УДК 517.965, 517.929.7

© *А. И. Булгаков, О. В. Филиппова*

ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ОТОБРАЖЕНИЕМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ЗНАЧЕНИЙ[1]

Исследуется задача Коши для функционально-дифференциального включения с вольтерровым по А. Н. Тихонову многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями. Для этой задачи введено понятие обобщенного решения, изучены вопросы существования и продолжаемости обобщенных решений. Введены понятия почти реализации и реализации множеством обобщенных решений задачи Коши расстояния до произвольной суммируемой функции. Доказано, что если множество всех локальных обобщенных решений априорно ограничено, то оно почти реализует, а в случае выпуклозначной правой части — реализует расстояние до любой суммируемой функции. С помощью свойства почти реализации и реализации множеством обобщенных решений расстояния до произвольной суммируемой функции найдены новые оценки обобщенных решений задачи Коши импульсного функционально-дифференциального включения. Доказан обобщенный принцип плотности.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, выпуклость по переключению, обобщенное решение, почти реализация и реализация множеством обобщенных решений расстояния до произвольной суммируемой функции, априорная ограниченность.

Введение

Дифференциальные включения — один из наиболее интенсивно развиваемых в настоящее время разделов теории дифференциальных уравнений. В форме дифференциальных включений можно представить дифференциальные неравенства, неявные дифференциальные уравнения, задачи теории управления, дифференциальных игр, математической экономики.

Дифференциальные включения можно рассматривать как обобщение дифференциальных уравнений на случай, когда правая часть многозначна. Если же производную в точке заменить на оператор дифференцирования, а правую часть дифференциального включения заменить оператором Немыцкого, порожденным этой правой частью или другим оператором, действующим в пространство суммируемых функций, то от обыкновенного дифференциального включения перейдем к функционально-дифференциальному включению. К функционально-дифференциальным включениям сводятся многие задачи теории управления и теории игр, если учитывать, например, что скорость воздействия на объект регулирования является не мгновенной, а происходит с запаздыванием. Отметим, что значения оператора Немыцкого обладают свойством выпуклости по переключению значений (разложимостью) в пространстве суммируемых функций.

Для функционально-дифференциальных включений доказательство свойств множеств решений для тех или иных задач существенно опиралось на предположение о том, что многозначное отображение, порожденное правой частью включения, в пространстве суммируемых функций имеет выпуклые по переключению (разложимые) образы, как и значения оператора Немыцкого. Если отказаться от требования выпуклости по переключению значений многозначного отображения, то все существующие в настоящее время методы исследований многозначных отображений нельзя применить даже

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14–01–00877, 14–01–97504).

для изучения вопроса разрешимости включения. Кроме того, в этом случае нарушится равенство между множествами квазирешений включения и «овыпукленного» включения, впервые установленное Т. Важевским для обыкновенных дифференциальных включений (см. [1]). Это связано с тем, что замыкание (в слабой топологии пространства суммируемых функций) значений многозначного отображения не совпадает с их замкнутой выпуклой оболочкой. Вследствие этого не будут выполняться фундаментальные свойства множеств решений: принцип плотности и «бэнг-бэнг»-принцип (см., например, [2], [3]). Выходом из этой ситуации служит введение понятия обобщенного решения функционально-дифференциального включения.

В случае когда физические законы выражаются разрывными функциями (разрывная зависимость силы трения от скорости в случае сухого трения (см. [4]), модель Прагера–Ишлинского упруго-пластического элемента (см. [5])) или когда в связи с отказом тех или иных приборов и устройств объекты мгновенно «перескакивают» с одной фазовой траектории на другую, в качестве математической модели можно использовать функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями нашли приложения в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, в экономических моделях долгосрочного прогнозирования, в задачах биологии, медицины, социологии, во многих других областях науки и техники, число которых неуклонно увеличивается.

В работе рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями в наиболее сложной для исследования ситуации, когда многозначное отображение не обладает свойством выпуклости по переключению значений. Предполагается, что в фиксированные моменты времени решения могут испытывать разрывы первого рода, величина которых определяется значением решения в этих точках. Правая часть рассматриваемого функционально-дифференциального включения представляет собой вольтерровое по А. Н. Тихонову многозначное отображение, не обладающее свойством выпуклости по переключению значений. Для применения к этой задаче общих методов исследования функционально-дифференциальных включений вводится банахово пространство кусочно-непрерывных вектор-функций и исследуются свойства многозначных отображений, определенных на этом пространстве.

§ 1. Основные обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Для метрического пространства $\mathbf{X}$, если $x \in \mathbf{X}$, $U, U_1 \subset \mathbf{X}$, $\rho_{\mathbf{X}}[x; U]$ — расстояние от точки x до множества U; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1; U] \equiv \sup\limits_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу от множества U_1 до множества U;

$$h_{\mathbf{X}}[U_1; U] = \max\{h^+_{\mathbf{X}}[U_1; U]; h^+_{\mathbf{X}}[U; U_1]\}$$

— расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U; $2^{\mathbf{X}}$ — множество всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbf{X}$; $\mathbf{C}^n[a, b]$ — пространство непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{C}^n} = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\};$$

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; μ —

мера Лебега на $\mathbb{R}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ — измеримое ограниченное множество с мерой $\mu(\mathcal{U}) > 0$; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)|ds;$$

$\mathbf{L}^1_+(\mathcal{U})$ — множество неотрицательных функций пространства $\mathbf{L}^1(\mathcal{U})$.

Пусть $t_k \in [a, b) \subset \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$ $(t_1 < \ldots < t_m)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ пространство непрерывных на каждом промежутке $[a, t_1]$, $(t_1, t_2] \ldots (t_m, b]$ функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = \overline{1, m}$, с нормой

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\bigl\{|x(t)| : t \in [a, b]\bigr\};$$

$\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ — множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a, b]$.

Пусть $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a, b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ выполнено включение

$$\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi,$$

где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция соответствующих множеств.

Обозначим через $\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$ $\bigl(Q(\mathbf{L}^n[a, b])\bigr)$ множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Пусть Φ — непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $\mathrm{sw}\,\Phi$ множества Φ называется совокупность всех элементов вида

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \ldots + \chi(\mathcal{U}_l)x_l, \tag{1.1}$$

где $x_i \in \Phi$, l — любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = 1 \ldots l$, осуществляют разбиение отрезка $[a, b]$, то есть $\mathcal{U}_i \bigcap \mathcal{U}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \mathcal{U}_i = [a, b]$, $\chi(\mathcal{U})$ — характеристическая функция множества $\mathcal{U}$. Пусть, далее, $\overline{\mathrm{sw}}\Phi$ — замыкание множества $\mathrm{sw}\,\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Обозначим $\Omega\bigl(Q(\mathbf{L}^n(\mathcal{U}))\bigr)$ множество всех выпуклых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$.

Л е м м а 1.1. *Пусть $\Phi \in \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$. Тогда существует такая функция $u \in \mathbf{L}^1_+[a, b]$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для почти всех $t \in [a, b]$ выполнено неравенство $|\varphi(t)| \leqslant u(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность функций $\varphi_i \in \Phi$ такова, что

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_i\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \|\Phi\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}, \tag{1.2}$$

где $\|\Phi\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \max\limits_{\varphi\in\Phi} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}$. Покажем, что найдется такая последовательность функций $\widetilde{\varphi}_i \in \Phi$, $i = 1 \ldots$, для которой выполняется равенство (1.2) и при почти всех $t \in [a, b]$ имеют место соотношения

$$|\widetilde{\varphi}_1(t)| \leqslant |\widetilde{\varphi}_2(t)| \leqslant |\widetilde{\varphi}_3(t)| \leqslant \ldots \leqslant |\widetilde{\varphi}_i(t)| \leqslant |\widetilde{\varphi}_{i+1}(t)| \leqslant \ldots. \tag{1.3}$$

Действительно, пусть $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ и

$$\widetilde{\varphi}_{i+1} = \chi(\mathcal{U}_i)\widetilde{\varphi}_i + \chi([a, b] \setminus \mathcal{U}_i)\varphi_{i+1},$$

где $\mathcal{U}_i = \{t \in [a,b] : |\widetilde{\varphi}_i(t)| \geqslant |\varphi_{i+1}(t)|\}$. Так как $\Phi \in \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, то последовательность $\widetilde{\varphi}_i \in \Phi$, $i = 1,2\ldots$, и обладает свойствами: при почти всех $t \in [a,b]$ выполняются неравенства (1.3), для любого $i = 1,\ldots$ справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\varphi}_i\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} \geqslant \|\varphi_i\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}.$$

Следовательно, из последнего неравенства вытекает, что последовательность $\widetilde{\varphi}_i$ удовлетворяет равенству (1.2). Далее, определим измеримую функцию $u : [a,b] \to [0,\infty)$ равенством

$$u(t) = \lim_{i\to\infty} |\widetilde{\varphi}_i(t)|. \tag{1.4}$$

Так как множество Φ ограничено в $\mathbf{L}^n[a,b]$, то согласно лемме Фату (см. [6]) функция u принадлежит $L^1_+[a,b]$. Кроме того, из определения функции u и равенства (1.2) следует, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется соотношение

$$\int_{\mathcal{U}} u(t)\,dt = \|\overline{\mathrm{sw}}\Phi\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}, \tag{1.5}$$

где $\|\overline{\mathrm{sw}}\Phi\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \max\limits_{\varphi\in\overline{\mathrm{sw}}\Phi} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}$. Теперь покажем, что функция u, заданная соотношением (1.4), удовлетворяет утверждению леммы. Действительно, предположим противное. Тогда найдутся функция $\varphi \in \Phi$ и измеримое множество $\mathcal{U}_1 \subset [a,b]$ $(\mu(\mathcal{U}_1) > 0)$, что для любого $t \in \mathcal{U}_1$ выполняется оценка $|\varphi(t)| > u(t)$. Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathcal{U}_1} |\varphi_1(t)|\,dt > \int_{\mathcal{U}_1} u(t)\,dt,$$

но это противоречит равенству (1.5).

