)&=(z_l(t_1),p)+\tau_1\cdot(\dot z_l(t_1),p)+\frac{\tau_1^2}{2}\cdot(\ddot z_l(t_1),p)+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot(\dddot z_l(t_1),p)+\\&+\int_{t_1}^{t_1+\tau_1}\frac{(t_1+\tau_1-\tau)^3}{3!}(u_l(\tau)-v(\tau),p)\,d\tau<\frac{\tau_1^2}{2}\cdot\delta_1-\delta\frac{\tau_1^3}{3!}-\frac{\tau_1^4}{4!}=0.\end{aligned}$$

Следовательно, в момент $t=t_1+\tau_1$ состояние дифференциальной игры (3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\|\neq 0$ при $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана. Предположим, что

$$(z_l(t_1),\ddot z_l(t_1))=-\|z_l(t_1)\|\cdot\|\ddot z_l(t_1)\|. \tag{8}$$

Векторы $z_l(t_1)$, $\ddot z_l(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi\in\partial S$ такой, что $(z_l(t_1),\psi)=(\ddot z_l(t_1),\psi)=0$. Пусть $\epsilon_1\in(0,\tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных управлениях $u_l(s)$, $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\epsilon_1]$, справедливо неравенство $(\ddot z_l(t_1+\epsilon_1),p)>0$. Покажем, что если на отрезке $[t_1,t_1+\epsilon_1]$ управление $v(s)$ выбирать так, чтобы

$$(v(s),\psi)=\begin{cases}1, & \text{если } (u_l(s),\psi)\leqslant 0,\\ -1, & \text{если } (u_l(s),\psi)>0,\end{cases} \tag{9}$$

то существует такое число $\gamma_1\in[0,\epsilon_1)$, что

$$(z_l(t_1+\gamma_1),\ddot z_l(t_1+\gamma_1))\neq-\|z_l(t_1+\gamma_1)\|\cdot\|\ddot z_l(t_1+\gamma_1)\|. \tag{10}$$

При $t \geqslant t_1$ введем в рассмотрение функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ и $f_4(t)$.

$$f_4(t) = (\dddot{z}_l(t), \psi) = \int_{t_1}^{t} (u_l(s) - v(s), \psi)\, ds. \tag{11}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \epsilon_1$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} \dot{f}_1(t) = f_2(t), \quad \dot{f}_2(t) = f_3(t), \\ \dot{f}_3(t) = f_4(t), \quad \dot{f}_4(t) = (u_l(t) - v(t), \psi). \end{gathered} \tag{12}$$

Причем $f_1(t_1) = f_2(t_1) = f_3(t_1) = f_4(t_1) = 0$. Из уравнений (12) следует, что $f_4(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$.

Множество $G = \{t \in (t_1, t_1 + \epsilon_1) \mid f_4(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$, где $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ — взаимно не пересекающаяся не более чем счетная система интервалов. Пусть (α_j, β_j) — некоторый интервал из этой системы. Тогда $f_4(\alpha_j) = f_4(\beta_j) = 0$, $f_4(t) \neq 0$ на (α_j, β_j). Если $f_3(\alpha_j) \neq 0$, то $\dot{f}_3(t) = f_4(t) \neq 0$, $\dot{f}_2(t) = f_3(t) \neq 0$ на (α_j, β_j) (в силу определения управления v) и $f_3(\beta_j) \neq 0$, $f_2(\beta_j) \neq 0$. Следовательно, соотношение (10) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \beta_j$. Если $(z_l(t_1), \ddot{z}_l(t_1)) \neq -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\ddot{z}_l(t_1)\|$, то полагаем $\gamma_1 = 0$.

Итак, управление $v(s)$ убегающего E на $[t_1, t_1 + \gamma_1)$ выбираем в соответсвии с правилом (9), и в момент $t_1 + \gamma_1$ выполнено (10). Далее полагаем $v(s) = u_l(s)$ при $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1)$. Тогда

$$z_l(t) = z_l(t_1 + \gamma_1) + (t - t_1 - \gamma_1) \cdot \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1) + \int_0^{t - t_1 - \gamma_1} \ddot{z}_l(t_1 + \gamma_1)\, ds$$

при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_l(t)\| \neq 0$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_l(s), u_l(s) \in S$, можно построить такое управление $v(s) \in S$, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, и возможность убегания в случае 2 доказана.

Случай 3. Пусть $(\dot{z}_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0\ \forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Определим τ_1, δ_1 следующим образом:

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta \frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}. \tag{13}$$

Справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$, $\eta_3(0) > \delta_1$. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\dot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1 + \tau_1$ опять положим равным p. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, по существу, не влияет на исход игры. Действительно, из определения числа τ_1 и неравенства (4) следует, что

$$\begin{gathered} (z_i(t), p) = (z_i^0, p) + t \cdot (\dot{z}_i^0, p) + \frac{t^2}{2} \cdot (\ddot{z}_i^0, p) + \frac{t^3}{3!} \cdot (\dddot{z}_i^0, p) + \int_0^t \frac{(t - \tau)^3}{3!} \cdot (u_i(\tau) - v(\tau), p)\, d\tau = \\ = (z_i^0, p) + t \cdot (\dot{z}_i^0, p) + \frac{t^2}{2} \cdot (\ddot{z}_i^0, p) + \frac{t^3}{3!} \cdot (\dddot{z}_i^0, p) + \int_0^t \frac{(t - \tau)^3}{3!} \cdot (u_i(\tau) - p, p)\, d\tau < 0 \end{gathered}$$

при любом $t \geqslant 0$ и любых управлениях $u_i(s)$, $s \in [0, +\infty)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \tau_1)$. На основе рассуждений, приведенных в случае 1, заключаем, что $\|z_i(t)\| \neq 0$ при $t \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$.

Так как $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, $(\dddot{z}_l(t_1), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$$\begin{gathered} (z_l(t_1 + \tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1 \cdot (\dot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^2}{2} \cdot (\ddot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot (\dddot{z}_l(t_1), p) + \\ + \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \frac{(t_1 + \tau_1 - \tau)^3}{3!} (u_l(\tau) - v(\tau), p)\, d\tau < \delta_1 \cdot \tau_1 - \delta \frac{\tau_1^3}{3!} - \frac{\tau_1^4}{4!} = 0. \end{gathered}$$

Следовательно, в момент $t = t_1 + \tau_1$ состояние дифференциальной игры (3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана. Предположим, что

$$(z_l(t_1), \dot{z}_l(t_1)) = -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1)\|. \tag{14}$$

Векторы $z_l(t_1)$, $\dot{z}_l(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi \in \partial S$ такой, что $(z_l(t_1), \psi) = (\dot{z}_l(t_1), \psi) = 0$. Пусть $\epsilon_1 \in (0, \tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных управлениях $u_l(s)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \epsilon_1]$, справедливо неравенство $(\dot{z}_l(t_1 + \epsilon_1), p) > 0$. Покажем, что если на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$ управление $v(s)$ строится в соответствии с правилом (9), то существует такое число $\gamma_1 \in [0, \epsilon_1)$, что

$$(z_l(t_1 + \gamma_1), \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)) \neq -\|z_l(t_1 + \gamma_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)\|. \tag{15}$$

При $t \geqslant t_1$ введем в рассмотрение функции (11), удовлетворяющие системе уравнений (12), $f_4(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[t_1, t_1 + \epsilon_1]$, поэтому можно использовать введенное в случае 2 множество G. Для интервала (α_j, β_j) из этого множества будут выполняться те же самые условия, что и в случае 2, следовательно, соотношение (15) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \beta_j$.

Если $(z_l(t_1), \dot{z}_l(t_1)) \neq -\|z_l(t_1)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_1)\|$, то полагаем $\gamma_1 = 0$.

Итак, управление $v(s)$ убегающего E на $[t_1, t_1 + \gamma_1)$ выбираем в соответствии с правилом (9), и в момент $t_1 + \gamma_1$ выполнено (15). Далее полагаем $v(s) = u_l(s)$ при $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1)$. Тогда

$$z_l(t) = z_l(t + \gamma_1) + \int_0^{t - t_1 - \gamma_1} \dot{z}_l(t_1 + \gamma_1)\, ds$$

при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_l(t)\| \neq 0$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_l(s)$, $u_l(s) \in S$, можно построить такую измеримую функцию $v(s) \in S$, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, и возможность убегания в случае 3 доказана.

Случай 4. Пусть $(z_l^0, p) > 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \backslash \{l\}$, а $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta \frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}. \tag{16}$$

Справедливы неравенства $\eta_1(0) > \delta_1$, $\eta_2(0) > \delta_1$, $\eta_3(0) > \delta_1$. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$.

Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом, а при $t \geqslant t_1 + \tau_1$ опять положим равным p. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, по существу, не влияет на исход игры.

Так как $(z_l(t_1), p) > 0$, $(\dddot{z}_l(t_1), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1 \cdot (\dot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^2}{2} \cdot (\ddot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot (\dddot{z}_l(t_1), p) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \frac{(t_1 + \tau_1 - \tau)^3}{3!} (u_l(\tau) - v(\tau), p)\, d\tau < \delta_1 - \delta \frac{\tau_1^3}{3!} - \frac{\tau_1^4}{4!} = 0.$$

Следовательно, в момент $t = t_1 + \tau_1$ состояние дифференциальной игры (3) соответствует рассмотренному выше случаю 1. Таким образом, если по любому управлению $u_l(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, такое, что $\|z_l(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, то разрешимость задачи убегания из начального состояния z^0 будет доказана.

Пусть выполнено (14). Векторы $z_l(t_1)$, $\dot{z}_l(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi \in \partial S$ такой, что $(z_l(t_1), \psi) = (\dot{z}_l(t_1), \psi) = 0$. И пусть $\epsilon_1 \in (0, \tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных управлениях $u_l(s)$, $v(s)$, $s \in [t_1, t_1+\epsilon_1]$, неравенство $(z_l(t_1+\epsilon_1), p) > 0$ выполнено. Покажем, что если на отрезке $[t_1, t_1+\epsilon_1]$ управление $v(s)$ строится в соответствии с правилом (9), то существует такое число $\gamma_1 \in [0, \epsilon_1)$, что выполнено (15).

При $t \geqslant t_1$ введем в рассмотрение функции (11), удовлетворяющие системе уравнений (12), и проведем рассуждения, аналогичные случаю 3. Убегание в случае 4 доказано.

Случай 5а. Предположим, что неравенство $(\dddot{z}_l^0, p) > 0$ справедливо для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$, $(\dot{z}_j^0, p) > 0$ — для некоторого $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$ и $(\dddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}, \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}. \tag{17}$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_1$, $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_2$. Определим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$.

Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. Если на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t)\| = \delta_2$, то управление нужно выбирать как в случае 2. Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1+\tau_1$, до тех пор пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, что и в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (17). Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2+\tau_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда сближение с j-м преследователем происходит раньше чем с l-м. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$. Если на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot{z}_l(t)\| = \delta_1$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (17). Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1+\tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, t_2 — момент, в который выполнено $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2. Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2+\tau_1$.

Пусть $t_2 \in (t_1, t_1+\tau_1)$, тогда положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$. На полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2, до момента t_2, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_3$ и $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$. Управление v, после того как настал момент t_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 взять δ_3 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_1}{2}, \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_2)^2}{3!} + \frac{(\tau_2)^3}{4!}.$$

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем, затем полагаем управление v равным p.

Если поменять j и l местами, то все маневры по обходу j-го преследователя нужно делать в соответствии со случаем 3. Затем за время $\tau_2 = \dfrac{\delta_2}{4}$ нужно обойти l-ого преследователя, для чего управление нужно взять как в случае 2, но вместо δ_1 взять $\delta_4 = \delta\dfrac{\tau_2}{3} + \dfrac{(\tau_2)^2}{12}$. После того как маневр с l-ым преследователем будет завершен, управление v выбираем как в случае 3, затем полагаем управление равным p.

Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2, до момента t'_2, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t'_2)\| = \delta_5$ и $(\dot{z}_j(t'_2), p) > 0$. Управление v, после того как наступил момент t'_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 нужно взять δ_5 такое, что $\delta_5 = \delta\dfrac{(\tau'_2)^2}{3!} + \dfrac{(\tau'_2)^3}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau'_2 = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, выбираем управление v в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем. Далее положим v равным p. Остальные преследователи (кроме l-ого и j-го) при выбранном таким образом управлении не влияют на исход игры.

Случай 5б. Начальные условия здесь такие же, что и в случае 5а, только $l = j$. Пусть вначале управление $v(t) = p$, $t < t_1 = t_2$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \cdot \Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big). \tag{18}$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) = (z_l(t_1), p) + \tau_1 \cdot (\dot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^2}{2} \cdot (\ddot{z}_l(t_1), p) + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot (\dddot{z}_l(t_1), p) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \frac{(t_1 + \tau_1 - \tau)^3}{3!}(u_l(\tau) - v(\tau), p)\, d\tau < \tau_1\delta_2 + (\tau_1)^2 \cdot \frac{\delta_1}{2} - \delta \cdot \frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} =$$

$$= \tau_1 \frac{1}{2} \cdot \Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big) + (\tau_1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta \cdot \frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

В случае $t_1 \neq t_2$ применим маневр, описанный в случае 2 или 3, в зависимости от того, какой момент наступит раньше — t_1 или t_2. Доказательство убегания здесь будет таким же как и в случае 5а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, по существу, не влияет на исход игры.

Случай 6а. Предположим, что неравенство $(\dddot{z}_l^0, p) > 0$ справедливо для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$, $(z_j^0, p) > 0$ — для некоторого $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$ и $(\dddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$. При этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}, \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}. \tag{19}$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_1$, $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_2$. Определим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$.

Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|z_j(t)\| = \delta_2$, то управление нужно выбирать как в случае 2. Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|z_j(t_2)\| = \delta_2$ и $(z_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_2 из (19). Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда сближение с j-ым преследователем происходит раньше, чем с l-ым. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|z_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(z_j(t_1), p) > 0$. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot{z}_l(t)\| = \delta_1$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_2 из (19). Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, t_2 — момент, в который выполнено $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2. Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Пусть $t_2 \in (t_1, t_1 + \tau_1)$, тогда положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$. На полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2, до момента t_2, в который выполнено $\|z_j(t_2)\| = \delta_3$ и $(z_j(t_2), p) > 0$. Управление v, после того как настал момент t_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 взять δ_3 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_1}{2}, \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_2)^3}{3!} + \frac{(\tau_2)^4}{4!}.$$

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем, затем полагаем управление v равным p.

Если поменять j и l местами, то все маневры по обходу j-го преследователя нужно делать в соответствии со случаем 4. Затем за время $\tau_2 = \dfrac{\delta_2}{4}$ нужно обойти l-го преследователя, для чего управление нужно взять как в случае 2, но вместо δ_1 взять $\delta_4 = \delta\dfrac{\tau_2}{3} + \dfrac{(\tau_2)^2}{12}$. После того как маневр с l-ым преследователем будет завершен, управление v выбираем как в случае 4, затем полагаем управление равным p.

Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2, до момента t'_2, в который выполнено $\|z_j(t'_2)\| = \delta_5$ и $(z_j(t'_2), p) > 0$. Управление v, после того как наступил момент t'_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 нужно взять δ_5 такое, что $\delta_5 = \delta\dfrac{(\tau'_2)^3}{3!} + \dfrac{(\tau'_2)^4}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau'_2 = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, выбираем управление v в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем. Далее положим v равным p. Остальные преследователи (кроме l-го и j-го) при выбранном таким образом управлении не влияют на исход игры.

Случай 6б. Начальные условия здесь такие же, как и в случае 6а, только $l = j$. Пусть вначале управление $v(t) = p$, $t < t_1 = t_2$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\cdot\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\cdot\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big). \tag{20}$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$

$$(z_l(t_1+\tau_1), p) < \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big) + \frac{(\tau_1)^2}{4}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

В случае $t_1 \neq t_2$ применим маневр, описанный в случае 2 или 4, в зависимости от того, какой момент наступит раньше — t_1 или t_2. Доказательство убегания здесь будет таким же, как и в случае 6а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, по существу, не влияет на исход игры.

Случай 7а. Предположим, что неравенство $(\dot{z}_l^0, p) > 0$ справедливо для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$, $(z_j^0, p) > 0$ — для некоторого $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}, \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}. \tag{21}$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_1$, $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_2$. Определим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\dot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot{z}_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$.

Пусть $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(s)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователя P_j. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|z_j(t)\| = \delta_2$, то управление нужно выбирать как в случае 3. Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|z_j(t_2)\| = \delta_2$ и $(z_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_2 из (21). Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$.

Рассмотрим ситуацию, когда сближение с j-ым преследователем происходит раньше, чем с l-ым. Положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|z_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(z_j(t_1), p) > 0$.

Если на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot z_l(t)\| = \delta_1$, то управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_2 из (21). Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1+\tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, t_2 — момент, в который выполнено $\|\dot z_l(t_2)\| = \delta_1$ и $(\dot z_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3. Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2+\tau_1$.

Пусть $t_2 \in (t_1, t_1+\tau_1)$, тогда положим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\dot z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot z_l(t_1), p) > 0$. На полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до момента t_2, в который выполнено $\|z_j(t_2)\| = \delta_3$ и $(z_j(t_2), p) > 0$. Управление v, после того как настал момент t_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 взять δ_3 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_1}{2}, \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_2)^3}{3!} + \frac{(\tau_2)^4}{4!}.$$

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l-ым преследователем, затем полагаем управление v равным p.

Если поменять j и l местами, то все маневры по обходу j-ого преследователя нужно делать в соответствии со случаем 4. Затем за время $\tau_2 = \dfrac{\delta_2}{4}$ нужно обойти l-ого преследователя, для чего управление нужно взять как в случае 3, но вместо δ_1 взять $\delta_4 = \delta\dfrac{(\tau_2)^2}{3} + \dfrac{(\tau_2)^3}{4!}$. После того как маневр с l-ым преследователем будет завершен, управление v выбираем как в случае 3, затем полагаем управление равным p.

Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 — момент, в который $\|\dot z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\dot z_l(t_1), p) > 0$. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, до момента t'_2, в который выполнено $\|z_j(t'_2)\| = \delta_5$ и $(z_j(t'_2), p) > 0$. Управление v, после того как наступил момент t'_2, нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 нужно взять δ_5 такое, что $\delta_5 = \delta\dfrac{(\tau'_2)^3}{3!} + \dfrac{(\tau'_2)^4}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau'_2 = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, выбираем управление v в соответствии со случаем 3, что позволит избежать поимки l-ым преследователем. Далее положим v равным p. Остальные преследователи (кроме l-ого и j-ого) при выбранном таким образом управлении не влияют на исход игры.

Случай 7б. Начальные условия здесь такие же, что и в случае 7а, только $l = j$. Пусть вначале управление $v(t) = p$, $t < t_1 = t_2$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\cdot\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big), \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\cdot\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big). \tag{22}$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1+\tau_1)$

$$(z_l(t_1+\tau_1), p) < \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big) + \frac{\tau_1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

В случае $t_1 \neq t_2$ применим маневр, описанный в случае 3 или 4, в зависимости от того, какой момент наступит раньше — t_1 или t_2. Доказательство убегания здесь будет таким же, как и в случае 7а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, по существу, не влияет на исход игры.

Случай 8. Предположим, что $(\ddot z_l^0, p) > 0$ справедливо для некоторого $l \in \mathbb{N}_n$, $(\dot z_j^0, p) > 0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $(z_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_n \setminus \{l, j\}$ и $(\ddot z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l\}$, $(\dot z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0. Пусть

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}, \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}, \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}. \tag{23}$$

Справедливы неравенства $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_1$, $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_2$, $\eta_{1,2,3}(0) > \delta_3$. Определим $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$.

8.1. Пусть t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_j и P_m. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t)\| = \delta_2$ или $\|z_m(t)\| = \delta_3$, то управление нужно выбирать как в случае 2.

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23).

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3 из (23). И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.2. Пусть t_1 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_j и P_m. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\dot{z}_j(t)\| = \delta_2$ или $\|z_m(t)\| = \delta_3$, то управление нужно выбирать как в случае 2.

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|z_m(t_2)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая нужно взять δ_3 из (23).

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t_3)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23). И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.3. Пусть t_1 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_m. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot{z}_l(t)\| = \delta_1$ или $\|z_m(t)\| = \delta_3$, то управление нужно выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23).

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2.

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая нужно взять δ_3 из (23). И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.4. Пусть t_1 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_m. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot{z}_l(t)\| = \delta_1$ или $\|z_m(t)\| = \delta_3$, то управление нужно выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23).

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|z_m(t_2)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 из случая нужно взять δ_3 из (23).

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|\ddot{z}_l(t_3)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2. И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.5. Пусть t_1 — момент, в который $\|z_m(t_1)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_j. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot{z}_l(t)\| = \delta_1$ или $\|\dot{z}_j(t)\| = \delta_2$, то управление нужно выбирать как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3 из (23).

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2.

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|\dot z_j(t_3)\| = \delta_2$ и $(\dot z_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23). И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.6. Пусть t_1 — момент, в который $\|z_m(t_1)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$. Управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_j. Если на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ не выполнено равенство $\|\ddot z_l(t)\| = \delta_1$ или $\|\dot z_j(t)\| = \delta_2$, то управление нужно выбирать как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3 из (23).

Затем положим $v(s) = p$, $s \geqslant t_1 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_2$, где t_2 — момент, в который выполнено $\|\dot z_j(t_2)\| = \delta_2$ и $(\dot z_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23).

Далее полагаем $v(s) = p$, $s \geqslant t_2 + \tau_1$, до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который выполнено $\|\ddot z_l(t_3)\| = \delta_1$ и $(\ddot z_l(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. Управление v в этом случае нужно выбирать таким же образом, как и в случае 2. И снова возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.7а. Пусть во время маневра обхода преследователя P_l происходит сближение с P_j или P_m. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\ddot z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot z_l(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_j и P_m.

8.7а.1. Выбираем управление $v(s)$ как в случае 2 до момента t_2, t_2 — момент, в который $\|\dot z_j(t_2)\| = \delta_4$ и $(\dot z_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Начиная с момента t_2, управление v следует выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_4 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_1}{2}, \quad \delta_4 = \delta\frac{(\tau_2)^2}{3!} + \frac{(\tau_2)^3}{4!}.$$

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3 из (23). Когда маневр по обходу m-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.7а.2. Пусть теперь t_2 — момент, в который $\|z_m(t_2)\| = \delta_5$, $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. После того как момент t_2 наступил, управление нужно выбирать как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 взять δ_5 такое, что

$$\delta_5 = \delta\frac{(\tau_2)^3}{3!} + \frac{(\tau_2)^4}{4!}, \quad \tau_2 = \frac{\delta_1}{2}.$$

Далее, когда встречи с m-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 2, что позволяет избежать поимки l-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\dot z_j(t_3)\| = \delta_2$, $(\dot z_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 возьмем δ_2 из (23). Когда маневр по обходу j-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.7б. Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\ddot z_l(t_1)\| = \delta_1$ и $(\ddot z_l(t_1), p) > 0$.

8.7б.1. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 2, до тех пор, пока не наступит момент t_2' такой, что $\|\dot z_j(t_2')\| = \delta_6$ и $(\dot z_j(t_2'), p) > 0$.

Управление v, после того как наступил момент t_2', нужно выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 взять δ_6 такое, что $\delta_6 = \delta\dfrac{(\tau_2')^2}{3!} + \dfrac{(\tau_2')^3}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3. Когда маневр по обходу m-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.7б.2. Пусть теперь t_2' такой, что $\|z_m(t_2')\| = \delta_7$ и $(z_m(t_2'), p) > 0$. Управление v, после того как настал момент t_2', нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 взять δ_7 такое, что $\delta_7 = \delta\dfrac{(\tau_2')^3}{3!} + \dfrac{(\tau_2')^4}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с m-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 2, что позволит избежать поимки l-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\dot z_l(t_j)\| = \delta_2$ и $(\dot z_l(t_3), p) > 0$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 взять δ_2 из (23). Когда маневр по обходу j-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.7в. Пусть как в 8.7а во время маневра обхода преследователя P_l происходит сближение с преследователем P_j или P_m и $t_1 = t_2$, где t_1 — момент, в который $\|\ddot z_l(t_1)\| = \delta_1$, $(\ddot z_l(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$; t_2 — момент, в который происходит сближение с P_j и P_m.

8.7в.1. Пусть t_2 — момент, в который $\|\dot z_j(t_2)\| = \delta_2$, $(\dot z_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$, $l = j$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big), \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}.$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1+\tau_1), p) < \delta_2\tau_1 + \frac{\tau_1^2}{2}\delta_1 - \frac{\tau_1^3}{3!}\delta - \frac{\tau_1^4}{4!} = \frac{\tau_1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big) + \frac{\tau_1^2}{4}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

Маневр обхода P_m осуществим так же, как в 8.7а. Итак, $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$. На полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ убегающий E должен применить тот же самый маневр, что и в случае 2 или 3, но при этом подпустить преследователя P_l ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_l удалось избежать, полагаем $v(t) = p$, $t \leqslant t_3$, где t_3 — момент времени такой, что $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$, $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 берем δ_3, $v(t) = p$, $t \geqslant t_3 + \tau_1$.

Если $l = j$, но $t_1 \neq t_2$, то уклонение от встречи доказывается как в 8.7а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l, m\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.7в.2. Пусть t_2 — момент, в который $\|z_m(t_2)\| = \delta_3$, $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$, $l = m$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big).$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) < \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big) + \frac{\tau_1^2}{4}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

Маневр обхода P_j осуществим так же, как в 8.7а. Итак, $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$. На полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ убегающий E должен применить тот же самый маневр, что и в случае 2 или 3, но при этом подпустить преследователя P_l ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_l удалось избежать, полагаем $v(t) = p$, $t \leqslant t_3$, где t_3 — момент времени такой, что $\|\dot z_j(t_3)\| = \delta_2$, $(\dot z_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 берем δ_2, $v(t) = p$, $t \geqslant t_3 + \tau_1$.

Если $l = m$, но $t_1 \neq t_2$, то уклонение от встречи доказывается как в 8.7а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l, j\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.8а. Пусть во время маневра обхода преследователя P_j происходит сближение с P_l или P_m. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который выполнено $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_m.

8.8а.1. Выбираем управление $v(s)$ как в случае 3 до момента t_2, t_2 — такой момент времени, что $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_4$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Начиная с момента t_2, управление v следует выбирать как в случае 2, только вместо δ_1 из случая 2 нужно взять δ_4 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_2}{2}, \quad \delta_4 = \delta\frac{\tau_2}{3} + \frac{(\tau_2)^2}{12}.$$

Далее, когда встречи с l-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23), что позволит избежать поимки j-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3 из (23). Когда маневр по обходу m-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.8а.2. Пусть теперь t_2 — момент, в который $\|z_m(t_2)\| = \delta_5$, $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. После того как момент t_2 наступил, управление нужно выбирать как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 взять δ_5 такое, что

$$\delta_5 = \delta\frac{(\tau_2)^3}{3!} + \frac{(\tau_2)^4}{4!}, \quad \tau_2 = \frac{\delta_2}{2}.$$

Далее, когда встречи с m-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23), что позволяет избежать поимки j-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_3)\| = \delta_1$, $(\ddot{z}_l(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 2. Когда маневр по обходу l-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.8б. Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$.