Л е м м а 1.2. *Пусть $\Phi \in \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, последовательность $\varphi_i \in \Phi$, $i = 1\ldots$, плотная в Φ и измеримое отображение $F : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством*

$$F(t) = \overline{\{\varphi_i(t),\, i = 1\ldots\}}\,.$$

Тогда справедливо равенство

$$S(F(\cdot)) = \Phi,$$

где $S(F(\cdot)) = \{\varphi(\cdot) \in \boldsymbol{L}^n[a,b] : \varphi(t) \in F(t)$ при почти всех $t \in [a,b]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi_i \in S(F(\cdot))$, а последовательность φ_i, $i = 1\ldots$, плотна в Φ, то в силу замкнутости множества Φ получаем вложение $\Phi \subset S(F(\cdot))$. Докажем теперь, что $S(F(\cdot)) \subset \Phi$. Пусть $x \in S(F)$. Обозначим для каждых k, $i = 1\ldots$ измеримые множества

$$E_i^k = \left\{t \in [a,b] : |x(t) - \varphi_i(t)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Пусть $\widetilde{E}_1^k = E_1^k$ и $\widetilde{E}_i^k = E_i^k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} E_j^k$ для $i = 2\ldots$. Тогда $\widetilde{E}_i^k \bigcap \widetilde{E}_j^k = \varnothing$, если $i \neq j$. Согласно определению отображения $F : [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, для любого $k = 1\ldots$ имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{E}_i^k\right) = b - a. \tag{1.6}$$

Определим последовательность измеримых функций $x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $k = 1\ldots$, равенствами

$$x_k(t) = \begin{cases} \varphi_i(t), & \text{если } t \in \widetilde{E}_i^k, \quad i = 1\ldots k, \\ \varphi_1(t), & \text{если } t \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \widetilde{E}_i^k. \end{cases}$$

Из выпуклости по переключению множества Φ вытекает, что для любого $k = 1\ldots$ $x_k \in \Phi$. Кроме того, согласно лемме 1.1 и определению множеств $\widetilde{E}_i^k$, для функции x_k получаем неравенство

$$\|x - x_k\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} \leqslant \frac{b-a}{k} + 2\int_{[a,b]\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \widetilde{E}_i^k} u(t)\,dt, \tag{1.7}$$

где функция u удовлетворяет условиям леммы 1.1. Из равенства (1.6) и соотношения (1.7) следует, что $x_k \to x$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $k \to \infty$. Так как множество Φ замкнуто, то $x \in \Phi$ и, следовательно, $S(F(\cdot)) \subset \Phi$. Таким образом, $S(F(\cdot)) = \Phi$. Лемма доказана.

Л е м м а 1.3. *Для любого непустого множества* $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ *множество* $\operatorname{sw}\Phi$ *выпукло по переключению* (см. [11]).

Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{sw}\Phi$ и $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое множество. Не уменьшая общности, будем считать, что

$$y_i = \chi(\mathcal{U}_1^i)x_1^i + \chi(\mathcal{U}_2^i)x_2^i + \ldots + \chi(\mathcal{U}_l^i)x_l^i, \tag{1.8}$$

где $x_j^i \in \Phi$, $j = 1\ldots l$, $i = 1,2$, измеримые непересекающиеся множества $\mathcal{U}_j^i \subset [a,b]$ удовлетворяют условию $[a,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \mathcal{U}_j^i$, $i = 1,2$ (если число слагаемых, представляющих функции y_1 и y_2 не равны, то недостающие слагаемые можно добавить произвольными функциями из множества Φ, умноженными на характеристические функции пустых множеств). Далее, из равенства

$$\chi(\mathcal{U})y_1 + \chi([a,b]\setminus\mathcal{U})y_2 = \sum_{i=1}^{l} \chi(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i^1)x_i^1 + \sum_{i=1}^{l} \chi(([a,b]\setminus\mathcal{U})\cap\mathcal{U}_i^2)x_i^2$$

вытекает, что $\chi(\mathcal{U})y_1 + \chi([a,b]\setminus\mathcal{U})y_2 \in \operatorname{sw}\Phi$. Следовательно, множество $\operatorname{sw}\Phi$ выпукло по переключению.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если множество $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ ограничено, то множество $\operatorname{sw}\Phi$, вообще говоря, может быть и неограниченным.

Примером является равенство

$$\operatorname{sw}(B_{\mathbf{L}^n[a,b]}(0,1)) = \mathbf{L}^n[a,b], \tag{1.9}$$

где $B_{\mathbf{L}^n[a,b]}(0,1)$ — открытый шар пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$ с центром в точке 0 и радиусом 1.

Действительно, пусть $z \in \mathbf{L}^n[a,b]$, и пусть измеримые множества e_i, $i = 1\ldots l$, обладают следующими свойствами: $e_i \bigcap e_j = \varnothing$, если $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{l} e_i = [a,b]$ и для любого $i = 1\ldots l$ выполняется неравенство $\int_{e_i} |z(s)|\,ds < 1$. Тогда функции $z_i = \chi(e_i)z \in B_{\mathbf{L}^n[a,b]}(0,1)$, $i = 1\ldots l$, и удовлетворяют равенству

$$z = \chi(e_1)z_1 + \chi(e_2)z_2 + \ldots + \chi(e_l)z_l.$$

Поэтому $z \in \operatorname{sw}(B_{\mathbf{L}^n[a,b]}(0,1))$ и, следовательно, верно равенство (1.9).

Отметим, что равенство (1.9) справедливо и для пространства суммируемых с p-ой степенью функций ($\mathbf{L}_p^n[a,b]$), так как шар в пространстве $\mathbf{L}_p^n[a,b]$ слабо предкомпактен в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$. Поэтому если множество $\Phi \subset \mathbf{L}_p^n[a,b]$ слабо предкомпактно в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$, то множество $\operatorname{sw}\Phi$ может и не обладать этим свойством.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если множество выпукло в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$, то оно, вообще говоря, может и не быть выпуклым по переключению. Шар $B_{\mathbf{L}^n[a,b]}(0,1)$ обладает таким свойством. Будем говорить, что множество $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ *ограничено суммируемой функцией,* если существует функция $\varphi_\Phi \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, что для любого $x \in \Phi$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant \varphi_\Phi(t)$.

З а м е ч а н и е 3. Если множество $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ ограничено суммируемой функцией, то согласно лемме 1.2 для $\overline{\operatorname{sw}}\Phi \in \operatorname{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ найдется измеримое ограниченное суммируемой функцией отображение $F_{\overline{\operatorname{sw}}\Phi} : [a,b] \to \operatorname{comp}[R^n]$, для которого справедливо равенство

$$\overline{\operatorname{sw}}\Phi = S(F_{\overline{\operatorname{sw}}\Phi}(\cdot)). \tag{1.10}$$

Л е м м а 1.4. *Если множество* $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ *выпукло по переключению, то* $\operatorname{sw}\Phi = \Phi$ (см. [11]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\Phi \subset \operatorname{sw}\Phi$. Покажем, что $\operatorname{sw}\Phi \subset \Phi$. Действительно, согласно определению выпуклого по переключению множества любые комбинации вида (1.1), состоящие из суммы произведений двух элементов $x_1, x_2 \in \Phi$ на значения характеристической функции от двух измеримых множеств $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2 \subset [a,b]$, осуществляющих разбиение отрезка $[a,b]$, принадлежат множеству Φ. Предположим, что комбинации вида (1.8) принадлежат множеству Φ при $i = m$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in \Phi$ и измеримые непересекающиеся множества $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{m+1} \subset [a,b]$ удовлетворяют условию $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} \mathcal{U}_i$. Обозначим

$$z = \chi(\mathcal{U}_2 \bigcup \mathcal{U}_1)x_2 + \chi(\mathcal{U}_3)x_3 + \dots + \chi(\mathcal{U}_{m+1})x_{m+1}.$$

Согласно предположению индукции $z \in \Phi$, и поэтому

$$\chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi([a,b] \setminus \mathcal{U}_1)z \in \Phi.$$

Так как

$$\chi([a,b] \setminus \mathcal{U}_1)z = \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \chi(\mathcal{U}_3)x_3 + \dots + \chi(\mathcal{U}_{m+1})x_{m+1},$$

то

$$\chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \dots + \chi(\mathcal{U}_{m+1})x_{m+1} \in \Phi.$$

Следовательно, $\operatorname{sw}\Phi \subset \Phi$. Из включений $\operatorname{sw}\Phi \subset \Phi$ и $\Phi \subset \operatorname{sw}\Phi$ следует равенство $\operatorname{sw}\Phi = \Phi$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1.1. *Если* $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$*, то множество* $\operatorname{sw}\Phi$ *— наименьшее выпуклое по переключению (разложимое) множество, содержащее множество* Φ*.*

Действительно, пусть множество $U \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ выпукло по переключению и удовлетворяет включению $\Phi \subset U$. Тогда согласно лемме 1.4 выполняются соотношения $\Phi \subset \operatorname{sw}\Phi \subset \operatorname{sw}U = U$.

Л е м м а 1.5. *Если множество* $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ *выпукло, то множество* $\operatorname{sw}\Phi$ *также выпукло в пространстве* $\mathbf{L}^n[a,b]$ (см. [11]).

Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{sw}\,\Phi$ и представимы в виде равенства (1.8). Тогда из выпуклости множества $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ и равенства

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = \sum_{i,j=1}^{m} \chi(\mathcal{U}_i^1 \cap \mathcal{U}_j^2)(\lambda x_i^1 + (1-\lambda) x_j^2)$$

для любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо включение $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in \mathrm{sw}\,\Phi$. Таким образом, множество $\mathrm{sw}\,\Phi$ выпукло.

З а м е ч а н и е 4. Если множество $\Phi \in Q\left(\mathbf{L}^n[a,b]\right)$, то построение $\overline{\mathrm{sw}}\Phi$ эквивалентно нахождению измеримого ограниченного суммируемой функцией отображения $F_{\overline{\mathrm{sw}}\Phi} \colon [a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, удовлетворяющего равенству (1.10) (см. замечание 1.3). Отметим, что во многих случаях построение такого отображения проще, чем нахождение множества $\overline{\mathrm{sw}}\Phi$. В то же время для установления метрических соотношений между множествами $\Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ и их выпуклыми по переключению оболочками (см. лемму 1.5) удобнее пользоваться определением выпуклой по переключению оболочки множества.