8.8б.1. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 взять δ_2 из (23), до тех пор, пока не наступит момент t_2' такой, что $\|\ddot{z}_l(t_2')\| = \delta_6$ и $(\ddot{z}_l(t_2'), p) > 0$.

Управление v, после того как наступил момент t_2', нужно выбирать как в случае 2, только вместо δ_1 из случая 2 взять δ_6 такое, что $\delta_6 = \delta\dfrac{\tau_2'}{3} + \dfrac{(\tau_2')^2}{12}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с l-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, только вместо δ_1 из случая 3 взять δ_2 из (23), что позволит избежать поимки j-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_3), p) > 0$. На $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 нужно взять δ_3. Когда маневр по обходу m-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.8б.2. Пусть теперь t_2' такой, что $\|z_m(t_2')\| = \delta_7$ и $(z_m(t_2'), p) > 0$. Управление v, после того, как настал момент t_2', нужно выбирать таким же образом, как и в случае 4, только вместо δ_1 взять δ_7 такое, что $\delta_7 = \delta\dfrac{(\tau_2')^3}{3!} + \dfrac{(\tau_2')^4}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с m-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23), что позволит избежать поимки j-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_3)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_3), p) > 0$. На $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 2. Когда маневр по обходу l-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.8в. Пусть как в 8.8а во время маневра обхода преследователя P_j происходит сближение с преследователем P_l или P_m и $t_1 = t_2$, где t_1 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_1)\| = \delta_1$, $(\dot{z}_j(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$; t_2 — момент, в который происходит сближение с P_l и P_m.

8.8в.1. Пусть t_2 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$, $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$, $l = j$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big), \quad \delta_3 = \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}.$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) < \frac{\tau_1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big) + \frac{\tau_1^2}{4}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

Итак, $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$. На $[t_1, t_1 + \tau_1)$ убегающий E должен применить тот же самый маневр, что и в случае 2 или 3, но при этом подпустить преследователя P_l ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_l удалось избежать, полагаем $v(t) = p$, $t \leqslant t_3$, где t_3 — момент времени такой, что $\|z_m(t_3)\| = \delta_3$, $(z_m(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 берем δ_3, $v(t) = p$, $t \geqslant t_3 + \tau_1$.

Если $l = j$, но $t_1 \neq t_2$, то уклонение от встречи доказывается как в 8.8а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j, m\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.8в.2. Пусть t_2 — момент, в который $\|z_m(t_2)\| = \delta_3$, $(z_m(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$, $j = m$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big), \quad \delta_3 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big).$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_m(t_1 + \tau_1), p) < \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big) + \frac{\tau_1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1^2}{3!} + \frac{\tau_1^3}{4!}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

Маневр обхода преследователя P_l осуществим так же, как в 8.8а. Итак, $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$. На $[t_1, t_1 + \tau_1)$ убегающий E должен поступить как в случае 3 или 4, но при этом подпустить преследователя P_m ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_m удалось избежать, полагаем $v(t) = p$, $t \geqslant t_1 + \tau_1$, до момента t_3, где t_3: $\|\ddot{z}_l(t_3)\| = \delta_1$, $(\ddot{z}_l(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 2. Потом $v(t) = p$, $t \geqslant t_3 + \tau_1$.

При $m = j$, $t_1 \neq t_2$, уклонение от встречи доказывается как в 8.8а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{l, j\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.9а. Пусть во время маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с P_l или P_j. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который выполнено $\|z_m(t_1)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$. Пусть $t_1 < +\infty$, тогда управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом и с учетом поведения преследователей P_l и P_j.

8.9а.1. Определим управление $v(s)$ как в случае 4 до момента t_2 такого, что $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_4$ и $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. Начиная с момента t_2, управление v следует выбирать как в случае 2, только вместо δ_1 из случая 2 нужно взять δ_4 такое, что

$$\tau_2 = \frac{\delta_3}{2}, \quad \delta_4 = \delta\frac{\tau_2}{3} + \frac{(\tau_2)^2}{12}.$$

Далее, когда встречи с l-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 4, только вместо δ_1 из случая 4 возьмем δ_3 из (23), что позволит избежать поимки m-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_3)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На $[t_3, t_3+\tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23). Когда маневр по обходу j-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.9а.2. Пусть теперь t_2 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_2)\| = \delta_5$, $(\dot{z}_j(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$. После того как настал момент t_2, управление нужно выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 взять δ_5 такое, что

$$\delta_5 = \delta\frac{(\tau_2)^2}{3!} + \frac{(\tau_2)^3}{4!}, \quad \tau_2 = \frac{\delta_3}{2}.$$

Далее, когда встречи с m-ым преследователем удалось избежать, управление v следует выбирать в соответствии со случаем 2, что позволяет избежать поимки l-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_3)\| = \delta_2$, $(\dot{z}_j(t_3), p) > 0$, $t_3 < +\infty$. На полуинтервале $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2 из (23). Когда маневр по обходу j-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.9б. Покажем маневр уклонения в случае $t_1 = t_2$. Полагаем $v(t) = p$, $t \in [0, t_1)$, где t_1 либо момент, в который $\|z_m(t_1)\| = \delta_3$ и $(z_m(t_1), p) > 0$.

8.9б.1. Сначала на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление нужно выбирать так, как это сделано в случае 4, только вместо δ_1 из случая 4 взять δ_3 из (23), до тех пор, пока не наступит момент t_2' такой, что $\|\ddot{z}_l(t_2')\| = \delta_6$ и $(\ddot{z}_l(t_2'), p) > 0$.

Управление v, после того как наступил момент t_2', нужно выбирать как в случае 2, только вместо δ_1 из случая 2 взять δ_6 такое, что $\delta_6 = \delta\dfrac{\tau_2'}{3} + \dfrac{(\tau_2')^2}{12}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с l-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 4, только вместо δ_1 из случая 4 взять δ_3 из (23), что позволит избежать поимки m-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\dot{z}_j(t_3)\| = \delta_2$ и $(\dot{z}_j(t_3), p) > 0$. На $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 нужно взять δ_2. Когда маневр по обходу j-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.9б.2. Пусть теперь t_2' такой, что $\|\dot{z}_j(t_2')\| = \delta_7$ и $(\dot{z}_j(t_2'), p) > 0$. Управление v, после того как настал момент t_2', нужно выбирать таким же образом, как и в случае 3, только вместо δ_1 взять δ_7: $\delta_7 = \delta\dfrac{(\tau_2')^2}{3!} + \dfrac{(\tau_2')^3}{4!}$, а сам маневр осуществим за время $\tau_2' = \dfrac{\tau_2}{4}$.

Далее, когда встречи с j-ым преследователем удалось избежать, выбрать управление v в соответствии со случаем 4, только вместо δ_1 из случая 4 возьмем δ_3 из (23), что позволит избежать поимки m-ым преследователем.

Затем полагаем v равным p до тех пор, пока $s < t_3$, где t_3 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_3)\| = \delta_1$ и $(\ddot{z}_l(t_3), p) > 0$. На $[t_3, t_3 + \tau_1)$ управление выбираем как в случае 2. Когда маневр по обходу l-ого преследователя завершен, возвращаемся к управлению $v(s) = p$, $s \geqslant t_3 + \tau_1$.

8.9в. Пусть как в 8.9а во время маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_l или P_j и $t_1 = t_2$, где t_1 — момент, в который $\|z_m(t_1)\| = \delta_3$, $(z_m(t_1), p) > 0$, $t_1 < +\infty$; t_2 — момент, в который происходит сближение с P_l и P_j.

8.9в.1. Пусть t_2 — момент, в который $\|\ddot{z}_l(t_2)\| = \delta_1$, $(\ddot{z}_l(t_2), p) > 0$, $t_2 < +\infty$, $l = m$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1 = \frac{\delta}{4}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big), \quad \delta_2 = \delta\frac{(\tau_1)^2}{3!} + \frac{(\tau_1)^3}{4!}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big).$$

Тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ выполнено

$$(z_l(t_1 + \tau_1), p) < \frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} + \frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big) + \frac{\tau_1^2}{4}\Big(\delta\frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1)^2}{12}\Big) - \delta\frac{(\tau_1)^3}{3!} - \frac{(\tau_1)^4}{4!} = 0.$$

Итак, $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$. На полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ убегающий E должен применить тот же самый маневр, что и в случае 4 или 2, но при этом подпустить преследователя P_l ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_l удалось избежать, полагаем $v(t)=p$, $t\leqslant t_3$, где t_3 — момент времени такой, что $\|\dot z_j(t_3)\|=\delta_2$, $(\dot z_j(t_3),p)>0$, $t_3<+\infty$. На полуинтервале $[t_3,t_3+\tau_1)$ управление выбираем как в случае 3, только вместо δ_1 из случая 3 берем δ_2, $v(t)=p$, $t\geqslant t_3+\tau_1$.

Если $l=m$, но $t_1\neq t_2$, то уклонение от встречи доказывается как в 8.9а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{j,l\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.9в.2. Пусть t_2 — момент, в который $\|\dot z_j(t_2)\|=\delta_2$, $(\dot z_j(t_2),p)>0$, $t_2<+\infty$, $j=m$. Для доказательства убегания в данном случае возьмем такие δ_1, δ_2, δ_3, что

$$\tau_1=\frac{\delta}{4},\quad \delta_1=\delta\frac{\tau_1}{3}+\frac{(\tau_1)^2}{12},\quad \delta_2=\frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^2}{3!}+\frac{(\tau_1)^3}{4!}\Big),\quad \delta_3=\frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!}+\frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big).$$

Тогда на полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ выполнено

$$(z_m(t_1+\tau_1),p)<\frac{1}{2}\Big(\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!}+\frac{(\tau_1)^4}{4!}\Big)+\frac{\tau_1}{2}\Big(\delta\frac{\tau_1^2}{3!}+\frac{\tau_1^3}{4!}\Big)-\delta\frac{(\tau_1)^3}{3!}-\frac{(\tau_1)^4}{4!}=0.$$

Маневр обхода преследователя P_l осуществим также как в 8.9а. Итак, $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$. На $[t_1,t_1+\tau_1)$ убегающий E должен поступить как в случае 4 или 3, но при этом подпустить преследователя P_m ближе. Далее, когда встречи с преследователем P_m удалось избежать, полагаем $v(t)=p$, $t\geqslant t_1+\tau_1$, до момента t_3, где t_3: $\|\ddot z_l(t_3)\|=\delta_1$, $(\ddot z_l(t_3),p)>0$, $t_3<+\infty$. На полуинтервале $[t_3,t_3+\tau_1)$ управление выбираем как в случае 2. Потом $v(t)=p$, $t\geqslant t_3+\tau_1$.

При $m=j$, $t_1\neq t_2$, уклонение от встречи доказывается как в 8.9а. При выбранном таким образом управлении убегающего E преследователь P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{l,m\}$, по существу, не влияет на исход игры.

8.10. Пусть во время маневра обхода преследователя P_l происходит сближение с преследователями P_j и P_m. Полагаем $v(t)=p$, $t\in[0,t_1)$, где t_1: $\|\ddot z_l(t_1)\|=\delta_1$ и $(\ddot z_l(t_1),p)>0$, $t_1<+\infty$. На полуинтервале $[t_1,t_1+\tau_1)$ будем выбирать управление v специальным образом и с учетом поведения преследователей P_j и P_m. Выбираем управление v как в случае 2 до момента t_2.

Пусть t_2 — момент, в который $\|\dot z_j(t_2)\|=\delta_4$ и $(\dot z_j(t_2),p)>0$, $t_2<+\infty$. После того, как настал момент t_2, управление нужно выбирать как в случае 3, только вместо δ_1 нужно взять δ_4: $\delta_4=\delta\dfrac{(\tau_2)^2}{3!}+\dfrac{(\tau_2)^3}{4!}$, $\tau_2=\dfrac{\delta_1}{2}$, до момента t_3: $\|z_m(t_3)\|=\delta_5$ и $(z_m(t_3),p)>0$, $t_3<+\infty$. После того как настал момент t_3, управление нужно выбирать как в случае 4, только вместо δ_1 взять δ_5: $\delta_5=\delta\dfrac{(\tau_3)^3}{3!}+\dfrac{(\tau_3)^4}{4!}$, $\tau_3=\frac{\tau_2}{4}$.

Когда маневр обхода m-ого преследователя будет завершен, продолжим маневр обхода j-ого преследователя, $t\geqslant t_3+\tau_3$, как в случае 3, только вместо δ_1 возьмем δ_4, до момента $t=t_2+\tau_2$. При $t\geqslant t_2+\tau_2$ завершаем маневр обхода преследователя P_l и $v(t)=p$, $t\geqslant t_1+\tau_1$.

Если l, j и m поменяются местами, то управление будем применять как в случаях 2, 3 и 4 соответственно. Пусть $\tau_1=\dfrac{\delta}{4}$, $\tau_i=\dfrac{\tau_{i-1}}{4}$, $i=2,3$,

$$\Delta_1(\tau)=\delta\frac{\tau}{3}+\frac{\tau^2}{12},\quad \Delta_2(\tau)=\delta\frac{\tau^2}{3!}+\frac{\tau^3}{4!},\quad \Delta_3(\tau)=\delta\frac{\tau^3}{3!}+\frac{\tau^4}{4!}.\tag{24}$$

Случай 9. Предположим, что $(z_i^0,p)>0$ для некоторого $i\in\mathbb{N}_r$, $1<r\leqslant n$, и $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\ldots,q$, $q\leqslant r$, что $\tau_j>\tau_{j+1}$, $\delta_j>\delta_{j+1}$, $j=1,\ldots,q-1$, причем если в момент $t'>0$ для некоторого $l\in\mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\|=\delta_j$, $(z_l(t'),p)>0$, то $(z_l(t'+\tau_j),p)\leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$.

Момент времени $t_i>0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_3(t)=\delta_i$ и существует $l\in\mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(z_l(t_i),p)>0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Примем

$$v(t) = p, \quad t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \tag{25}$$

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу $\tau_1^i = \dfrac{\delta}{2^{i+2}}$, $\delta_1^i = \Delta_3(\tau_1^i)$. Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q} \Big(\delta \frac{(\tau_1^i)^3}{3!} + \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} \Big) = \sum_{i=1}^{q} \Big(\frac{\delta^4}{3!(2^{i+2})^3} + \frac{\delta^4}{4!(2^{i+2})^4} \Big) < \frac{247\delta^4}{6! \cdot 128}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_n$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \dfrac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут «обходиться» преследователи $P_i, \ldots, P_n$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Тогда существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|z_l(\tau_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(z_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который

$$(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) = -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|.$$

Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < n$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, n$. Поэтому $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{n} [t_j, t_j + \tau_j)$, если $i < n$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$.

Предположим, что $i < n$ и $v(s) = u_i(s)$, $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i + 1, \ldots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i + 1, \ldots, n$, настолько близко и обходить их за столь малое время, что для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i + \tau), \dot{z}_i(t_i + \tau)) = -\|z_i(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i + \tau)\| \tag{27}$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$,

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{28}$$

Из неравенства (27) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза. Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, кривую, заданную параметрически:

$$x(\tau) = z_i(t_i+\gamma_i) + \dot z_i(t_i+\gamma_i)\cdot\tau + \ddot z_i(t_i+\gamma_i)\frac{\tau^2}{2} + \dddot z_i(t_i+\gamma_i)\frac{\tau^3}{3!},$$
$$y(\tau) = \dot z_i(t_i+\gamma_i) + \ddot z_i(t_i+\gamma_i)\cdot\tau + \dddot z_i(t_i+\gamma_i)\frac{\tau^2}{2}.$$

Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x\in H_i(\tau)} \|x\| > 0$. Функция $f(\tau) : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i+\gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau\in[0,\tau_i]} f(\tau)\}. \tag{29}$$

Если $v(s) = u_i(s)$, $s\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория при $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ задается как $z_i^0 = x(t-t_i-\gamma_i)$, $\dot z_i^0 = y(t-t_i-\gamma_i)$. Для любого $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ справедливы неравенства

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i, \quad \|\dot z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i. \tag{30}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r+\tau^r)$, $r = 1, 2, \ldots$, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\tau^r < \xi_{i+1}, \quad \xi_{i+1} = \min\left\{\Lambda,\ -\tau_i + \sqrt{\tau_1^2 + \frac{\beta_i}{2}},\ \frac{\beta_i}{4}\right\}, \tag{31}$$

Λ — сумма всех корней уравнения $\xi_{i+1}^4 + 2\xi_{i+1}^3\tau_i + \xi_{i+1}^2\tau_i^2 + \xi_{i+1}\tau_i^3 - \frac{\beta_i}{2} = 0$.

Далее покажем, что если управление $v(s) = u_l(s)$, при $s\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)\setminus\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r, t^r+\tau^r)$, а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}[t^r, t^r+\tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, такова, что

$$\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{32}$$

$$\|\dot z_i^l(t) - \dot z_i^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2} \tag{33}$$

для любого управления $u_i(s)$, $s\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$.

Пусть $l = 1$. Понятно, что $z_i^1(t_1) = z_i^0(t_1)$. В точке $t = t^1+\tau^1$ $\|z_i^1(t^1+\tau^1) - z_i^0(t^1+\tau^1)\| \leqslant (\tau^1)^4$. Тогда при $t\in[t^1+\tau^1, t_i+\tau_i]$ выполнено $\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| \leqslant (\tau^1)^4 + 2(\tau^1)^3\tau_i + (\tau^1)^2\tau_i^2 + \tau^1\tau_i^3$. Поэтому для всех t из $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ $\|z_i^1(t) - z_i^0(t)\| < (\tau^1)^4 + 2(\tau^1)^3\tau_i + (\tau^1)^2\tau_i^2 + \tau^1\tau_i^3$. Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для натурального l, $t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ справедливо неравенство

$$\|z_i^l(t) - z_i^0(t)\| \leqslant \xi_{i+1}^4 + 2\xi_{i+1}^3\tau_i + \xi_{i+1}^2\tau_i^2 + \xi_{i+1}\tau_i^3 \leqslant \frac{\beta_i}{2}.$$

Таким образом, неравенство (32) доказано. Неравенство (33) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для всех $\tau\in[\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i+\tau), \dot z_i^l(t_i+\tau)) \neq -\|z_i^l(t_i+\tau)\|\cdot\|\dot z_i^l(t_i+\tau)\|. \tag{34}$$

Предположим противное. Пусть существуют такие числа $\tau_0\in[\gamma_i, \tau_i]$, $q > 0$, что справедливо соотношение $z_i^l(t_i+\tau_0) = -q\cdot\dot z_i^l(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (32), (33) векторы $z_i^0(t_i+\tau_0)$, $\dot z_i^0(t_i+\tau_0)$

представимы в виде $z_i^0(t_i+\tau_0)=z_i^l(t_i+\tau_0)+x$, $\dot z_i^0(t_i+\tau_0)=\dot z_i^0(t_i+\tau_0)+y$, где $x,y\in\dfrac{\beta_i S}{2}$. Пусть $L=\{\alpha\,|\,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^1,\alpha_1+\alpha_2=1\}$.

Согласно (29), $\min\limits_{\alpha\in L}\|\alpha_1(z_i^l(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2(\dot z_i^l(t_i+\tau_0)+y)\|\geqslant\beta_i$. Однако при $\alpha_1^*=\frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^*=\dfrac{q}{1+q}$ справедливо неравенство $\|\alpha_1^*(z_i^l(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2^*(\dot z_i^l(t_i+\tau_0)+y)\|\leqslant\frac{\beta_i}{2}$. Пришли к противоречию. Следовательно неравенство (32) выполняется при любом τ из $[\gamma_i,\tau_i]$. В момент $t=t_i$ по формулам (29),(31) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^\infty$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+l}=\frac{\xi_{i+1}}{2^l},\quad \delta_{i+1}^{i+l}=\Delta_3(\tau_{i+1}^{i+l}).$$

Понятно, что $\tau_{i+1}^{i+1}<\tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{l=1}^\infty\tau_{i+1}^{i+l}=\xi_{i+1}$.

Полагаем $\delta_{i+1}=\delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1}=\tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$ происходит сближение с преследователями $P_{i+1},\dots,P_n$, то убегающий обходит их за столь малое время, что

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]}\|z_i(t)\|\geqslant\frac{\beta_i}{2}.$$

Поскольку $\delta_{i+1}<\tau_{i+1}^{i+1}\leqslant\dfrac{\beta_i}{8}$, то неравенство (28) выполнено. Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале формируется следующим образом:

$$v(s)=p,\ \ s\in[0,+\infty)\setminus\bigcup_{l=1}^\infty[t_l,t_l+\tau_l),$$

$v(s)=u_i(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup\limits_{l=1}^n[t_l,t_l+\tau_l)$, если $i<n$, и $v(s)=u_i(s)$, $s\in[t_i,t_i+\tau_i)$, если $i=n$. Уклонение от встречи в случае 9 доказано.

Случай 10. Предположим, что $(\dot z_i^0,p)>0$ для некоторого $i\in\mathbb{N}_r$, $1<r\leqslant n$, и $(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$. При этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(z_i^0,p)\leqslant 0$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\dots,q$, $q\leqslant r$, что $\tau_j>\tau_{j+1}$, $\delta_j>\delta_{j+1}$, $j=1,\dots,q-1$, причем если в момент $t'>0$ для некоторого $l\in\mathbb{N}_r$ $\|\dot z_l(t')\|=\delta_j$, $(\dot z_l(t'),p)>0$, то $(\dot z_l(t'+\tau_j),p)\leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$.

Момент времени $t_i>0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t)=\delta_i$ и существует $l\in\mathbb{N}_r$ такой, что $\|\dot z_l(t_i)\|=\delta_i$, $(\dot z_l(t_i),p)>0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t=t_i$ выполнено $\|\dot z_i(t_i)\|=\delta_i$ и $(\dot z_i(t_i),p)>0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t=0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$ по правилу $\tau_1^i=\dfrac{\delta}{2^{i+2}}$, $\delta_1^i=\Delta_2(\tau_1^i)$. Числа τ_i, $i=1,\dots,q$, будут определены так, что $\tau_i\leqslant\tau_1^i$, $i=1,\dots,q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^q\tau_i<\xi_1=\sum_{i=1}^q\Big(\delta\frac{(\tau_1^i)^2}{3!}+\frac{(\tau_1^i)^3}{4!}\Big)=\sum_{i=1}^q\Big(\frac{\delta^3}{3!(2^{i+2})^2}+\frac{\delta^3}{4!(2^{i+2})^3}\Big)<\frac{117\delta^3}{5!\cdot 448}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i=1,\dots,n$, на отрезке $[0,t]$ и $v(s)$ на множестве $[0,t]\bigcap\Big(\bigcup\limits_{i=1}^q[t_i,t_i+\tau_i)\Big)$ справедливы неравенства $(\ddot z_i(t),p)<-\delta$, $t\in[0,+\infty)$, $i=1,\dots,n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q=n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, что если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_n$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ выполнено $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \tau_1^i - \dfrac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом.

Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_n$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Тогда существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|\dot{z}_l(\tau_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ строим по формуле (26). Доказательство уклонения от встречи поэтому полностью повторяет доказательство убегания в случае 9.

В момент $t = t_i$ по формулам (29), (31) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_{i+1}^{i+l} = \dfrac{\xi_{i+1}}{2^l}$, $\delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_2(\tau_{i+1}^{i+l})$. Понятно, что $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}$.

Полагаем $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ происходит сближение с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$, то убегающий обходит их за столь малое время, что

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}.$$

Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \dfrac{\beta_i}{8}$, то неравенство (28) выполнено. Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале формируется следующим образом:

$$v(s) = p,\ \ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} [t_l, t_l + \tau_l),$$

$v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{n} [t_l, t_l + \tau_l)$, если $i < n$, и $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$. Уклонение от встречи в случае 10 доказано.

Случай 11. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, и $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$. При этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем если в момент $t' > 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу $\tau_1^i = \dfrac{\delta}{2^{i+2}}$, $\delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i)$. Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 = \sum_{i=1}^{q} \Big(\delta \frac{\tau_1}{3} + \frac{(\tau_1^i)^2}{12}\Big) = \sum_{i=1}^{q} \Big(\frac{\delta^2}{3 \cdot 2^{i+2}} + \frac{\delta^2}{12 \cdot 4^{i+2}}\Big) < \frac{27\delta^2}{320}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0,t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\ddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем. Заметим также, что если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_n$ выполняются соотношения $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Полагаем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_n$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \ddot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\ddot{z}_i(t_i)\|$. Тогда существует число $0 < \epsilon_i < \tau_i$ такое, что при произвольных $u_l(s)$, $l = i, \ldots, n$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \epsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau \in [0, \epsilon_i]} \|\ddot{z}_l(\tau_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\ddot{z}_i(t_i + \epsilon_i), p) > 0$. Векторы $z_i(t_i)$, $\ddot{z}_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S$ такой, что $(z_i(t_i), \psi_i) = (\ddot{z}_i(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ определяем как в (26).

Здесь $t_i + \gamma_i$ — некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i + \epsilon_i]$, в который

$$(z_i(t_i + \gamma_i), \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)) = -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \cdot \|\ddot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|.$$

Если же $(z_i(t_i), \ddot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \cdot \|\ddot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако если $i < n$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями P_l, $l = i+1, \ldots, n$. Поэтому $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{n} [t_j, t_j + \tau_j)$, если $i < n$, и $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, если $i = n$.

Предположим, что $i < n$ и $v(s) = u_i(s)$, $t_l \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $l = i+1, \ldots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями P_l, $l = i+1, \ldots, n$, настолько близко и обходить их за столь малое время, что для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, выполнялись следующие соотношения

$$(z_i(t_i + \tau), \ddot{z}_i(t_i + \tau)) = -\|z_i(t_i + \tau)\| \cdot \|\ddot{z}_i(t_i + \tau)\| \tag{35}$$

для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$, а также соотношение (28). Обозначим через $H_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, кривую, заданную параметрически:

$$x(\tau) = z_i(t_i + \gamma_i) + \dot{z}_i(t_i + \gamma_i) \cdot \tau + \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i) \frac{\tau^2}{2} + \dddot{z}_i(t_i + \gamma_i) \frac{\tau^3}{3!},$$
$$y(\tau) = \ddot{z}_i(t_i + \gamma_i) + \dddot{z}_i(t_i + \gamma_i) \cdot \tau.$$

Можно считать, что функция $f(\tau) = \min\limits_{x \in H_i(\tau)} \|x\| > 0$. Функция $f(\tau) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число β_i, заданное в (29).

Если $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, то соответствующая траектория при $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ задается как $z_i^0 = x(t - t_i - \gamma_i)$, $\ddot{z}_i^0 = y(t - t_i - \gamma_i)$. Для любого $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ справедливы неравенства

$$\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i, \quad \|\ddot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i. \tag{36}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^r, t^r + \tau^r)$, $r = 1, 2, \ldots$, что выполнено (31).