Л е м м а 1.6. *Пусть $v \in \mathbf{L}^n(\mathcal{U})$, $(\mathcal{U} \subset [a,b])$, множество $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ выпукло по переключению. Тогда для любых измеримых непересекающихся множеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{U}_1 \bigcup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$, справедливо равенство*

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi] = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)}[v,\Phi] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)}[v,\Phi]. \tag{1.11}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $y \in \Phi$ удовлетворяет неравенству

$$\|v - y\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} < \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi] + \varepsilon.$$

Из последней оценки вытекает, что

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)}[v,\Phi] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)}[v,\Phi] \leqslant \|v-y\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)} + \|v-y\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)} < \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi] + \varepsilon.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)}[v,\Phi] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)}[v,\Phi] \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi]. \tag{1.12}$$

Далее, докажем противоположное неравенство. Пусть $y_i \in \Phi|_{\mathcal{U}_i}$, $i = 1, 2$, где $\Phi|_{\mathcal{U}_i}$ — множество всех сужений отображений из Φ на $\mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\|v - y_i\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_i)} < \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_i)}[v,\Phi] + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2. \tag{1.13}$$

В силу выпуклости по переключению множества Φ отображение $y \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, определенное равенством $y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{если} \quad t \in \mathcal{U}_1, \\ y_2(t), & \text{если} \quad t \in \mathcal{U}_2, \end{cases}$ принадлежит множеству $\Phi|_{\mathcal{U}}$. Поэтому из неравенства (1.13) получаем оценку

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi] \leqslant \|v-y\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} < \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)}[v,\Phi] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)}[v,\Phi] + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v,\Phi] \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_1)}[v,\Phi] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U}_2)}[v,\Phi]. \tag{1.14}$$

Сравнивая соотношения (1.12), (1.14), получаем равенство (1.11).

Л е м м а 1.7. *Пусть множества* $\Phi_1, \Phi_2 \in Q(\mathbf{L}^n[a,b])$, *и пусть существует такая функция* $\omega \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, *что для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется неравенство*

$$h^+_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi_1, \Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \omega(s)\, ds. \tag{1.15}$$

Тогда для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *имеет место соотношение*

$$h^+_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\operatorname{sw}\Phi_1, \operatorname{sw}\Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \omega(s)\, ds \tag{1.16}$$

(см. [11]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое множество $\mu(\mathcal{U}) > 0$. Пусть $z \in \operatorname{sw}\Phi_1$, и пусть функции $z_i \in \Phi_1$, $i = 1 \ldots m$, и непересекающиеся измеримые множества $\widetilde{e}_i \subset [a,b]$, $i = 1 \ldots m$, для которых справедливо условие $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \widetilde{e}_i$, удовлетворяют равенству

$$z = \chi(\widetilde{e}_1)z_1 + \chi(\widetilde{e}_2)z_2 + \ldots + \chi(\widetilde{e}_m)z_m. \tag{1.17}$$

Далее, сужения функций z, z_i, $i = 1 \ldots m$, на $\mathcal{U}$ будем обозначать этими же буквами, а $e_i = \widetilde{e}_i \cap \mathcal{U}$, $i = 1 \ldots m$. Из равенства (1.17) и лемм 1.3, 1.6 получаем соотношения

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[z, \operatorname{sw}\Phi_2] = \sum_{i=1}^{m} \rho_{\mathbf{L}^n(e_i)}[z_i, \operatorname{sw}\Phi_2] \leqslant \sum_{i=1}^{m} \rho_{\mathbf{L}^n(e_i)}[z_i; \Phi_2]. \tag{1.18}$$

В силу неравенства (1.15) для любого $i = 1 \ldots m$ справедлива оценка

$$\rho_{\mathbf{L}^n(e_i)}[z_i, \Phi_2] \leqslant \int_{e_i} \omega(s)\, ds. \tag{1.19}$$

Из неравенств (1.18) и (1.19) вытекает соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[z, \operatorname{sw}\Phi_2] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \omega(s)\, ds. \tag{1.20}$$

Так как неравенство (1.20) имеет место для любого $z \in \operatorname{sw}\Phi_1$, то из оценки (1.20) следует неравенство (1.16). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что функция $\omega \in \mathbf{L}_+[a,b]$ в неравенстве (1.15) дает равномерную оценку полуотклонения множеств $\Phi_1, \Phi_2 \in Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ относительно измеримых множеств $\mathcal{U} \subset [a,b]$.

З а м е ч а н и е 6. Соотношение (1.16) будет справедливым, если в левой части неравенства будут стоять замыкания в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ выпуклых по переключению оболочек соответствующих множеств.

Далее, будем говорить, что многозначное отображение $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *ограничено суммируемой функцией на множестве* $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, если образ $\Phi(K)$ ограничен суммируемой функцией.

По заданному многозначному отображению $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ определим оператор $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \operatorname{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}(x) = \overline{\operatorname{sw}}\Phi(x). \tag{1.21}$$

Отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \operatorname{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ будем называть *овыпукленным по переключению отображением.*

Отметим, что из непрерывности отображения $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$, вообще говоря, не вытекает непрерывность оператора $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \operatorname{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенного равенством (1.21).

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение

$$P\colon U \times U \to L^1_+[a,b]$$

принимает нулевое значение на диагонали $U\times U$, если для любого $x \in U$ имеет место равенство $P(x,x) = 0$; *симметрично на множестве* U, если для любых $x, y \in U$ выполняется соотношение $P(x,y) = P(y,x)$; *непрерывно по второму аргументу в точке* (x,x), *принадлежащей диагонали* $U \times U$, если для любой последовательности $y_i (\in U) \to x$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$ справедливо равенство $P(x,x) = \lim\limits_{i\to\infty} P(x,y_i)$; *непрерывно по второму аргументу на диагонали* $U \times U$, если оно непрерывно по второму аргументу в каждой точке диагонали $U \times U$. Аналогично определяется непрерывность по первому аргументу на диагонали $U \times U$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение

$$P\colon U \times U \to L^1_+[a,b]$$

обладает свойствами $\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{C}$ на U, если оно принимает нулевое значение на диагонали $U \times U$, кроме того: если оно непрерывно по второму аргументу на ней, то *оно обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{A}}$; если непрерывно по первому аргументу на ней, то *обладает свойством* $\widetilde{\mathcal{B}}$; если непрерывно на ней и симметрично, то *обладает свойством* $\mathcal{C}$.

Используя лемму 1.7, можно получить следующие условия непрерывности овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенного равенством (1.21).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, *и пусть для отображения*

$$\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$$

найдется такое отображение

$$P\colon U \times U \to \mathbf{L}^1_+[a,b],$$

что для любых $x, y \in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется оценка*

$$h^+_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|P(x,y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{1.22}$$

Тогда для отображения $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, *определенного равенством* (1.21), *для любых* $x, y \in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется оценка* (1.22), *в которой* $\Phi(\cdot) \equiv \widetilde{\Phi}(\cdot)$.

С л е д с т в и е 1.2. *Если в условиях теоремы* 1.1 *отображение*

$$P\colon U \times U \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$$

обладает свойством $\widetilde{\mathcal{A}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{C}$) *на множестве* $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, *то овыпукленное по переключению отображение* $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, *определенное равенством* (1.21), *полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу на множестве* $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Отображение $P : U \times U \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$, удовлетворяющее неравенству (1.22), будем называть *мажорантным* для отображения $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ на множестве U, или просто *мажорантным.*

Пусть отображение $F_i\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2$, для каждой непрерывной функции $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ суперпозиционно измеримо и ограничено суммируемой функцией для каждого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{M}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b]),$$

заданное равенством

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{N}_1(x) \bigcup \mathcal{N}_2(x), \tag{1.23}$$

где отображения $\mathcal{N}_i\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, $i = 1,2,$ — операторы Немыцкого, порожденные функциями $F_i\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2$, и определенные равенствами

$$\mathcal{N}_i(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in F_i(t,x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}.$$

Для оператора $\mathcal{M}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$, имеющего вид (1.23), мажорантное отображение $\widetilde{P}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ можно задать равенством

$$\widetilde{P}(x,y)(t) = \max\{h^+[F_1(t,x(t)), F_1(t,y(t))]; h^+[F_2(t,x(t)), F_2(t,y(t))]\}. \tag{1.24}$$

Из теоремы 1.1 следует, что оператор $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)$, имеющий вид (1.24), является мажорантным и для отображения $\widetilde{\mathcal{M}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенного соотношением (1.21), в котором $\Phi(\cdot) \equiv \mathcal{M}(\cdot)$.

Кроме того, из следствия 1.2 вытекает, что если отображения

$$F_i\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n], \quad i = 1,2,$$

полунепрерывны снизу (полунепрерывны сверху, непрерывны) по Хаусдорфу по второму аргументу, то овыпукленное по переключению отображение

$$\widetilde{M}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$$

полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу.

О п р е д е л е н и е 1.3. Будем говорить, что многозначное отображение

$$\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$$

обладает свойством $\widetilde{\mathcal{A}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{C}$), если для него существует мажорантное отображение

$$P\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b],$$

удовлетворяющее свойству $\widetilde{\mathcal{A}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{C}$).

В пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ справедлив аналог теоремы Арцела–Асколи.

Л е м м а 1.8. *Пусть последовательность* $x_i \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$, $i = 1\ldots$, *обладает следующими свойствами:*

(1) *существует такая константа* $M \geqslant 0$, *что для любого* $i = 1\ldots$ *выполняется оценка* $\|x_i\|_{\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]} \leqslant M$;

(2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что для любых* t, τ, *принадлежащих одному из интервалов* $[a, t_1]$, $(t_1, t_2], \ldots, (t_m, b]$ *и удовлетворяющих неравенству* $|t-\tau| < \delta$, *выполняется оценка* $|x_i(t) - x_i(\tau)| < \varepsilon$ *для любого* $i = 1 \ldots$.

Тогда существует такой элемент $x \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a, b]$ *и существует такая подпоследовательность* x_{ij}, $j = 1 \ldots$, *последовательности* $x_i \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a, b]$, $i = 1 \ldots$, *что*

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{ij} - x\|_{\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что разрыв функций может быть только в одной точке $t_1 \in (a, b)$. Для конечного числа точек разрывов рассуждения аналогичны. В силу условия леммы на отрезке $[a, t_1]$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности x_i; не уменьшая общности, будем считать, что сама последовательность x_i на отрезке $[a, t_1]$ равномерно сходится к функции x.

Далее, продолжим функцию x на интервал $(t_1, b]$ следующим образом. Рассмотрим отрезки $[t_1 + \frac{1}{j}, b]$ $(t_1 + 1 < b)$, $j = 1 \ldots$. Возьмем отрезок $[t_1 + 1, b]$ и выделим равномерно сходящуюся на отрезке $[t_1 + 1, b]$ подпоследовательность из последовательности x_i, $i = 1 \ldots$. Пусть эта подпоследовательность $x_{i(1)}$, $i(1) = 1 \ldots$. Далее возьмем отрезок $[t_1 + \frac{1}{2}, b]$ и выделим из последовательности $x_{i(1)}, i(1) = 1 \ldots$, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_1+\frac{1}{2}, b]$ подпоследовательность. Пусть эта последовательность $x_{i(2)}$, $i(2) = 1 \ldots$.