Далее покажем, что если управление $v(s) = u_l(s)$, при $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r+\tau^r)$, а на множестве $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [t^r, t^r+\tau^r)$ управление убегающего произвольно, то соответствующая траектория $z_i^l(t)$, $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ такова, что (32) и

$$\|\ddot{z}_i^l(t) - \ddot{z}_i^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2} \tag{37}$$

для любого управления $u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$. Заметим, что (32) доказывается аналогично тому, как это сделано в случае 9. Неравенство (37) сразу следует из определения числа ξ_{i+1}.

Покажем теперь, что для всех $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^l(t_i+\tau), \ddot{z}_i^l(t_i+\tau)) \neq -\|z_i^l(t_i+\tau)\| \cdot \|\ddot{z}_i^l(t_i+\tau)\|. \tag{38}$$

Предположим противное. Пусть существуют такие числа $\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i]$, $q > 0$, что справедливо соотношение $z_i^l(t_i+\tau_0) = -q \cdot \ddot{z}_i^l(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (32), (37) векторы $z_i^0(t_i+\tau_0)$, $\ddot{z}_i^0(t_i+\tau_0)$ представимы в виде $z_i^0(t_i+\tau_0) = z_i^l(t_i+\tau_0)+x$, $\ddot{z}_i^0(t_i+\tau_0) = \ddot{z}_i^0(t_i+\tau_0)+y$, где $x, y \in \dfrac{\beta_i S}{2}$. Пусть $L = \{\alpha \,|\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \alpha_1+\alpha_2 = 1\}$.

Согласно (29), $\min\limits_{\alpha \in L} \|\alpha_1(z_i^l(t_i+\tau_0)+x) + \alpha_2(\ddot{z}_i^l(t_i+\tau_0)+y)\| \geqslant \beta_i$. Однако при $\alpha_1^* = \dfrac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \dfrac{q}{1+q}$ справедливо неравенство $\|\alpha_1^*(z_i^l(t_i+\tau_0)+x) + \alpha_2^*(\ddot{z}_i^l(t_i+\tau_0)+y)\| \leqslant \dfrac{\beta_i}{2}$. Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (32) выполняется при любом τ из $[\gamma_i, \tau_i]$. В момент $t = t_i$ по формулам (29), (31) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+l}\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_{i+1}^{i+l} = \frac{\xi_{i+1}}{2^l}$, $\delta_{i+1}^{i+l} = \Delta_1(\tau_{i+1}^{i+l})$. Понятно, что

$$\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+l} = \xi_{i+1}.$$

Выбираем $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Если на интервале $(t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$ происходит сближение с преследователями $P_{i+1}, \ldots, P_n$, то убегающий обходит их за столь малое время, что $\min\limits_{t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \dfrac{\beta_i}{2}$.

Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} \leqslant \dfrac{\beta_i}{8}$, то неравенство (28) выполнено. Итак, управление убегающего на полубесконечном интервале формируется следующим образом:

$$v(s) = p, \ s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} [t_l, t_l+\tau_l),$$

$v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{n} [t_l, t_l+\tau_l)$, если $i < n$, и $v(s) = u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i)$, если $i = n$. Уклонение от встречи в случае 11 доказано.

Случай 12а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\dot{z}_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$, при этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r+1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\dot{z}_m(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_m(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t'+\tau_j]$ в первом случае и $(z_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t'+\tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. А если $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, то $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_3(\tau_1^i),\ \hat{\delta}_1^i = \Delta_2(\tau_1^i). \tag{39}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q} \Delta_3(\tau_1^i) + \Delta_2(\tau_1^1) < \frac{\delta^3\left(17 - \frac{7\delta}{30}\right)}{3! \cdot 16^2}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i)\right)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m\})$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, что если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \cdot \tau_1^i - \dfrac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m$, то управление убегающего до момента $t = t_m$ нужно выбирать как в случае 9, а затем действовать в соответствии со случаем 10. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 9.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 9, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m.

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 10 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 9.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_m(t_i')\| = \Delta_2(\dfrac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\dfrac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 10. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 12а доказано.

Случай 12б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 12а, только $m \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 12а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \delta_m^m$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \hat{\delta}_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \dfrac{\Delta_3(\tau_m^m)}{2}$, $\hat{\Delta}_m^m = \dfrac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$. Тогда стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 7б, только вместо δ_1 возьмем $\hat{\Delta}_m^m$, вместо δ_2 возьмем Δ_m^m, а вместо τ_1 из случая 7б — τ_m.

Случай 13а. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(z_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$, при этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|z_m(t')\| = \delta_j$, $(z_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(z_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае и $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, то $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \ \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i), \ \hat{\delta}_1^i = \Delta_3(\tau_1^i). \tag{40}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q} \Delta_2(\tau_1^i) + \Delta_3(\tau_1^1) < \frac{117\delta^3}{5! \cdot 448} + \frac{11\delta^4}{2^{15}}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m\})$, не может произойти. Не ограничивая общности, далее считаем, что $q = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, что если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \tau_1^i - \frac{\delta (\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|z_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i - \dfrac{\delta (\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|z_m(t)\| = \delta_m$, то управление убегающего до момента $t = t_m$ нужно выбирать как в случае 10, а затем действовать в соответствии со случаем 9. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 10.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 10, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m.

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 10.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_m(t_i')\| = \Delta_3(\dfrac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\dfrac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 9. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 13а доказано.

Случай 13б. Пусть начальные условия такие же как в случае 13а, только $m \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\dot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in \mathbb{N}_r$, $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 13а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \hat{\delta}_m^m$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \dfrac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$, $\hat{\Delta}_m^m = \dfrac{\Delta_3(\tau_m^m)}{2}$. Тогда стратегия убегания и доказательство будут такими же как в случае 7б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_m^m$, а вместо τ_1 из случая 7б — τ_m.

Случай 14а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$ При этом $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, $r < m < n$, а также $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + m$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется для некоторого $l \in Q_m^r$, $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in Q_m^r$, в первом случае, и $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in \mathbb{N}_r$, — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in Q_m^r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности полагаем, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу (39).

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Delta_3(\tau_1^i) \ + \sum_{i=r+1}^{q} \Delta_2(\tau_1^i) < \frac{\delta^3}{5! \cdot 448} + \frac{247\delta^4}{8! \cdot 16}.$$

Тогда сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup Q_m^r)$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$,

$(z_i(t'),p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'),p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ $(z_i(t'+\tau_1^i),p) < \delta_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

А если в момент $t=t'$ выполнено $\|\dot z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot z_i(t'),p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'),p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ $(z_i(t'+\tau_1^i),p) < \hat\delta_1^i\tau_1^i - \dfrac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat\delta_1^1$, если $\|\dot z_1(t_1)\| = \hat\delta_1^1$. Нетрудно видеть, что $t_1 > 0$.

Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i),p) > 0$, или $\|\dot z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot z_i(t_i),p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^\infty$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^\infty$, $\{\hat\delta_i^l\}_{l=i}^\infty$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будут «обходиться» преследователи $P_i,\ldots,P_{r+m}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ строим исходя из информации о том, какое равенство в момент $t=t_i$ выполнено: $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ или $\|\dot z_i(t_i)\| = \delta_i$. В первом случае нужно руководствоваться правилами случая 9, во втором — случая 10.

Если существуют номера $i,j \in \mathbb{N}_n$, $i \neq j$, такие, что $t_i = t_j$, то сначала обходим i-того преследователя, а затем, подпустив j-ого на расстояние $\Delta_3(\dfrac{\tau_j^j}{2})$, применяем управление для обхода преследователя P_j за время $\dfrac{\tau_j}{2}$. Таким образом, управление в случае 14а построено.

Случай 14б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 14а, только существует номер $i\in\mathbb{N}_r$ такой, что $(z_i^0,p) > 0$ и $(\dot z_i^0,p) > 0$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 14а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_i$ такой, что $\|z_i(t)\| = \delta_i^i$ и $\|\dot z_i(t)\| = \hat\delta_i^i$. Пусть $\Delta_i^i = \dfrac{\Delta_3(\tau_i^i)}{2}$, $\hat\Delta_i^i = \dfrac{\Delta_2(\tau_i^i)}{2}$. Тогда стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 7б, только вместо δ_1 возьмем $\hat\Delta_i^i$, вместо δ_2 возьмем Δ_i^i, а вместо τ_1 из случая 7б — τ_i.

Случай 15а. Предположим, что $(z_i^0,p) > 0$ для любого $i\in\mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\ddot z_m^0,p) > 0$ для некоторого $m\in\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$ и $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$, $(\ddot z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{m\}$, при этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\dot z_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\ldots,q$, $q\leqslant r+1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j=1,\ldots,q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\ddot z_m(t')\| = \delta_j$, $(\ddot z_m(t'),p) > 0$, или для некоторого $l\in\mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'),p) > 0$, то $(\ddot z_m(t'+\tau_j),p)\leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$ в первом случае и $(z_l(t'+\tau_j),p)\leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|\ddot z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot z_m(t_i),p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l\in\mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i),p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t=t_i$ выполнено $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i),p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t=0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\hat\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_3(\tau_1^i),\ \hat\delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i). \tag{41}$$

Числа τ_i, $i=1,\ldots,q$, будут определены так, что $\tau_i\leqslant\tau_1^i$, $i=1,\ldots,q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^q \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^q \Delta_3(\tau_1^i) + \Delta_1(\tau_1^1) < \frac{23\delta^4}{4!\cdot 1792} + \frac{11\delta^2}{256}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i=1,\ldots,n$, на отрезке $[0,t]$ и $v(s)$ на множестве

$[0,t]\bigcap\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q}[t_i,t_i+\tau_i)\Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t),p)<-\delta$, $t\in[0,+\infty)$, $i=1,\ldots,n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus(\mathbb{N}_r\cup\{m\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t=t'$ для некоторого $i\in\mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\|=\delta_1^i$, $(z_i(t'),p)>0$, $(\dddot{z}_i(t'),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$

$$(z_i(t'+\tau_1^i),p)<\delta_1^i-\frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!}-\frac{(\tau_1^i)^4}{4!}=0.$$

А если в момент $t=t'$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t')\|=\hat{\delta}_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'),p)>0$, $(\dddot{z}_i(t'),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$

$$(z_i(t'+\tau_1^i),p)<\hat{\delta}_1^i\frac{(\tau_1^i)^2}{2}-\frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!}-\frac{(\tau_1^i)^4}{4!}=0.$$

Выбираем $\tau_1=\tau_1^1$, $\delta_1=\delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\|=\delta_1^1$, и $\delta_1=\hat{\delta}_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\|=\hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1>0$. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\|=\delta_i$, $(z_i(t_i),p)>0$, или $\|\ddot{z}_i(t_i)\|=\delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i),p)>0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i,\ldots,P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|\ddot{z}_m(t)\|=\delta_m$, то управление убегающего до момента $t=t_m$ нужно выбирать как в случае 9, а затем действовать в соответствии со случаем 11. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 9.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j\in\mathbb{N}_r\setminus\{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 9, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m.

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i\in\mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 11 за время τ_m, а с момента $t=t_i$ руководствоваться правилами случая 9.

Если же $t_m=t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_m(t_i')\|=\Delta_1(\frac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 11. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 15а доказано.

Случай 15б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 15а, только $m\in\mathbb{N}_r$. Тогда $(z_m^0,p)>0$ и $(\ddot{z}_m^0,p)>0$, $m\in\mathbb{N}_r$, $q\leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 15а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t=t_m$ такой, что $\|z_m(t)\|=\delta_m^m$ и $\|\ddot{z}_m(t)\|=\hat{\delta}_m^m$. Пусть $\Delta_m^m=\dfrac{\Delta_3(\tau_m^m)}{2}$, $\hat{\Delta}_m^m=\dfrac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$. Тогда стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 6б, только вместо δ_1 возьмем $\hat{\Delta}_m^m$, вместо δ_2 возьмем Δ_m^m, а вместо τ_1 из случая 6б — τ_m.

Случай 16а. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0,p)>0$ для любого $i\in\mathbb{N}_r$, $1<r\leqslant n$, $(z_m^0,p)>0$ для некоторого $m\in\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$ и $(\ddot{z}_i^0,p)\leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n\setminus\mathbb{N}_r$, $(z_i^0,p)\leqslant 0$ для любого $i\in\mathbb{N}_n\setminus\{m\}$, при этом $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\dot{z}_i^0,p)\leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j=1,\ldots,q$, $q\leqslant r+1$, что $\tau_j>\tau_{j+1}$, $\delta_j>\delta_{j+1}$, $j=1,\ldots,q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|z_m(t')\| = \delta_j$, $(z_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(z_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае и $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|z_m(t_i)\| = \delta_i$, $(z_m(t_i), p) > 0$, то $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i),\ \hat{\delta}_1^i = \Delta_3(\tau_1^i). \tag{42}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) + \Delta_3(\tau_1^1) < \frac{27\delta^2}{5 \cdot 4^3} + \frac{11\delta^4}{8^5}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|z_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ $(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i - \dfrac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \dfrac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0$.

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|z_m(t)\| = \delta_m$, то управление убегающего до момента $t = t_m$ нужно выбирать как в случае 11, а затем действовать в соответствии со случаем 9. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 11.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 11, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m (случай 9).

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 11.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_m(t_i')\| = \Delta_3(\dfrac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\dfrac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 9. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 11, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 16а доказано.

Случай 16б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 16а, только $m \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(z_m^0, p) > 0$ и $(\ddot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in \mathbb{N}_r$, $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 16а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|z_m(t)\| = \hat{\delta}_m^m$ и $\|\ddot{z}_m(t)\| = \delta_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \dfrac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$, $\hat{\Delta}_m^m = \dfrac{\Delta_3(\tau_m^m)}{2}$. Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 6б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_m^m$, а вместо τ_1 из случая 6б — τ_m.

Случай 17а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$. При этом $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, и $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, а также $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + m$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется для некоторого $l \in Q_m^r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in Q_m^r$, в первом случае, и $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in \mathbb{N}_r$, — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in Q_m^r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-го сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^\infty$ по правилу (41).

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Delta_3(\tau_1^i) \ + \sum_{i=r+1}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) < \frac{247\delta^4}{1260 \cdot 8^3} + \frac{27\delta^2}{320}.$$

Тогда сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup Q_m^r)$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Нетрудно видеть, что $t_1 > 0$.

Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^\infty$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^\infty$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^\infty$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+m}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим исходя из информации о том, какое равенство в момент $t = t_i$ выполнено: $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ или $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$. В первом случае нужно руководствоваться правилами случая 9, во втором — случая 11.

Если существуют номера $i, j \in \mathbb{N}_n$, $i \neq j$, такие, что $t_i = t_j$, то сначала обходим i-того преследователя, а затем, подпустив j-ого на расстояние $\Delta_1(\frac{\tau_j^j}{2})$, применяем управление для обхода преследователя P_j за время $\frac{\tau_j}{2}$. Таким образом управление в случае 17а построено.

Случай 17б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 17а, только существует номер $i \in \mathbb{N}_r$ такой, что $(z_i^0, p) > 0$ и $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 17а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_i$ такой, что $\|z_i(t)\| = \delta_i^i$ и $\|\ddot{z}_i(t)\| = \hat{\delta}_i^i$. Пусть $\Delta_i^i = \dfrac{\Delta_1(\tau_i^i)}{2}$, $\hat{\Delta}_i^i = \dfrac{\Delta_3(\tau_i^i)}{2}$. Стратегия убегания и доказательство будут такими же как в случае 6б, только вместо δ_1 возьмем Δ_i^i, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_i^i$, а вместо τ_1 из случая 6б — τ_i.

Случай 18а. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\dot{z}_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$ и $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$, при этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\dot{z}_m(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае, и $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|\dot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_m(t_i), p) > 0$, то $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i),\ \hat{\delta}_1^i = \Delta_2(\tau_1^i). \tag{43}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) + \Delta_2(\tau_1^1) < \frac{27\delta^2}{320} + \frac{11\delta^3}{8^4}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \cdot \tau_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta_m$, то управление убегающего до момента $t = t_m$ нужно выбирать как в случае 11, а затем действовать в соответствии со случаем 10. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 11.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 11, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m.

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 10 за время τ_m, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 11.

Если же $t_m = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_m(t_i')\| = \Delta_2(\frac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\frac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 10. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 11, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 18а доказано.

Случай 18б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 18а, только $m \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\dot{z}_m^0, p) > 0$ и $(\ddot{z}_m^0, p) > 0$, $m \in \mathbb{N}_r$, $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 18а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|\dot{z}_m(t)\| = \hat{\delta}_m^m$ и $\|\ddot{z}_m(t)\| = \delta_m^m$. Пусть $\Delta_m^m = \dfrac{\Delta_1(\tau_m^m)}{2}$, $\hat{\Delta}_m^m = \dfrac{\Delta_2(\tau_m^m)}{2}$. Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 5б, только вместо δ_1 возьмем Δ_m^m, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_m^m$, а вместо τ_1 из случая 5б — τ_m.

Случай 19а. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\ddot{z}_m^0, p) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$, при этом $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (z_i^0, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r+1$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q-1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\ddot{z}_m(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_m(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\ddot{z}_m(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_m(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае и $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|\ddot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_m(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$. А если $\|\ddot{z}_m(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_m(t_i), p) > 0$, то $m = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t=0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i),\ \hat{\delta}_1^i = \Delta_1(\tau_1^i). \tag{44}$$

Числа τ_i, $i=1,\ldots,q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i=1,\ldots,q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q}\tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=2}^{q}\Delta_2(\tau_1^i) + \Delta_1(\tau_1^1) < \frac{39\delta^3}{70\cdot 4^5} + \frac{11\delta^5}{2^8}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i=1,\ldots,n$, на отрезке $[0,t]$ и $v(s)$ на множестве $[0,t]\bigcap\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q}[t_i,t_i+\tau_i)\Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t),p) < -\delta$, $t\in[0,+\infty)$, $i=1,\ldots,n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i\in\mathbb{N}_n\setminus(\mathbb{N}_r\cup\{m\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t=t'$ для некоторого $i\in\mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'),p)>0$, $(\dddot{z}_i(t'),p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$

$$(z_i(t'+\tau_1^i),p) < \delta_1^i\cdot\tau_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t=t'$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'),p)>0$, $(\dddot{z}_i(t'),p)<-\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$

$$(z_i(t'+\tau_1^i),p) < \hat{\delta}_1^i\cdot\frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1>0$. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i),p)>0$, или $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i),p)>0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i,\ldots,P_{r+1}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ строим с учетом поведения преследователя P_m. Если на полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|\ddot{z}_m(t)\| = \delta_m$, то управление убегающего до момента $t=t_m$ нужно выбирать как в случае 10, а затем действовать в соответствии со случаем 11. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществить за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10. Если же сближения с преследователем P_m не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i,t_i+\tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 10.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m происходит сближение с преследователем P_j, $j\in\mathbb{N}_r\setminus\{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 10, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m.

В случае если преследователь P_m встретится раньше, чем преследователь P_i, $i\in\mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 11 за время τ_m, а с момента $t=t_i$ руководствоваться правилами случая 10.

Если же $t_m=t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_m(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_m^m}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_m осуществим за время $\dfrac{\tau_m}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 11. А затем вернемся к управлению, описанному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 19а доказано.

Случай 19б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 19а, только $m\in\mathbb{N}_r$. Тогда $(\dot{z}_m^0,p)>0$ и $(\ddot{z}_m^0,p)>0$, $m\in\mathbb{N}_r$, $q\leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 19а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_m$ такой, что $\|\ddot{z}_m(t)\| = \hat{\delta}^m_m$ и $\|\dot{z}_m(t)\| = \delta^m_m$. Пусть $\Delta^m_m = \dfrac{\Delta_2(\tau^m_m)}{2}$, $\hat{\Delta}^m_m = \dfrac{\Delta_1(\tau^m_m)}{2}$. Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 5б, только вместо δ_1 возьмем $\hat{\Delta}^m_m$, вместо δ_2 возьмем Δ^m_m, а вместо τ_1 из случая 5б — τ_m.

Случай 20а. Предположим, что $(\ddot{z}^0_i, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$ и $(\ddot{z}^0_i, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$. При этом $(\dot{z}^0_i, p) > 0$ для любого $i \in Q^r_m$, $r < m < n$, и $(\dot{z}^0_i, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q^r_m$, а также $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (z^0_i, p) \leqslant 0$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + m$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется для некоторого $l \in Q^r_m$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in Q^r_m$, в первом случае и $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$, $l \in \mathbb{N}_r$, — во втором.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется равенство $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in Q^r_m$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, или впервые выполняется равенство $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau^i_1\}^\infty_{i=1}$, $\{\delta^i_1\}^\infty_{i=1}$, $\{\hat{\delta}^i_1\}^\infty_{i=1}$ по правилу (43).

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau^i_1$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Delta_2(\tau^i_1) \ + \sum_{i=r+1}^{q} \Delta_1(\tau^i_1) < \frac{39\delta^3}{70 \cdot 4^4} + \frac{27\delta^2}{80}.$$

Тогда сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup Q^r_m)$, не может произойти. Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta^i_1$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau^i_1]$

$$(z_i(t' + \tau^i_1), p) < \delta^i_1 \frac{(\tau^i_1)^2}{2} - \frac{\delta(\tau^i_1)^3}{3!} - \frac{(\tau^i_1)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta^i_1$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau^i_1]$

$$(z_i(t' + \tau^i_1), p) < \hat{\delta}^i_1 \tau^i_1 - \frac{\delta(\tau^i_1)^3}{3!} - \frac{(\tau^i_1)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau^1_1$, $\delta_1 = \delta^1_1$, если $\|\ddot{z}_i(t_1)\| = \delta^1_1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}^1_1$, если $\|\dot{z}_i(t_1)\| = \hat{\delta}^1_1$. Нетрудно видеть, что $t_1 > 0$.

Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau^l_i\}^\infty_{l=i}$, $\{\delta^l_i\}^\infty_{l=i}$, $\{\hat{\delta}^l_i\}^\infty_{l=i}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+m}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим исходя из информации о том, какое равенство в момент $t = t_i$ выполнено: $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$. В первом случае нужно руководствоваться правилами случая 11, во втором — случая 10.

Если существуют номера $i, j \in \mathbb{N}_n$, $i \neq j$, такие, что $t_i = t_j$, то сначала обходим i-того преследователя, а затем, подпустив j-ого на расстояние $\Delta_1(\dfrac{\tau^j_j}{2})$, применяем управление для обхода преследователя P_j за время $\dfrac{\tau_j}{2}$. Таким образом, управление в случае 20а построено.

Случай 20б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 20а, только существует номер $i \in \mathbb{N}_r$ такой, что $(\dot{z}^0_i, p) > 0$ и $(\ddot{z}^0_i, p) > 0$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 20а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_i$ такой, что $\|\ddot{z}_i(t)\| = \delta_i^i$ и $\|\dot{z}_i(t)\| = \hat{\delta}_i^i$. Пусть $\Delta_i^i = \dfrac{\Delta_1(\tau_i^i)}{2}$, $\hat{\Delta}_i^i = \dfrac{\Delta_2(\tau_i^i)}{2}$. Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 5б, только вместо δ_1 возьмем Δ_i^i, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_i^i$, а вместо τ_1 из случая 5б — τ_i.

Случай 21а. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ для некоторого $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(z_{m_2}^0, p) > 0$ для некоторого $m_2 \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1\})$ и $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_2\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 2$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\dot{z}_{m_1}(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_{m_1}(t'), p) > 0$, или $\|z_{m_2}(t')\| = \delta_j$, $(z_{m_2}(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\ddot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\dot{z}_{m_1}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_{m_1}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае, $(z_{m_2}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$, при любых управлениях $u_{m_2}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором и $(\ddot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — в третьем.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, или $\eta_3(t) = \delta_i$ и $\|z_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(z_{m_2}(t_i), p) > 0$, или $\eta_1(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\ddot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, а если $\|\dot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, то $m_1 = i$. Если $\|z_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(z_{m_2}(t_i), p) > 0$, то $m_2 = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \ \delta_1^i = \Delta_1(\tau_1^i), \ \hat{\delta}_1^i = \Delta_2(\tau_1^i), \ \tilde{\delta}_1^i = \Delta_3(\tau_1^i). \tag{45}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=3}^{q} \Delta_1(\tau_1^i) + \Delta_2(\tau_1^1) + \Delta_3(\tau_1^2) < \frac{27\delta^2}{320} + \frac{11\delta^4}{8^5} + \frac{65\delta^3}{4! \cdot 16^3}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1, m_2\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\ddot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \tau_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|z_i(t')\| = \tilde{\delta}_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \tilde{\delta}_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$, $\delta_1 = \tilde{\delta}_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \tilde{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+2}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователей P_{m_1} и P_{m_2}. Если на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|\dot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_1}$ нужно выбирать как в случае 11, а затем действовать в соответствии со случаем 10. Маневр обхода преследователя P_{m_1} нужно осуществить за время τ_{m_1}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11. Если же сближения с преследователем P_{m_1} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 11.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_1} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 11, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_1}.

В случае если преследователь P_{m_1} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 10 за время τ_{m_1}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 11.

Если же $t_{m_1} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_2(\dfrac{\tau_{m_1}^{m_1}}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\dfrac{\tau_{m_1}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_2} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_2} в соответствии со случаем 9.

Если на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|z_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_2}$ нужно выбирать как в случае 11, а затем действовать в соответствии со случаем 9. Маневр обхода преследователя P_{m_2} нужно осуществить за время τ_{m_2}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11. Если же сближения с преследователем P_{m_2} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 11.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_2} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 11, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_2}.

В случае если преследователь P_{m_2} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9 за время τ_{m_2}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 11.

Если же $t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_{m_2}(t_i')\| = \Delta_3(\dfrac{\tau_{m_2}^{m_2}}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\dfrac{\tau_{m_2}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_1} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_1} в соответствии со случаем 10.

Если $t_{m_1} \in [t_i, t_i + \tau_i)$ и $t_{m_2} \in [t_i, t_i + \tau_i)$, то управление убегающего до момента $t = t_m$, где $m = m_1$ или $m = m_2$ в зависимости от того, какой преследователь встретится раньше, P_{m_1} или P_{m_2}, нужно выбирать как в случае 11, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 10, если $m = m_1$, или случаем 9, если $m = m_2$. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществлять за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11 до момента $t = t_{\tilde{m}}$, где $\tilde{m} \in \{m_1, m_2\}$ — номер преследователя, который не встречался ранее. После того как наступил момент $t = t_{\tilde{m}}$, управление выбираем как в случае 10, если $\tilde{m} = m_1$, или как в случае 9, если $\tilde{m} = m_2$. Маневр обхода преследователя $P_{\tilde{m}}$ нужно осуществлять за время $\tau_{\tilde{m}}$. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 11.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$) происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 11, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$): как в случае 9, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или как в случае 10, если $m(\tilde{m}) = m_1$.

В случае если преследователь $P_m(P_{\tilde{m}})$ встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или со случаем 10, если $m(\tilde{m}) = m_1$, за время τ_m ($\tau_{\tilde{m}}$), а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 11.