Продолжая такой процесс дальше, определим функцию $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. При помощи диагонального процесса можно выделить сходящуюся последовательность, которая на отрезке $[a, t_1]$ и на любом фиксированном отрезке $[t_1+\frac{1}{j}, b]$, $j = 1 \ldots$, сходится равномерно к функции x. Для простоты записи будем считать, что сама последовательность x_i, $i = 1 \ldots$, обладает этим свойством.

Итак, для любого $t \in [a, b]$

$$\lim_{i\to\infty} x_i(t) = x(t). \tag{1.25}$$

Покажем, что $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = 0$. Сначала докажем, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i(t_1 + 0)$ существует. Действительно, предположим противное. Пусть $x_{i_j}(t_1+0) \to A_1$ при $j \to \infty$ и $x_{i_k}(t_1 + 0) \to A_2$ при $k \to \infty$ $(A_1 \neq A_2)$. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta > 0$ — такое число, что при $t, \tau \in (t_1, t_1 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|x_i(t) - x_i(\tau)| < \varepsilon \tag{1.26}$$

для любого $i = 1 \ldots$ (такое δ существует согласно условию 2 данной леммы). Переходя в неравенстве (1.26) к пределу при $t \to t_1 + 0$, получаем, что для любого $\tau \in (t_1, t_1 + \delta)$ и любого $i = 1 \ldots$ справедливо соотношение

$$|x_i(t_1 + 0) - x_i(\tau)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.27}$$

Так как имеют место оценки

$$\begin{aligned}|A_1 - A_2| &\leqslant |A_1 - x(\tau)| + |A_2 - x(\tau)| \leqslant |A_1 - x_{i_j}(\tau)| + |A_2 - x_{i_k}(\tau)| + \\ &+ |x_{i_j}(\tau) - x(\tau)| + |x_{i_k}(\tau) - x(\tau)| \leqslant |A_1 - x_{i_j}(t_1 + 0)| + |x_{i_j}(t_1 + 0) - x_{i_j}(\tau)| + \\ &+ |A_2 - x_{i_k}(t_1 + 0)| + |x_{i_k}(t_1 + 0) - x_{i_k}(\tau)| + |x_{i_j}(\tau) - x(\tau)| + |x_{i_k}(\tau) - x(\tau)|,\end{aligned}$$

то, переходя в последних неравенствах к пределу при $j \to \infty$ и $k \to \infty$ и учитывая оценку (1.27), получим соотношение $|A_1 - A_2| \leqslant 2\varepsilon$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i(t_1+0)$ существует. Докажем теперь, что предел $x(t_1+0)$ существует. Действительно, пусть $\delta>0$ таково, что при всех $t,\tau\in(t_1,t_1+\delta)$ выполняется неравенство (1.26) для любого $i=1\ldots$. Пусть $t,\tau\in(t_1,t_1+\delta)$. Тогда

$$|x(t)-x(\tau)|\leqslant|x(t)-x_i(t)|+|x_i(t)-x_i(\tau)|+|x_i(\tau)-x(\tau)|.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i\to\infty$ и учитывая (1.25), (1.26), получаем соотношение

$$|x(t)-x(\tau)|\leqslant\varepsilon. \tag{1.28}$$

Из неравенства (1.28) вытекает, что предел $x(t_1+0)$ существует.

Докажем, что

$$x(t_1+0)=\lim_{i\to\infty} x_i(t_1+0). \tag{1.29}$$

Действительно, так как для заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что для любого τ из интервала $(t_1,t_1+\delta)$ выполняется оценка (1.27) при любом $i=1\ldots$, то, переходя в неравенстве (1.27) к пределу при $i\to\infty$ и учитывая равенство (1.25), получаем, что для любого $\tau\in(t_1,t_1+\delta)$ имеет место оценка

$$|\lim_{i\to\infty} x_i(t_1+0)-x(\tau)|\leqslant\varepsilon. \tag{1.30}$$

Поэтому, переходя в неравенстве (1.30) к пределу при $\tau\to t_1+0$, получаем равенство (1.29).

Теперь покажем, что справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i-x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=0. \tag{1.31}$$

Предположим противное. Это означает, что существует $\varepsilon>0$ и существует такая последовательность $\tilde t_j\in[a,b]$, что для любого $j=1\ldots$ имеют место соотношения

$$|x_{i_j}(\tilde t_j)-x(\tilde t_j)|\geqslant\varepsilon. \tag{1.32}$$

Пусть $t_0\in[a,b]$ — предельная точка последовательности $\tilde t_j$, $j=1\ldots$. Если $t_0\neq t_1$, то для любого $j=1\ldots$ получаем оценки

$$|x_{i_j}(\tilde t_j)-x(\tilde t_j)|\leqslant|x_{i_j}(\tilde t_j)-x_{i_j}(t_0)|+|x_{i_j}(t_0)-x(t_0)|+|x(t_0)-x(\tilde t_j)|.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу и учитывая (1.25), а также равностепенную непрерывность последовательности x_i и непрерывность функции x в точке t_0, получаем равенство

$$\lim_{j\to\infty}|x_{i_j}(\tilde t_j)-x(\tilde t_j)|=0. \tag{1.33}$$

Равенство (1.33) противоречит оценкам (1.32). Пусть теперь $t_0=t_1$, если $\tilde t_j<t_0$, $j=1\ldots$, то в этом случае выполняется равенство (1.33), которое противоречит неравенствам (1.32). Пусть теперь для любого $j=1\ldots$ выполняется неравенство $t_1<\tilde t_j$. Тогда для любого $j=1\ldots$ получаем оценки

$$|x_{i_j}(\tilde t_j)-x(\tilde t_j)|\leqslant|x_{i_j}(\tilde t_j)-x_{i_j}(t_1+0)|+|x_{i_j}(t_1+0)-x(t_1+0)|+|x(t_1+0)-x(\tilde t_j)|.$$

Переходя в последних равенствах к пределу при $j\to\infty$ и учитывая (1.27) и (1.29), получаем равенство (1.33), что противоречит оценкам (1.32). Итак, равенство (1.31) справедливо. Лемма доказана.

Рассмотрим непрерывное отображение $P_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное равенством

$$P_r(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad |x| \leqslant r, \\ \frac{r}{|x|}x, & \text{если} \quad |x| > r. \end{cases} \tag{1.34}$$

Определим отображение $\mathcal{P}_r\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ формулой

$$(\mathcal{P}_r z)(t) = P_r(z(t)), \tag{1.35}$$

где отображение $P_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет вид (1.34).

Л е м м а 1.9. *Отображение $\mathcal{P}_r\colon \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$, определенное равенством* (1.35), *непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть последовательность $z_i \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Покажем, что $\mathcal{P}_r z_i \to \mathcal{P}_r z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Предположим противное. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$ и такие подпоследовательности $z_{i_j} \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и $t_{i_j} \in [a,b]$, $j = 1\ldots$, для которых для любого $j = 1\ldots$ выполняются неравенства

$$|P_r(z_{i_j}(t_{i_j})) - P_r(z(t_{i_j}))| \geqslant \varepsilon. \tag{1.36}$$

Пусть $t_0 \in [a,b]$ — предельная точка подпоследовательности $t_{i_j} \in [a,b]$, $j = 1\ldots$. Не уменьшая общности будем считать, что $t_{i_j} \to t_0$ при $j \to \infty$. Пусть $t_0 \neq t_k$, $k = 1\ldots m$. Тогда выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0). \tag{1.37}$$

Так как

$$|P_r(z_{i_j}(t_{i_j})) - P_r(z(t_{i_j}))| \leqslant |P_r(z_{i_j}(t_{i_j})) - P_r(z(t_0))| + |P_r(z(t_0)) - P_r(z(t_{i_j}))|,$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ и учитывая непрерывность отображения $P_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенного равенством (1.34), а также равенство (1.37), получим

$$\lim_{j\to\infty} |P_r(z_{i_j}(t_{i_j})) - P_r(z(t_{i_j}))| = 0, \tag{1.38}$$

но это противоречит оценкам (1.36).

Пусть теперь t_0 равно одной из точек t_k, $k = 1\ldots m$. Тогда, если $t_{i_j} \leqslant t_0$, $j = 1\ldots$, равенство (1.37) выполняется. Из (1.37) следует равенство (1.38), что также противоречит оценкам (1.36).

Пусть теперь $t_0 < t_{i_j}$, $j = 1\ldots$. В силу того, что $z_i \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0+0)$, из которого следует равенство (1.38). Это противоречит оценкам (1.36). Таким образом, отображение $\mathcal{P}_r\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, имеющее вид (1.35), непрерывно. Лемма доказана.

Л е м м а 1.10. *Пусть B — банахово пространство, и пусть ограниченные множества A_1, A_2, B_1, $B_2 \subset B$. Обозначим $\mathcal{K}_1 = A_1 \bigcup B_1$, $\mathcal{K}_2 = A_2 \bigcup B_2$. Тогда*

$$h_B[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2] \leqslant \max\{h_B[A_1,A_2], h_B[B_1,B_2]\}. \tag{1.39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathcal{K}_1$. Очевидно, что справедливы оценки

$$\rho[x, \mathcal{K}_2] \leqslant \rho[x, A_2], \tag{1.40}$$

$$\rho[x, \mathcal{K}_2] \leqslant \rho[x, B_2]. \tag{1.41}$$

Из определения полуотклонения по Хаусдорфу следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $y(\varepsilon) \in \mathcal{K}_1$ такой, что имеет место соотношение

$$\rho[y(\varepsilon), \mathcal{K}_2] > h_B^+[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2] - \varepsilon. \tag{1.42}$$

Так как $y(\varepsilon) \in \mathcal{K}_1 = A_1 \bigcup B_1$, то $y(\varepsilon)$ может принадлежать либо множеству A_1, либо B_1. Поэтому из соотношений (1.40), (1.41) вытекает

$$\rho[y(\varepsilon), \mathcal{K}_2] \leqslant \max\{h_B^+[A_1, A_2], h_B^+[B_1, B_2]\}.$$

Следовательно, из (1.42) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\max\{h_B^+[A_1, A_2], h_B^+[B_1, B_2]\} > h_B^+[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2] - \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$h_B^+[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2] \leqslant \max\{h_B^+[A_1, A_2], h_B^+[B_1, B_2]\}.$$

Аналогично доказывается, что

$$h_B^+[\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1] \leqslant \max\{h_B^+[A_2, A_1], h_B^+[B_2, B_1]\}.$$

Таким образом, согласно определению расстояния по Хаусдорфу справедливо неравенство (1.39). Лемма доказана.

Оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$ является *изотонным вольтерровым* оператором (см. [7]), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Gamma(x))|_\tau = (\Gamma(y))|_\tau$, где $z|_\tau$ — сужение соответствующей функции z на отрезок $[a,\tau]$, и при почти всех $t \in [a,b]$ из неравенства $x(t) \leqslant y(t)$ следует отношение $(\Gamma(x))(t) \leqslant (\Gamma(y))(t)$ для всех $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального уравнения с импульсными воздействиями

$$\begin{gathered} \dot{x} = \Gamma x, \\ \Delta(x(t_k)) = \mathfrak{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1 \dots m, \\ x(a) = x_0, \end{gathered} \tag{1.43}$$

где $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$— непрерывный изотонный вольтерров оператор, $\mathfrak{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$ — неубывающие непрерывные функции, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1 \dots m$.

Под *решением задачи* (1.43) будем понимать всякую функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$, для которой при любом $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t (\Gamma x)(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \mathfrak{I}_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{1.44}$$

Обозначим $M(x_0, \tau)$ — множество решений задачи (1.43) на отрезке $[a,\tau]$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем говорить, что $M(x_0,\tau)$ *априорно ограничено*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует $y \in M(x_0,\tau)$, для которого $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,\tau]} > r$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$. Будем писать $x < y$ $(x \leqslant y)$, если для любого $t \in [a,b]$ справедливо $x(t) < y(t)$ $(x(t) \leqslant y(t))$.

Л е м м а 1.11. *Пусть множество решений задачи* (1.43) *априорно ограничено и функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ для любого $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \leqslant x_0 + \int_a^t (\Gamma y)(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \mathfrak{I}_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}. \tag{1.45}$$

Пусть также существует такое число $\delta > 0$, что множество $\bigcup\limits_{\alpha\in(x_0,x_0+\delta)} M(\alpha,b)$ компактно в $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$. Тогда для любого $\alpha \in (x_0, x_0+\delta)$ и любого $x \in M(\alpha,b)$ выполняется неравенство $y < x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что если $g \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$, то функция $\varphi(t) = g(t) + \sum\limits_{k=1}^m \mathfrak{I}_k(g(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t)$ отличается при $t \in (t_1,t_2]$ от функции $g(t)$ на величину «скачка» $\mathfrak{I}_1(g(t_1)) = \mathfrak{I}_1$, при $t \in (t_2,t_3]$ — на сумму «скачков» $\mathfrak{I}_1(g(t_1)) + \mathfrak{I}_2(g(t_2)) = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$ и так далее (см. рис. 1).

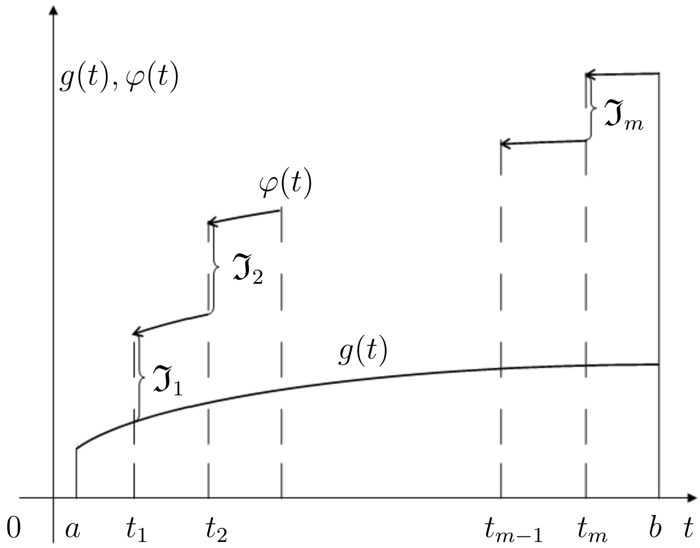

Рис. 1.

Пусть функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (1.45). Определим неубывающую функцию $v(t) \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ формулой

$$v(t) = x_0 + \int_a^t (\Gamma y)(s)\, ds,\ t \in [a,b].$$

Так как при $t \in [a,t_1]$ выполняется неравенство $y(t) \leqslant v(t)$, то в силу неубывания функций $\mathfrak{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1 \dots m$, при всех $t \in [a,b]$ получаем соотношения

$$\begin{gathered} y(t) \leqslant x_0 + \int_a^t (\Gamma y)(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \mathfrak{I}(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t) \leqslant \\ \leqslant v(t) + \sum_{k=1}^m \mathfrak{I}(v(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t) = \widetilde{v}(t). \end{gathered} \tag{1.46}$$

Далее покажем, что для любых $\alpha \in (x_0, x_0+\delta)$ и $x \in M(\alpha,b)$ выполняется неравенство $\tilde{v} < x$. Действительно, предположим противное. Тогда найдутся такие $x \in M(\alpha,b)$ $(\alpha \in$

$(x_0, x_0+\delta))$ и $\tilde{t} \in (a,b]$, что справедливо неравенство $\tilde{v}(\tilde{t}) \geqslant x(\tilde{t})$. Пусть $\tilde{t}$ принадлежит полуинтервалу $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 0 \dots m$ $(t_0 = a, t_{m+1} = b)$. Так как $\tilde{v}(a) = x_0$, а $x(a) = \alpha$ и $x_0 < \alpha$, то найдется такое $\tau \in (a, \tilde{t})$, что для любого $t \in [a, \tau)$ имеют место оценка $\tilde{v}(t) < x(t)$ и равенство $x(\tau) = \tilde{v}(\tau)$.

Покажем теперь, что τ не может принадлежать отрезку $[a, t_1]$. Действительно, предположим противное. Вначале покажем, что при всех $t \in [a, \tau)$ выполняется неравенство $x(t) > y(t)$. Предположим противное. Тогда найдется такое $\tau^* \in (a, \tau)$, что при всех $t \in [a, \tau^*)$ $x(t) > y(t)$ и $x(\tau^*) = y(\tau^*)$. Из определений решения задачи (1.43) и функции $\tilde{v}(t)$ (см. оценки (1.46)) для любого $t \in [a, \tilde{\tau}]$ получаем соотношение

$$x(t) - y(t) \geqslant \alpha - x_0 + \int_a^t ((\Gamma x)(s) - (\Gamma y)(s))\, ds. \tag{1.47}$$

Так как для любого $t \in [a, \tilde{\tau})$ имеет место неравенство

$$\int_a^t ((\Gamma x)(s) - (\Gamma y)(s))\, ds \geqslant 0, \tag{1.48}$$

то из оценки (1.47) получаем неравенство $x(t) - y(t) > \alpha - x_0 \geqslant 0$, из которого вытекает, что $x(\tau^*) - y(\tau^*) > 0$, а это противоречит равенству $x(\tau^*) = y(\tau^*)$. Так как для любого $t \in [a, \tau)$ имеет место оценка

$$x(t) - \tilde{v}(t) = \alpha - x_0 + \int_a^t ((\Gamma x)(s) - (\Gamma y)(s))\, ds \geqslant \alpha - x_0,$$

то $x(\tau) - \tilde{v}(\tau) \geqslant \alpha - x_0 > 0$, но это противоречит равенству $x(\tau) = \tilde{v}(\tau)$. Таким образом для любого $t \in [a, t_1]$ имеют место соотношения

$$x(t) > \tilde{v}(t) \geqslant y(t). \tag{1.49}$$

Теперь покажем, что τ не может принадлежать полуинтервалу $(t_1, t_2]$. Предположим противное. Пусть $\tau \in (t_1, t_2]$. Это означает, что найдется $\tau^* \in (t_1, \tau]$, что для любого $t \in (t_1, \tau^*)$ имеют место неравенство $x(t) > y(t)$ и соотношение $x(\tau^*) = y(\tau^*)$. Тогда для любого $t \in (t_1, \tau^*)$ получаем оценки

$$x(t) - y(t) \geqslant \alpha - x_0 + \int_a^t ((\Gamma x)(s) - (\Gamma y)(s))\, ds + \left(\mathfrak{I}_1(x(t_1)) - \mathfrak{I}_1(y(t_1))\right). \tag{1.50}$$

Так как для любого $t \in (t_1, \tau^*)$ справедливо неравенство (1.48) и, кроме того,

$$\mathfrak{I}_1(x(t_1)) - \mathfrak{I}_1(y(t_1)) \geqslant 0,$$

то из оценки (1.50) для любого $t \in (t_1, \tau^*)$ получаем неравенство

$$x(t) - y(t) \geqslant \alpha - x_0 > 0,$$

а это противоречит равенству $x(\tau^*) - y(\tau^*) = 0$. Таким образом, для любого $t \in (t_1, \tau)$ справедливо соотношение $x(t) > y(t)$. Далее, из определений решения и функции $\tilde{v}$ из пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см. (1.46)) при любом $t \in (t_1, \tau]$ получаем равенство

$$x(t) - \tilde{v}(t) = \alpha - x_0 + \int_a^t ((\Gamma x)(s) - (\Gamma y)(s))\, ds + \left(\mathfrak{I}_1(x(t_1)) - \mathfrak{I}_1(\tilde{v}(t_1))\right). \tag{1.51}$$

В силу доказанного для любого $t \in (t_1, \tau]$ справедливо неравенство (1.48). Кроме того, из неубывания отображения $\mathfrak{I}_1\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ и оценок (1.49) следует, что

$$\mathfrak{I}_1(x(t_1)) - \mathfrak{I}_1(\tilde{v}(t_1)) \geqslant 0.$$

Поэтому из равенства (1.51) для любого $t \in (t_1, \tau)$ получаем соотношения

$$x(t) - \tilde{v}(t) \geqslant \alpha - x_0 > 0,$$

что противоречит равенству $x(\tau) - \tilde{v}(\tau) = 0$.

Аналогично можно показать, что τ не может принадлежать полуинтервалу $(t_i, t_{i+1}]$. Таким образом, для любого $\alpha \in (x_0, x_0 + \delta)$ и любого $x \in M(\alpha, b)$ выполняется неравенство $\tilde{v} < x$, а так как $y \leqslant \tilde{v}$, то $y < x$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 1.6. Будем говорить, что $u_0 \in M(x_0, b)$ — верхнее решение задачи (1.43), если для любого $x \in M(x_0, b)$ выполняется неравенство $x \leqslant u_0$.