Если же $t_m(t_{\tilde{m}}) = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_2(\frac{\tau_{m_1}^{m_1}}{2})$ ($\|z_{m_2}(t_i')\| = \Delta_3(\frac{\tau_{m_2}^{m_2}}{2})$). Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} (P_{m_2}) осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{2}$ ($\frac{\tau_{m_2}}{2}$) по алгоритму, описанному в случае 10 (в случае 9), а затем вернемся к управлению, заданному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Если же $t_{m_1} = t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 11, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\dot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_2(\frac{\tau_{m_1}^{m_1}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 10, до тех пор, пока не наступит момент t_i'' такой, что $\|z_{m_2}(t_i'')\| = \Delta_3(\frac{\tau_{m_2}^{m_2}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\frac{\tau_{m_2}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 9, а затем вернемся к управлению, описанному в случае 11, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 21а доказано.

Случай 21б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 21а, только $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ ($(z_{m_2}^0, p) > 0$) и $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ ($(\ddot{z}_{m_2}^0, p) > 0$), $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r + 1$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 21а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1}$ ($t = t_{m_2}$) такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$ ($\|\ddot{z}_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2}$) и $\|\dot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$ ($\|z_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2}$). Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{2} \ (\Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}), \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_1}^{m_1})}{2} \ (\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}).$$

Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 5б (6б), только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ ($\Delta_{m_2}^{m_2}$), вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ ($\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2}$), а вместо τ_1 из случая 5б (6б) — τ_{m_1} (τ_{m_2}).

Случай 21в. Пусть начальные условия такие же, как в случае 21а, только существует номер $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $(z_{m_2}^0, p) > 0$, $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $(\ddot{z}_{m_2}^0, p) > 0$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случаях 21а и 21б, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1} = t_{m_2}$ такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$, $\|\ddot{z}_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2}$, $\|\dot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$, $\|z_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2}$. Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_2}^{m_2})}{4}, \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}.$$

Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 5б и 6б, только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ и $\Delta_{m_2}^{m_2}$, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ и $\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2}$, а вместо τ_1 из случая 5б — τ_{m_1}, вместо τ_1 из случая 6б — τ_{m_2} соответственно.

Случай 22а. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ для некоторого $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(z_{m_2}^0, p) > 0$ для некоторого $m_2 \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1\}$ и $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого

$i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_2\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 2$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\ddot{z}_{m_1}(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_{m_1}(t'), p) > 0$, или $\|z_{m_2}(t')\| = \delta_j$, $(z_{m_2}(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(\ddot{z}_{m_1}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_{m_1}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае, $(z_{m_2}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_{m_2}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором и $(\dot{z}_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — в третьем.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, или $\eta_3(t) = \delta_i$ и $\|z_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(z_{m_2}(t_i), p) > 0$, или $\eta_2(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, а если $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, то $m_1 = i$. Если $\|z_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(z_{m_2}(t_i), p) > 0$, то $m_2 = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}, \ \delta_1^i = \Delta_2(\tau_1^i), \ \hat{\delta}_1^i = \Delta_1(\tau_1^i), \ \tilde{\delta}_1^i = \Delta_3(\tau_1^i). \tag{46}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=3}^{q} \Delta_2(\tau_1^i) + \Delta_1(\tau_1^1) + \Delta_3(\tau_1^2) < \frac{11\delta^2}{2^8} + \frac{65\delta^4}{4! \cdot 16^4} + \frac{39\delta^3}{70 \cdot 4^5}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1, m_2\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|\dot{z}_i(t')\| = \delta_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i \tau_1^i - \frac{\delta (\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Если в момент $t = t'$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta (\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|z_i(t')\| = \tilde{\delta}_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \tilde{\delta}_1^i - \frac{\delta (\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$, $\delta_1 = \tilde{\delta}_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \tilde{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+2}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователей P_{m_1} и P_{m_2}. Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_1}$ нужно выбирать как в случае 10, а затем действовать в соответствии со случаем 11. Маневр обхода преследователя P_{m_1} нужно осуществить за время τ_{m_1}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10. Если же сближения с преследователем P_{m_1} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 10.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_1} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 10, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_1}.

В случае если преследователь P_{m_1} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 11 за время τ_{m_1}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 10.

Если же $t_{m_1} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_1(\dfrac{\tau_{m_1}^{m_1}}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\dfrac{\tau_{m_1}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 11, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_2} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_2} в соответствии со случаем 9.

Если на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ выполнено равенство $\|z_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_2}$ нужно выбирать как в случае 10, а затем действовать в соответствии со случаем 9. Маневр обхода преследователя P_{m_2} нужно осуществить за время τ_{m_2}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10. Если же сближения с преследователем P_{m_2} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 10.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_2} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 10, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_2}.

В случае если преследователь P_{m_2} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9 за время τ_{m_2}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 10.

Если же $t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|z_{m_2}(t_i')\| = \Delta_3(\dfrac{\tau_{m_2}^{m_2}}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\dfrac{\tau_{m_2}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_1} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_1} в соответствии со случаем 10.

Если $t_{m_1} \in [t_i, t_i + \tau_i)$ и $t_{m_2} \in [t_i, t_i + \tau_i)$, то управление убегающего до момента $t = t_m$, где $m = m_1$ или $m = m_2$ в зависимости от того, какой преследователь встретится раньше, P_{m_1} или P_{m_2}, нужно выбирать как в случае 10, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 11, если $m = m_1$, или случаем 9, если $m = m_2$. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществлять за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10 до момента $t = t_{\tilde{m}}$, где $\tilde{m} \in \{m_1, m_2\}$ — номер преследователя, который не встречался ранее. После того как наступил момент $t = t_{\tilde{m}}$, управление выбираем как в случае 11, если $\tilde{m} = m_1$, или как в случае 9, если $\tilde{m} = m_2$. Маневр обхода преследователя $P_{\tilde{m}}$ нужно осуществлять за время $\tau_{\tilde{m}}$. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 10.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$) происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 10, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$): как в случае 9, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или как в случае 11, если $m(\tilde{m}) = m_1$.

В случае если преследователь $P_m(P_{\tilde{m}})$ встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 9, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или со случаем 11, если $m(\tilde{m}) = m_1$, за время τ_m $(\tau_{\tilde{m}})$, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 10.

Если же $t_m(t_{\tilde{m}}) = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_{m_1}^{m_1}}{2})$ $(\|z_{m_2}(t_i')\| = \Delta_3(\frac{\tau_{m_2}^{m_2}}{2}))$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} (P_{m_2}) осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{2}$ $(\frac{\tau_{m_2}}{2})$ по алгоритму, описанному в случае 11 (в случае 9), а затем вернемся к управлению, заданному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Если же $t_{m_1} = t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 10, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_{m_1}^{m_1}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 11, до тех пор, пока не наступит момент t_i'' такой, что $\|z_{m_2}(t_i'')\| = \Delta_3(\frac{\tau_{m_2}^{m_2}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\frac{\tau_{m_2}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 9, а затем вернемся к управлению, описанному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом уклонение от встречи в случае 22а доказано.

Случай 22б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 22а, только $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ $((z_{m_2}^0, p) > 0)$ и $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ $((\dot{z}_{m_2}^0, p) > 0)$, $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r + 1$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случае 22а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1}$ $(t = t_{m_2})$ такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$ $(\|z_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2})$ и $\|\dot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$ $(\|z_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2})$. Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_1}^{m_1})}{2} \ (\Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}), \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{2} \ (\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}).$$

Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 5б (7б), только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ $(\Delta_{m_2}^{m_2})$, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ $(\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2})$, а вместо τ_1 из случая 5б (7б) — τ_{m_1} (τ_{m_2}).

Случай 22в. Пусть начальные условия такие же, как в случае 22а, только существует номер $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $(z_{m_2}^0, p) > 0$, $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $(\dot{z}_{m_2}^0, p) > 0$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи производится аналогично доказательству в случаях 22а и 22б, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1} = t_{m_2}$ такой, что $\|\dot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$, $\|\dot{z}_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2}$, $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$, $\|z_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2}$. Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_2}^{m_2})}{4}, \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}.$$

Тогда убегание будет доказываться так же, как в случае 5б и 7б, только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ и $\Delta_{m_2}^{m_2}$, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ и $\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2}$, а вместо τ_1 из случая 5б — τ_{m_1}, вместо τ_1 из случая 7б — τ_{m_2} соответственно.

Случай 23а. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 < r \leqslant n$, $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ для некоторого $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_{m_2}^0, p) > 0$ для некоторого $m_2 \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1\})$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для всех i из множества $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_2\}$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи убегания из такого начального состояния z^0.

В процессе построения маневра уклонения определим такие положительные числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, q$, $q \leqslant r + 2$, что $\tau_j > \tau_{j+1}$, $\delta_j > \delta_{j+1}$, $j = 1, \ldots, q - 1$, причем если в момент времени $t' > 0$ выполняется $\|\ddot{z}_{m_1}(t')\| = \delta_j$, $(\ddot{z}_{m_1}(t'), p) > 0$, или $\|\dot{z}_{m_2}(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_{m_2}(t'), p) > 0$, или для некоторого $l \in \mathbb{N}_r$ $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, то $(\ddot{z}_{m_1}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_{m_1}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ в первом случае, $(\dot{z}_{m_2}(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_{m_2}(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — во втором и $(z_l(t' + \tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$ — в третьем.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняется $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, или $\eta_2(t) = \delta_i$ и $\|\dot{z}_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_{m_2}(t_i), p) > 0$, или $\eta_3(t) = \delta_i$ и существует $l \in \mathbb{N}_r$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-того сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ выполнено $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$, а если $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_{m_1}(t_i), p) > 0$, то $m_1 = i$. Если $\|\dot{z}_{m_2}(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_{m_2}(t_i), p) > 0$, то $m_2 = i$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходят их сближения с убегающим. Управление убегающего определим соотношением (25).

При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ по правилу:

$$\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}},\ \delta_1^i = \Delta_3(\tau_1^i),\ \hat{\delta}_1^i = \Delta_1(\tau_1^i),\ \tilde{\delta}_1^i = \Delta_3(\tau_1^i). \tag{47}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, q$, будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{q} \tau_i < \xi_1 \leqslant \sum_{i=3}^{q} \Delta_3(\tau_1^i) + \Delta_1(\tau_1^1) + \Delta_2(\tau_1^2) < \frac{11\delta^2}{256} + \frac{23\delta^4}{4! \cdot 1792} + \frac{65\delta^3}{4! \cdot 16^3}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, t]$ и $v(s)$ на множестве $[0, t] \bigcap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{q} [t_i, t_i + \tau_i) \Big)$ справедливы неравенства $(\dddot{z}_i(t), p) < -\delta$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, сближения с преследователем P_i, $i \in \mathbb{N}_n \setminus (\mathbb{N}_r \cup \{m_1, m_2\})$, не может произойти.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_r$ выполняются соотношения $\|z_i(t')\| = \delta_1^i$, $(z_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \delta_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Если в момент $t = t'$ выполнено $\|\ddot{z}_i(t')\| = \hat{\delta}_1^i$, $(\ddot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \hat{\delta}_1^i \frac{(\tau_1^i)^2}{2} - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

А если в момент $t = t'$ выполнено $\|\dot{z}_i(t')\| = \tilde{\delta}_1^i$, $(\dot{z}_i(t'), p) > 0$, $(\dddot{z}_i(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) < \tilde{\delta}_1^i \tau_1^i - \frac{\delta(\tau_1^i)^3}{3!} - \frac{(\tau_1^i)^4}{4!} = 0.$$

Выбираем $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$, если $\|z_1(t_1)\| = \delta_1^1$, и $\delta_1 = \hat{\delta}_1^1$, если $\|\ddot{z}_1(t_1)\| = \hat{\delta}_1^1$, $\delta_1 = \tilde{\delta}_1^1$, если $\|\dot{z}_1(t_1)\| = \tilde{\delta}_1^1$. Отметим, что $t_1 > 0$. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, или $\|\ddot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\ddot{z}_i(t_i), p) > 0$, или $\|\dot{z}_i(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_i(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\hat{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\tilde{\delta}_i^l\}_{l=i}^{\infty}$. Число ξ_i ограничивает сверху суммарное время, в течение которого будет осуществлен маневр обхода преследователей $P_i, \ldots, P_{r+2}$.

Управление убегающего E на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ строим с учетом поведения преследователей P_{m_1} и P_{m_2}. Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_1}$ нужно выбирать как в случае 9, а затем действовать в соответствии со случаем 11. Маневр обхода преследователя P_{m_1} нужно осуществить за время τ_{m_1}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9. Если же сближения с преследователем P_{m_2} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 9.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_1} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 9, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_1}.

В случае если преследователь P_{m_1} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 11 за время τ_{m_1}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 9.

Если же $t_{m_1} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t'_i такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t'_i)\| = \Delta_1(\frac{\tau^{m_1}_{m_1}}{2})$.

Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 11, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_2} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_2} в соответствии со случаем 10.

Если на полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выполнено равенство $\|\dot{z}_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}$, то управление убегающего до момента $t = t_{m_2}$ нужно выбирать как в случае 9, а затем действовать в соответствии со случаем 10. Маневр обхода преследователя P_{m_2} нужно осуществить за время τ_{m_2}. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9. Если же сближения с преследователем P_{m_2} не происходит, то на всем полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ выбираем управление в соответствии со случаем 9.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_{m_2} происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 9, и вернуться к маневру обхода преследователя P_{m_2}.

В случае если преследователь P_{m_2} встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 10 за время τ_{m_2}, а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 9.

Если же $t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t'_i такой, что $\|\dot{z}_{m_2}(t'_i)\| = \Delta_2(\frac{\tau^{m_2}_{m_2}}{2})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\frac{\tau_{m_2}}{2}$ по алгоритму, описанному в случае 10, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Преследователь P_{m_1} встречается позже, поэтому строим маневр уклонения от преследователя P_{m_1} в соответствии со случаем 11.

Если $t_{m_1} \in [t_i, t_i + \tau_i)$ и $t_{m_2} \in [t_i, t_i + \tau_i)$, то управление убегающего до момента $t = t_m$, где $m = m_1$ или $m = m_2$ в зависимости от того, какой преследователь встретится раньше, P_{m_1} или P_{m_2}, нужно выбирать как в случае 9, а затем управление должно быть выбрано в соответствии со случаем 11, если $m = m_1$, или случаем 10, если $m = m_2$. Маневр обхода преследователя P_m нужно осуществлять за время τ_m. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9 до момента $t = t_{\tilde{m}}$, где $\tilde{m} \in \{m_1, m_2\}$ — номер преследователя, который не встречался ранее. После того как наступил момент $t = t_{\tilde{m}}$, управление выбираем как в случае 11, если $\tilde{m} = m_1$, или как в случае 10, если $\tilde{m} = m_2$. Маневр обхода преследователя $P_{\tilde{m}}$ нужно осуществлять за время $\tau_{\tilde{m}}$. Затем вернуться к управлению, заданному в случае 9.

Когда при осуществлении маневра обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$) происходит сближение с преследователем P_j, $j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}$, то за время τ_j необходимо осуществить маневр обхода преследователя P_j, руководствуясь правилами случая 9, и вернуться к маневру обхода преследователя P_m ($P_{\tilde{m}}$): как в случае 10, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или как в случае 11, если $m(\tilde{m}) = m_1$.

В случае если преследователь $P_m(P_{\tilde{m}})$ встретится раньше, чем преследователь P_i, $i \in \mathbb{N}_r$, тогда нужно осуществить маневр обхода в соответствии со случаем 10, если $m(\tilde{m}) = m_2$, или со случаем 11, если $m(\tilde{m}) = m_1$, за время τ_m ($\tau_{\tilde{m}}$), а с момента $t = t_i$ руководствоваться правилами случая 9.

Если же $t_m(t_{\tilde{m}}) = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t'_i такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t'_i)\| = \Delta_1(\frac{\tau^{m_1}_{m_1}}{2})$ ($\|\dot{z}_{m_2}(t'_i)\| = \Delta_2(\frac{\tau^{m_2}_{m_2}}{2})$). Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} (P_{m_2}) осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{2}$ ($\frac{\tau_{m_2}}{2}$) по алгоритму, описанному в случае 11 (в случае 10), а затем вернемся к управлению, заданному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i.

Если же $t_{m_1} = t_{m_2} = t_i$, то сначала выбираем управление как в случае 9, пока не наступит момент t_i' такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t_i')\| = \Delta_1(\frac{\tau_{m_1}^{m_1}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_1} осуществим за время $\frac{\tau_{m_1}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 11, до тех пор, пока не наступит момент t_i'' такой, что $\|\dot{z}_{m_2}(t_i'')\| = \Delta_2(\frac{\tau_{m_2}^{m_2}}{4})$. Маневр уклонения от преследователя P_{m_2} осуществим за время $\frac{\tau_{m_2}}{4}$ по алгоритму, описанному в случае 10, а затем вернемся к управлению, описанному в случае 9, чтобы завершить маневр уклонения от преследователя P_i. Таким образом, уклонение от встречи в случае 23а доказано.

Случай 23б. Пусть начальные условия такие же, как в случае 23а, только $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$ $((\dot{z}_{m_2}^0, p) > 0)$ и $(z_{m_1}^0, p) > 0$ $((z_{m_2}^0, p) > 0)$, $m_1(m_2) \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r + 1$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случае 23а, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1}$ $(t = t_{m_2})$ такой, что $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$ $(\|\dot{z}_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2})$ и $\|z_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$ $(\|z_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2})$. Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_1}^{m_1})}{2}\ (\Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}), \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{2}\ (\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}).$$

Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 6б (7б), только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ $(\Delta_{m_2}^{m_2})$, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ $(\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2})$, а вместо τ_1 из случая 6б (7б) — τ_{m_1} (τ_{m_2}).

Случай 23в. Пусть начальные условия такие же, как в случае 23а, только существует номер $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$. Тогда $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $(\dot{z}_{m_2}^0, p) > 0$, $(z_{m_1}^0, p) > 0$, $(z_{m_2}^0, p) > 0$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_r$, а $q \leqslant r$.

Доказательство уклонения от встречи строится аналогично доказательству в случаях 23а и 23б, за исключением варианта построения управления убегающего E, когда существует момент времени $t = t_{m_1} = t_{m_2}$ такой, что $\|z_{m_1}(t)\| = \delta_{m_1}^{m_1}$, $\|z_{m_2}(t)\| = \delta_{m_2}^{m_2}$, $\|\ddot{z}_{m_1}(t)\| = \hat{\delta}_{m_1}^{m_1}$, $\|\dot{z}_{m_2}(t)\| = \tilde{\delta}_{m_2}^{m_2}$. Пусть

$$\Delta_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \Delta_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_3(\tau_{m_2}^{m_2})}{4}, \quad \hat{\Delta}_{m_1}^{m_1} = \frac{\Delta_1(\tau_{m_1}^{m_1})}{4}, \quad \tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2} = \frac{\Delta_2(\tau_{m_2}^{m_2})}{2}.$$

Стратегия убегания и доказательство будут такими же, как в случае 6б и 7б, только вместо δ_1 возьмем $\Delta_{m_1}^{m_1}$ и $\Delta_{m_2}^{m_2}$, вместо δ_2 возьмем $\hat{\Delta}_{m_1}^{m_1}$ и $\tilde{\Delta}_{m_2}^{m_2}$, а вместо τ_1 из случая 6б — τ_{m_1}, вместо τ_1 из случая 7б — τ_{m_2} соответственно.

Промежуточный итог. Итак, перебрав различные варианты сочетаний начальных условий, мы рассмотрели 23 случая. Случай 1 — когда сближения с преследователями не происходит, в остальных случаях происходят сближения трех разных видов.

Сближением первого вида назовем сближение в обычном смысле, то есть такое, когда расстояние между убегающим и преследователем сокращается.

Сближением второго вида, или сближением по первой производной, назовем сближение преследователя P_i и убегающего E, когда выполняется $\|\dot{z}_i(t)\| = \delta$, где i — номер преследователя, t — некоторый момент времени, δ — некоторое заданное положительное достаточно малое число.

Сближением третьего вида, или сближением по второй производной, назовем сближение преследователя P_i и убегающего E, когда выполняется $\|\ddot{z}_i(t)\| = \delta$, где i — номер преследователя, t — некоторый момент времени, δ — некоторое заданное положительное достаточно малое число.

В этих терминах в случаях 2–4 рассматриваются такие варианты начальных условий, когда возможно одно сближение одного вида: в случае 2 одно сближение третьего вида (по второй производной), в случае 3 одно сближение второго вида (по первой производной), в случае 4 одно сближение первого вида (в обычном смысле).

Обозначим сближение первого вида как z, сближение второго вида как $\dot{z}$, третьего вида как $\ddot{z}$. В случаях 5–7 рассматриваются варианты начальных условий, когда возможны два сближения двух разных видов, в случае 8 — три разных сближения по одному каждого вида. Используя введенные обозначения, сведем информацию о том, какие начальные условия рассматриваются в этих случаях, в таблицу.

	z	$\dot{z}$	$\ddot{z}$
1	нет	нет	нет
2	нет	нет	1
3	нет	1	нет
4	1	нет	нет
5	нет	1	1
6	1	нет	1
7	1	1	нет
8	1	1	1

В случаях 9–11 рассматриваются начальные условия такие, что возможно несколько сближений одного вида: в случае 9 несколько сближений первого вида, в случае 10 несколько сближений второго вида, в случае 11 несколько сближений третьего вида.

В случаях 12–20 рассматриваются начальные условия такие, что возможно несколько сближений двух разных видов. Сведем информацию о том, какие начальные условия рассматриваются в этих случаях, в таблицу, при этом в столбцах таблицы будем указывать количество возможных сближений.

	z	$\dot{z}$	$\ddot{z}$
9	несколько	нет	нет
10	нет	несколько	нет
11	нет	нет	несколько
12	несколько	1	нет
13	1	несколько	нет
14	несколько	несколько	нет
15	несколько	нет	1
16	1	нет	несколько
17	несколько	нет	несколько
18	нет	1	несколько
19	нет	несколько	1
20	нет	несколько	несколько

В случаях 21–23 рассматриваются такие начальные условия, когда одного вида сближений несколько, а двух других видов — по одному. Занесем эти данные таким же образом в таблицу.

	z	$\dot{z}$	$\ddot{z}$
21	1	1	несколько
22	1	несколько	1
23	несколько	1	1

Осталось рассмотреть случаи 24–27, начальные условия которых схематично заданы таблицей ниже, чтобы получился полный перебор.

	z	$\dot{z}$	$\ddot{z}$
24	несколько	несколько	1
25	несколько	1	несколько
26	1	несколько	несколько
27	несколько	несколько	несколько

Случай 24. Предположим, что $(\dot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $(z_i^0, p) > 0$, $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, $(\ddot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus (Q_m^r \cup \mathbb{N}_r)$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$,

$(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$. Управление в этом случае выбираем в соответствии со случаем 22 или 23 в зависимости от того, в каком порядке происходят сближения первого, второго и третьего вида. Комбинируя стратегии убегания, описанные в случаях 22 и 23, при каждом новом сближении уменьшаем время маневра обхода преследователя в два раза. Преследователей конечное число, таким образом, уклонение от встречи в случае 24 будет построено.

Случай 25. Предположим, что $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$, $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, $(\dot{z}_{m_1}^0, p) > 0$, $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus (Q_m^r \cup \mathbb{N}_r)$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$. Управление в этом случае выбираем в соответствии со случаем 21 или 23 в зависимости от того, в каком порядке происходят сближения первого, второго и третьего вида. Комбинируя стратегии убегания, описанные в случаях 21 и 23, при каждом новом сближении уменьшаем время маневра обхода преследователя в два раза. Преследователей конечное число, таким образом, уклонение от встречи в случае 25 будет построено.

Случай 26. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $(\dot{z}_i^0, p) > 0$, $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, $(z_{m_1}^0, p) > 0$, $m_1 \in \mathbb{N}_n \setminus (Q_m^r \cup \mathbb{N}_r)$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{m_1\}$. Управление в этом случае выбираем в соответствии со случаем 21 или 22 в зависимости от того, в каком порядке происходят сближения первого, второго и третьего вида. Комбинируя стратегии убегания, описанные в случаях 21 и 22, при каждом новом сближении уменьшаем время маневра обхода преследователя в два раза. Преследователей конечное число, таким образом, уклонение от встречи в случае 26 будет построено.

Случай 27. Предположим, что $(\ddot{z}_i^0, p) > 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $(\dot{z}_i^0, p) > 0$, $i \in Q_m^r$, $r < m < n$, $(z_i^0, p) > 0$, $i \in Q_n^m$, $(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_r$, $(\dot{z}_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_m^r$, $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i \in \mathbb{N}_n \setminus Q_n^m$. Сочетание стратегий из случаев 8, 21–26 дает нам построение стратегии убегания в случае 27. Теорема доказана.

Список литературы

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Петров Н.Н., Щелчков К.А. К задаче Черноусько // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 62–67.
4. Зак В.Л. Задача уклонения от многих преследователей, управляемых по ускорению // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 2. С. 51–71.
5. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Одна дифференциальная игра убегания // ДАН УССР. Серия А. 1989. № 1. С. 71–74.
6. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 998–1004.
7. Петров Н.Н. К нестационарой задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 74–83.
8. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 45–53.
9. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59.
10. Банников А.С. Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 3–10.
11. Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. Вып. 1 (41). С. 3–46.
12. Благодатских А.И. Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.

Поступила в редакцию 01.08.2013

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146.
2. Chernous'ko F.L. One problem of evasion from many pursuers, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 14—24.
3. Petrov N.N., Shchelchkov K.A. To the problem of Chernous'ko, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 62–67.
4. Zak V.L. Problem of evasion from many pursuers controlled by acceleration, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1981, no. 2, pp. 51–71.
5. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. An evasion differential game, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A*, 1989, no. 1, pp. 71–74.
6. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. The problem of evasion from a group for inertial objects of the same type, *Differ. Uravn.*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 998–1004.
7. Petrov N.N. On the nonstationary problem of group pursuit with phase constraints, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 74–83.
8. Chirkova L.S. Evasion from a group of inertial objects, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 3, pp. 377–385.
9. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 50–59.
10. Bannikov A.S. Evasion from group of non-stationary inertial objects, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 3–10.
11. Bannikov A.S. Some non-stationary problems of group pursuit, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2013, no. 1 (41), pp. 3–46.
12. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

Received 01.08.2013

L. S. Chirkova

Evasion from a group of inertial objects in fourth order game

We consider the problem of conflict interaction of one evader with a group of pursuers with equal dynamic capabilities of all players. The motion of each player is defined by fourth order differential equation. The initial conditions are given at the initial time. We prove that if zero does not belong to convex hull spanned by the vectors of the initial conditions, then evasion from capture is possible.

Keywords: differential games, group pursuit, state constraints, evasion from capture.

Mathematical Subject Classifications: 49N75, 91A23, 49N70, 91A06

Чиркова Любовь Сергеевна, научный сотрудник, Институт математики и информатики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: lmvstk@gmail.com

Chirkova Lyubov Sergeevna, Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia. E-mail: lmvstk@gmail.com