Отметим, что если верхнее решение задачи (1.43) существует, то оно единственно.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть задача* (1.43) *априорно ограничена. Далее, пусть число* $\delta > 0$ *удовлетворяет утверждению леммы* 1.11 *и пусть последовательность* $x_i \in M(\alpha_i, b)$, $i = 1\ldots$, *где* $\alpha_i \in (x_0, x_0 + \delta)$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = x_0$. *Тогда* $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ *в* $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ *— верхнее решение задачи* (1.43).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть последовательность $x_i \in M(\alpha_i, b)$, $i = 1\ldots$, сходится ($\alpha_i \in (x_0, x_0 + \delta)$). Тогда согласно лемме 1.11 для любого $x \in M(x_0, b)$ выполняется неравенство $x \leqslant x_i$, $i = 1\ldots$.

Переходя в последних равенствах к пределу, получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ — верхнее решение задачи (1.43). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 7. Отметим, что если задача (1.43) априорно ограничена, то число $\delta > 0$, удовлетворяющее предположению леммы 1.11, существует. Поэтому в этом случае из теоремы 1.2 следует, что верхнее решение задачи (1.43) существует.

Таким образом, из замечания 1.7 следует

Т е о р е м а 1.3. *Пусть задача* (1.43) *априорно ограничена, и пусть для любого* t *из отрезка* $[a, b]$ *функция* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ *удовлетворяет неравенству* (1.45). *Тогда для любого* $t \in [a, b]$ *имеет место неравенство* $y(t) \leqslant u_0(t)$, *где* u_0 *— верхнее решение задачи* (1.43).

§ 2. Основные свойства обобщенных решений импульсного функционально-дифференциального включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{2.1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1\ldots m, \tag{2.2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{2.3}$$

где отображение $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ удовлетворяет следующему условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией и найдется такое непрерывное и симметричное отображение

$$P\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathbf{L}^1_+[a, b],$$

что для любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется оценка
$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|P(x,y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \tag{2.4}$$
то есть отображение $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ обладает свойством $\mathcal{C}$ (см. определение 1.2); отображения $I_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1 \ldots m$.

Отметим, что правая часть включения (2.1) может не обладать свойством выпуклости по переключению значений.

Определение 2.1. *Обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.3) будем называть функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \overline{\mathrm{sw}}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление
$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)\,ds + \sum_{k=1}^m I_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{2.5}$$

Замечание 8. Отметим, что, в силу [10] и [11], если множество $\Phi(x)$ в (2.1) выпукло по переключению, то обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) совпадает с классическим решением.

Замечание 9. Отметим также, что к задаче (2.1)–(2.3) сводятся, например, математические модели сложных многокомпонентных систем управления с импульсными воздействиями, в которых в связи с отказом того или иного устройства объект регулирования переходит с одного закона управления на другой (регулируется разными правыми частями). Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и при этом должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения задачи (2.1)–(2.3) и составляют множество всех таких траекторий.

Определение 2.2. Будем говорить , что оператор Φ *вольтерров по А. Н. Тихонову* (или *вольтерров*) (см. [7]), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau$ — сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau$ — множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ (правая часть включения (2.1)) вольтерров. Из этого условия вытекает, что оператор $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, определенный равенством (1.21), также вольтерров. Кроме того, в силу оценки (2.4) оператор $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывен по Хаусдорфу (см. следствие 1.2, § 1).

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством
$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Определение 2.3. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x\colon [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде
$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)\,ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} I_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{2.7}$$

Далее, будем говорить, что функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ является *обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.3) *на* $[a,c)$, если для любого $\tau \in (a,c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, и найдется такая функция $q\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in [a,c)$ $q|_\tau \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство (2.7), где $t_k \in [a,c)$, а отображение $V_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (2.6).

Определение 2.4. Обобщенное решение $x\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1)–(2.3) будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого обобщенного решения y задачи (2.1)–(2.3) на $[a,\tau]$ (здесь $\tau \in (c,b]$, если $c < b$, и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) на $[a,b]$ считается непродолжаемым.

Пусть для каждого $\tau \in (a,b]$ непрерывный оператор $\Lambda_\tau\colon \mathbf{L}^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ имеет вид

$$(\Lambda_\tau z)(t) = x_0 + \int_a^t z(s)\,ds, \quad t \in [a,\tau]. \tag{2.8}$$

Определим отображение $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ равенством

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\tau(x) \;=\; \Big\{ & y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \ \textit{существует} \ \ z \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(x))\Big)|_\tau, \\ & \textit{что} \ \ \textit{при} \ \ \textit{любых} \ \ t \in [a,\tau] \ \textit{справедливо равенство} \\ & y(t) = (\Lambda_\tau z)(t) + \sum_{k:t_k \leqslant \tau} I_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t)\Big\},\end{aligned} \tag{2.9}$$

где отображения $V_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и $\Lambda_\tau\colon \mathbf{L}^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ определены формулами (2.6) и (2.8) соответственно. В дальнейшем, если $\tau = b$, индекс в обозначении оператора $\mathfrak{A}_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ опускаем.

Из определения 2.3 согласно равенству (2.9) следует, что каждая неподвижная точка оператора $\mathfrak{A}_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ является решением задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[a,\tau]$.

Теорема 2.1. *Найдется такое $\tau \in (a,b]$, что на отрезке $[a,\tau]$ существует обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.3).

Доказательство. Пусть $r > |x_0|$, где x_0 — начальное условие задачи (2.1)–(2.3). Так как образ $\widetilde{\Phi}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}[0,2r])$ ограничен суммируемой функцией (см. лемму 1.1), то множество $\mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Согласно лемме 1.8 множество $\mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ предкомпактно. Поэтому найдется такое $\tau \in [a,t_1]$, что для любого $y \in \mathfrak{A}_{t_1}(\overline{B}_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ при каждом $t \in [a,\tau]$ выполнено неравенство

$$|y(t) - x_0| \leqslant r. \tag{2.10}$$

Так как сужение функций из шара $B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r]$ на отрезок $[a,\tau]$ совпадает с шаром $B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]$, то в силу вольтерровости оператора $\mathfrak{A}_{t_1}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}$ получаем равенство

$$\mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]) = \Big(\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])\Big)\Big|_\tau, \tag{2.11}$$

где $\Big(\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])\Big)\Big|_\tau$ — множество сужений функций из $\mathfrak{A}_{t_1}(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,t_1]}[0,2r])$ на отрезок $[a,\tau]$. Следовательно, согласно равенству (2.11) и неравенству (2.10) для любого $z \in \mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])$ получаем оценку

$$\|z\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leqslant \|z - x_0\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} + |x_0| \leqslant 2r,$$

которая влечет вложение

$$\mathfrak{A}_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]) \subset B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r]. \tag{2.12}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывно по Хаусдорфу, то найдется непрерывное отображение $\mathfrak{R}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$ такое, что для любого $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место включение $\mathfrak{R}(x) \in \widetilde{\Phi}(x)$ (см. [6]). Из равенства (2.11), вложения (2.12) и определения оператора $\mathfrak{A}_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ вытекает, что

$$\Lambda_\tau(\mathfrak{R}(V_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])))\Big|_\tau \subset B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r].$$

Так как оператор $\mathfrak{R}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$ ограничен, то образ $\Lambda_\tau(\mathfrak{R}(V_\tau(B_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}[0,2r])))\Big|_\tau$ относительно компактен (предкомпактен) в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Поэтому согласно теореме Шаудера отображение $\Lambda_\tau(\mathfrak{R}V_\tau)\Big|_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \mathbf{L}^n[a,\tau]$ имеет неподвижную точку. Неподвижная точка этого произведения есть решение задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[a,\tau]$, так как $\tau \in [a,t_1]$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. *Для того чтобы обобщенное решение $x\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1)–(2.3) было продолжаемым на $[a,\tau]$ ($\tau \in [c,b]$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{t\to c-0} |x(t)| < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если обобщенное решение $x\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1)–(2.3) на $[a,c)$ продолжаемо на $[a,\tau]$ ($\tau \in (c,b]$), то $\varlimsup\limits_{t\to c-0} |x(t)| < \infty$.

Пусть теперь обобщенное решение $x\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1)–(2.3) на $[a,c)$ удовлетворяет условию $\varlimsup\limits_{t\to c-0} |x(t)| < \infty$. Покажем, что обобщенное решение x на $[a,c)$ продолжаемо.

Пусть c принадлежит какому-то из полуинтервалов $(t_i,t_{i+1}]$, $i = 0\ldots m$ ($t_0 = a$, $t_{m+1} = b$). Из определения обобщенного решения на полуинтервале $[a,c)$ найдется такая измеримая функция $q\colon [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in (a,c)$ $q|_\tau \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(x))\Big)\,\Big|_\tau$ и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)\,ds + \sum_{k=1}^{i} I_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t) \tag{2.13}$$

(если $i = 0$, то последняя сумма слагаемых в формуле (2.13) отсутствует). Для определенности будем считать, что $i \geqslant 1$. Так как функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ ограничена на $[a,c)$, то множество $V_\tau x$, $\tau \in (a,c)$ ограничено. Это означает, что найдется такая суммируемая функция $\beta : [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,c)$ выполняется оценка $|q(t)| \leqslant \beta(t)$. Из этой оценки вытекает, что функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ суммируема на $[a,c)$. Поэтому из равенства (2.13) следует, что $\lim\limits_{t\to c-0} x(t)$ существует. Ниже будем считать, что обобщенное решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ доопределено по непрерывности на весь отрезок $[a,c]$, а функция $q \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_c(x))\Big)\,\Big|_c$. Из определения 2.3 вытекает, что x — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[a,c]$.

Далее, покажем, что обобщенное решение $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Прежде всего, если $c = b$, то, как установлено выше, x продолжаемо согласно определению. Пусть теперь $c \in (a,b)$ и $c \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0 \dots m$. Покажем, что в этом случае обобщенное решение $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Обозначим

$$U_\tau\ (x,r) = \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \ \textit{для любого}\ t \in [a,c] \ \ x(t) = y(t) \\ \textit{и}\ \max_{t\in[c,\tau]} |y(t) - x(c)| \leqslant r \Big\}, \tag{2.14}$$

где $\tau \in (c, t_{i+1})$, $r > 0$. Определим оператор $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$ равенством

$$\widetilde{\Phi}_\tau(y) = \ \Big\{ z \in \mathbf{L}^n[a,\tau] : z = q \ \textit{на}\ [a,c], \ \textit{и существует} \\ p \in \Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))\Big)\,|_{[c,\tau]}, \ \textit{что}\ z = p \ \textit{на}\ (c,\tau] \ \Big\}, \tag{2.15}$$

где функция q из представления (2.13), $\Big(\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))\Big)\,|_{[c,\tau]}$ — множество всех сужений функций из $\widetilde{\Phi}(V_\tau(y))$ на отрезок $[c,\tau]$, отображение $V_\tau\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (2.6). Из определения отображения $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$ и выпуклости по переключению значений отображения $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ следует, что для каждого $y \in U_\tau(x,r)$ справедливо вложение $\widetilde{\Phi}_\tau(y) \subset (\widetilde{\Phi}(V_\tau(y)))\big|_\tau$. Так как отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ вольтеррово и непрерывно по Хаусдорфу, то и отображение $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$, заданное соотношением (2.15), вольтеррово и непрерывно по Хаусдорфу. Далее определим оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ равенством

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) = \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \textit{существует}\ z \in \widetilde{\Phi}_\tau(u), \textit{что} \\ \textit{при любых}\ \ t \in [a,\tau] \ \ \textit{справедливо равенство} \\ y(t) = (\Lambda_\tau z)(t) + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} I_k(u(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t) \Big\}, \tag{2.16}$$

где отображения $\Lambda_\tau : \mathbf{L}^n[a,\tau]) \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$, $\widetilde{\Phi}_\tau : U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$ определены равенствами (2.8) и (2.15) соответственно. Так как для любого $u \in U_\tau(x,r)$ справедливо соотношение $(\widetilde{\Phi}_\tau(u))\big|_c = q$, где функция q из представления (2.13), то из соотношений (2.14)–(2.16) следует, что для любого $u \in U_\tau(x,r)$ имеют место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u))\big|_c = x \tag{2.17}$$

и вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) \subset \mathfrak{A}_\tau(u),$$

где оператор $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ задан равенством (2.9). Далее, в силу того, что образ $\widetilde{\Phi}_\tau(U_\tau(x,r))$ ограничен суммируемой функцией, найдется такое $\delta \in (0, \tau - c)$, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r))$ выполнено неравенство

$$\max_{t\in[c,\ c+\delta]} |y(t) - x(c)| \leqslant r. \tag{2.18}$$

Кроме того, из вольтерровости отображений

$$\widetilde{\Phi}_\tau\colon U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau]), \qquad \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau\colon U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]},$$

определенных равенствами (2.15) и (2.16) соответственно, а также в силу того, что множество сужений функций из множества $U_\tau(x,r)$ на отрезок $[a, c+\delta]$ есть множество $U_{c+\delta}(x,r)$, получаем равенство

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(U_{c+\delta}(x,r)) = (\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r)))\big|_{c+\delta},$$

где $(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r)))\big|_{c+\delta}$ — множество сужений функций из множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(U_\tau(x,r))$ на отрезок $[a,c+\delta]$, отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ определено равенством (2.16). Отсюда согласно соотношениям (2.17), (2.18) получаем вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(U_{c+\delta}(x,r)) \subset U_{c+\delta}(x,r). \tag{2.19}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi}_{c+\delta}\colon U_{c+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,c+\delta])$ непрерывно по Хаусдорфу, то согласно [6] существует такое непрерывное отображение $\mathcal{R}\colon U_{c+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,c+\delta])$, что для любого $u \in U_{c+\delta}(x,r)$ справедливо условие $\mathcal{R}(u) \subset \widetilde{\Phi}_{c+\delta}(u)$. Из определения отображений $\widetilde{\Phi}_\tau\colon U_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau\colon U_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ (см. (2.15), (2.16)) для любого $u \in U_{c+\delta}(x,r)$ имеет место включение

$$(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R})(u) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{c+\delta}(u).$$

Таким образом, из соотношения (2.19) следует вложение

$$(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R})(U_{c+\delta}(x,r)) \subset U_{c+\delta}(x,r),$$

где оператор $(\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R})\colon U_{c+\delta}(x,r) \to U_{c+\delta}(x,r)$ — произведение отображений

$$\Lambda_{c+\delta}\colon \mathbf{L}^n[a,c+\delta] \to \mathbf{C}^n[a,c+\delta], \quad \mathcal{R}\colon U_{c+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,c+\delta]).$$

Так как множество $U_{c+\delta}(x,r)$ компактно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,c+\delta]$ (см. лемму 1.8), то $\Lambda_{c+\delta}\mathcal{R}$ имеет неподвижную точку. Неподвижная точка этого отображения есть продолжение решения $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ на отрезок $[a,c+\delta]$.

Пусть теперь $c = t_i$, $i = 1\ldots m$, то есть совпадает с одним из моментов, в котором решение подвергается импульсу. Покажем, что и в этом случае решение $x : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ продолжаемо. Для этого для любых $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ и $r > 0$ определим множество

$$\widetilde{U}_\tau\ (x,r) = \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] :\ \textit{для любого}\ t \in [a,t_i]\ \ x(t) = y(t),$$
$$\sup_{t\in(t_i,\tau]} |y(t) - x(t_i) - I_i(x(t_i))| \leqslant r\ \textit{и}\ \lim_{t\to t_i+0} y(t) = x(t_i) + I_i(x(t_i)) \Big\}.$$

Равенством (2.15) определим отображение $\widetilde{\Phi}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$, в котором $c = t_i$. Аналогично, равенством (2.16) на множестве $\widetilde{U}_\tau(x,r)$ определим оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{U}_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$.

Так как для любого $u \in \widetilde{U}_\tau(x,r)$ справедливо соотношение $(\widetilde{\Phi}_\tau(u))\big|_{t_i} = q$, где функция q из представления (2.13), то из определения множества $\widetilde{U}_\tau(x,r)$ и отображений

$$\widetilde{\Phi}_\tau\colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau]), \qquad \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau\colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$$

следует, что для любого $u \in \widetilde{U}_\tau(x,r)$ имеют место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u))\big|_{t_i} = x \tag{2.20}$$

и вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(u) \subset \mathfrak{A}_\tau(u).$$

Далее, в силу того, что образ $\widetilde{\Phi}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r))$ ограничен суммируемой функцией, найдется такое $\delta \in (0, \tau - t_i)$, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r))$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in(t_i,\ t_i+\delta]} |y(t) - x(t_i) - I_i(x(t_i))| \leqslant r. \tag{2.21}$$

Кроме того, для любой функции $y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r))$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to t_i + 0} y(t) = x(t_i) + I_i(x(t_i)). \tag{2.22}$$

Из вольтерровости отображений $\widetilde{\Phi}_\tau \colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau \colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенных равенствами (2.15) и (2.16) соответственно, а также в силу того, что множество сужений функций из множества $\widetilde{U}_\tau(x,r)$ на отрезок $[a, t_i + \delta]$ — множество $\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)$, получаем равенство

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)) = (\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r)))\big|_{t_i+\delta},$$

где $(\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r)))\big|_{t_i+\delta}$ — множество сужений функций из множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau(\widetilde{U}_\tau(x,r))$ на отрезок $[a, t_i + \delta]$, отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ определено равенством (2.16). Отсюда согласно соотношениям (2.20)–(2.22) получаем вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)) \subset \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r). \tag{2.23}$$

Так как отображение $\widetilde{\Phi}_{t_i+\delta} \colon \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, t_i+\delta])$ непрерывно по Хаусдорфу, то согласно [6] существует непрерывное отображение $\mathcal{R} \colon \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, t_i+\delta])$, что для любого $u \in U_{t_i+\delta}(x,r)$ справедливо условие $\mathcal{R}(u) \in \widetilde{\Phi}_{t_i+\delta}(u)$. Из определения отображений $\widetilde{\Phi}_\tau \colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,\tau])$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}_\tau \colon \widetilde{U}_\tau(x,r) \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ для любого $u \in \widetilde{U}_{c+\delta}(x,r)$ имеет место включение

$$(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(u) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{t_i+\delta}(u).$$

Таким образом, из соотношения (2.23) следует вложение

$$(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)) \subset \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r),$$

где оператор $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R}) \colon \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r)$ — произведение отображений

$$\Lambda_{t_i+\delta} \colon \mathbf{L}^n[a, t_i+\delta] \to \mathbf{C}^n[a, t_i+\delta], \qquad \mathcal{R} \colon \widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r) \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, t_i+\delta]).$$

Так как множество $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})(\widetilde{U}_{t_i+\delta}(x,r))$ компактно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, t_i+\delta]$ (см. лемму 1.8), то $(\Lambda_{t_i+\delta}\mathcal{R})$ имеет неподвижную точку. Неподвижная точка этого отображения есть продолжение обобщенного решения x на отрезок $[a, t_i+\delta]$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.3. *Если y — обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.3) *на $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, то существует непродолжаемое решение x задачи* (2.1)–(2.3) *либо на $[a,c)$ ($c \in (\tau, b]$), либо на $[a,b]$ такое, что при $t \in [a,\tau]$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[a,\tau]$. Тогда существует такое $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, что для функции $x \colon [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ при любом $t \in [a,\tau]$ имеет место равенство (2.7). Пусть $\tau \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0 \ldots m$ ($t_0 = a$, $t_{m+1} = b$). Рассмотрим множество всех продолжений обобщенного решения $x \colon [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи (2.1)–(2.3). Обозначим это множество $\mathfrak{M}x$. Пусть

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} < d, \tag{2.24}$$

причем если $\tau = t_{i+1}$, то $d > |I_{i+1}(x(t_{i+1}))|$. Тогда

(1) либо для любого $y \in \mathfrak{M}x$ выполняется неравенство

$$\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\delta_y]} \leqslant d, \tag{2.25}$$

где $y\colon [a,\delta_y] \to \mathbb{R}^n$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) на $[a,\delta_y]$ ($\delta_y \in (\tau, b]$), являющееся продолжением обобщенного решения $x\colon [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$;

(2) либо существует $y_0 \in \mathfrak{M}x$, для которого имеет место неравенство $|y_0(\delta_0)| > d$.

Покажем, что в первом случае обобщенное решение $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ можно продолжить на весь отрезок $[a,b]$. Действительно, пусть

$$\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] = \Big\{z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] :\; z = x \text{ } \textit{на} \text{ } [a,\tau]\Big\}.$$

Далее, непрерывное по Хаусдорфу отображение $\widetilde{\Phi}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ определим равенством

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_x(z) = \;& \Big\{p \in \mathbf{L}^n[a,b] : p = q \;\; \textit{на} \;\; [a,\tau],\\ & \textit{и существует } v \in (\widetilde{\Phi}(z))\big|_{[\tau,b]},\; \textit{что } p = v \textit{ на } [\tau,b]\Big\},\end{aligned} \tag{2.26}$$

где $(\widetilde{\Phi}(z))\big|_{[\tau,b]}$ — множество всех сужений на отрезок $[\tau,b]$ функций из множества $\widetilde{\Phi}(z)$, функция $q \in (\widetilde{\Phi}(V_\tau(x)))|_\tau$, из представления (2.7). Отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_x\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$ зададим формулой

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{A}}_x(z) = \Big\{p \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] : \textit{существует } v \in \widetilde{\Phi}_x(z),\\ \textit{что при любых } t \in [a,b] \textit{ справедливо равенство}\\ p(t) = (\Lambda_b v)(t) + \sum_{k=1}^{m} I_k(p(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t)\Big\},\end{gathered} \tag{2.27}$$

где отображение $\widetilde{\Phi}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано формулой (2.26). Из определения отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}_x\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$, имеющего вид (2.27), следует, что для любого $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ имеет место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_x(z))\big|_\tau = x. \tag{2.28}$$

Таким образом, справедливо вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_x(\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]) \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]. \tag{2.29}$$

Так как множество $\mathfrak{M}x$ ограничено, то в силу непрерывности функций $I_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1\ldots m$, множество значений «скачков» в точках $t_k \in [\tau,b]$, $k = 1\ldots m$, также ограничено. Пусть

$$l = \sup\Big\{|I_k(y(t_k))| : y \in \mathfrak{M}x,\; t_k \in [\tau,b],\; k = 1\ldots m\Big\}. \tag{2.30}$$

Пусть $\mathcal{P}_{d+ml}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — непрерывное отображение, определенное равенствами (1.34), (1.35) (см. лемму 1.9), в котором $r = d + ml$, где d удовлетворяет неравенству (2.24), l определено равенством (2.30), m — количество интервалов, в которых происходит «скачок» значений функций из пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Рассмотрим на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ включение

$$y \in \widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_{d+ml}(y)). \tag{2.31}$$

Так как оператор $\mathcal{P}_{d+ml}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определенный равенствами (1.34), (1.35), непрерывен, а отображение $\widetilde{\Phi}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, имеющее вид (2.26), непрерывно по Хаусдорфу, то суперпозиция $(\Phi_x\mathcal{P}_{d+ml}) : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывна по Хаусдорфу. Поэтому согласно [6] найдется такое непрерывное отображение $\mathcal{R}_x\colon\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ выполнены включения

$$\mathcal{R}_x(y) \in \Phi_x(\mathcal{P}_{d+ml}(y)), \qquad \Lambda_b\mathcal{R}_x(y) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_x(\mathcal{P}_{d+ml}(y)). \tag{2.32}$$

В силу ограниченности оператора $\mathcal{P}_{d+ml} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\widetilde{\mathfrak{A}}_x(\mathcal{P}_{d+ml}(\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]))$ относительно компактен в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см. лемму 1.8). Поэтому согласно теореме Шаудера произведение $(\Lambda_b\mathcal{R}_x)$ имеет неподвижную точку. Из второго включения (2.32), эта неподвижная точка — решение включения (2.31), которое обозначим через p.

Покажем, что p — неподвижная точка отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$, заданного равенством (2.27). Для этого достаточно доказать неравенство

$$\|p\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leqslant d + ml \tag{2.33}$$

согласно определению отображения $\mathcal{P}_{d+ml}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см. (1.34), (1.35)). Прежде всего, заметим, что справедливо равенство

$$p|_\tau = x. \tag{2.34}$$

Пусть $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1\ldots m$ $(t_0 = a,\ t_{m+1} = b)$. Покажем, что для любого $\eta \in (\tau, t_{k+1})$ сужение $p|_\eta$ — продолжение обобщенного решения x. Предположим противное. Тогда согласно определению отображения $\mathcal{P}_{d+ml} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см. равенства (1.34), (1.35)) найдется такое $\eta \in (\tau, t_{k+1})$, что выполняется неравенство $|p(\eta)| > d + ml$. Тогда в силу непрерывности функции p на интервале (t_k, t_{k+1}), равенства (2.34) и оценки (2.24) найдется такое $\widetilde{\eta} \in (\tau, \eta)$, для которого имеет место соотношение

$$\|p\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\widetilde{\eta}]} = d + ml.$$

Из определения оператора $\mathcal{P}_{d+ml} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см. (1.34), (1.35)) следует, что сужение $p|_{\widetilde{\eta}}$ — продолжение решения x, но это противоречит неравенству (2.25).

Рассмотрим теперь случай, когда τ равно некоторому t_k, $k = 1\ldots m$. Пусть $\tau = t_k$. Из определения числа l (см. (2.30)) следует неравенство $|I_k(x(t_k))| \leqslant l$. Поэтому из соотношения (2.24) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to t_k+0} |p(t)| < d + l. \tag{2.35}$$

Из неравенства (2.35) следует, что для любого $t \in (t_k, t_{k+1}]$ имеет место оценка

$$|p(t)| < d + l.$$

Так как из равенства (2.30) следует оценка

$$|I_{k+1}(p(t_{k+1}))| \leqslant l,$$

то

$$\lim_{t\to t_{k+1}+0}|p(t)|<d+2l.$$

Отсюда следует, что для любого $t\in(t_{k+1},t_{k+2})$ выполняется неравенство

$$|p(t)|<d+2l.$$

Продолжая такой процесс дальше, получим, что для любого $t\in(t_k,b]$ справедлива оценка

$$|p(t)|<d+ml$$

. Из последнего неравенства и определения отображения $\mathcal{P}_{d+ml}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]\to\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ (см. (1.34), (1.35)), где $r=d+ml$ следует, что функция $p\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — продолжение обобщенного решения x.

Рассмотрим второй случай. Возьмем число $d+1$. Тогда для множества $\mathfrak{M}y_0$ выполнено одно из двух предположений:

(1) либо для любого $y\in\mathfrak{M}y_0$ выполнено неравенство

$$\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\delta_y]}<d+1;$$

(2) либо существует $y_1\in\mathfrak{M}y_0$, для которого имеет место оценка

$$|y_1(\delta_1)|>d+1.$$

Если выполнено первое условие, то согласно доказанному обобщенное решение x продолжаемо на весь отрезок $[a,b]$. Предположим, что выполнено второе условие. Тогда выполняется оценка $|y_1(\delta_1)|>d+1$. Продолжая процесс дальше, получим, что либо x продолжаемо на весь отрезок $[a,b]$, либо найдутся такие последовательности функций y_i и монотонная последовательность чисел $\delta_i\in(\tau,b]$, что для любого $i=0,1,2\ldots$ x_i — продолжение обобщенного решения x, $y_i\in\mathfrak{M}y_{i-1}$ и выполнены оценки

$$|y_i(\delta_i)|>d+i. \tag{2.36}$$

Рассмотрим функцию $z\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}^n$, где $\omega=\lim\limits_{i\to\infty}\delta_i$, имеющую вид

$$z(t)=\begin{cases} x(t), & \text{\emph{если}}\quad t\in[a,\tau],\\ y_0(t), & \text{\emph{если}}\quad t\in(\tau,\delta_0],\\ y_1(t), & \text{\emph{если}}\quad t\in(\delta_0,\delta_1],\\ \cdots & \cdots\quad\cdots\\ y_i(t), & \text{\emph{если}}\quad t\in(\delta_{i-1},\delta_i],\\ \cdots & \cdots\quad\cdots \end{cases}.$$

Из определения функции $z\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}^n$ и оценки (2.36) следует, что эта функция $z\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение задачи (2.1)–(2.3) на $[a,c)$. Теорема доказана.

§ 3. Априорная ограниченность и оценки обобщенных решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями

В параграфе исследуется множество решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений (2.1)–(2.3). Доказано, что если множество всех локальных обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3) априорно ограничено, то множество обобщенных решений этой задачи почти реализует (или реализует) расстояние до произвольной суммируемой функции (определение см. ниже). На основе этого утверждения получены оценки обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3), аналогичные оценкам А. Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений, и доказана теорема об оценках А. Ф. Филиппова для обобщенных решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями. В явном виде приведены оценки обобщенных решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой по переключению правой частью и с импульсными воздействиями в случае, когда импульсные воздействия задаются функцией, удовлетворяющей условию Липшица.

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что множество всех локальных обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3) *априорно ограничено,* если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует обобщенного решения $y \in H(x_0, \tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

Обозначим $H(x_0, b)|_\tau$ сужение функций из $H(x_0, b)$ на отрезок $[a, \tau]$.

Т е о р е м а 3.1. *Если множество всех локальных обобщенных решений задачи* (2.1)–(2.3) *априорно ограничено, то существует выпуклый компакт* $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, *что* $H(x_0, b) \subset K$, *для любого* $\tau \in (a, b)$ *выполняется равенство* $H(x_0, \tau) = H(x_0, b)|_\tau$ *и* $\mathfrak{A}(K) \subset K$, *где отображение* $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ *определено равенством* (2.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2.1 § 2, найдется такое $\tau \in (a, b]$, что $H(x_0, \tau) \neq \varnothing$. Согласно теореме 2.3 и условию априорной ограниченности множества локальных обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3), любое локальное обобщенное решение продолжаемо на отрезок $[a, b]$. С другой стороны, из вольтерровости оператора $\Phi\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ следует, что сужение на отрезок $[a, \tau]$ $(\tau \in (a, b))$ обобщенного решения x задачи (2.1)–(2.3) есть локальное обобщенное решение на отрезке $[a, \tau]$. Поэтому для любого $\tau \in (a, b)$ выполняется равенство $H(x_0, \tau) = H(x_0, b)|_\tau$.

Теперь покажем,что найдется такой выпуклый компакт $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, для которого имеют место вложения

$$H(x_0, b) \subset K, \quad \mathfrak{A}(K) \subset K.$$

Действительно, пусть непрерывное отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задано равенством (1.34), в котором $d = r$ (r — число, удовлетворяющее определению априорной ограниченности множества всех локальных решений задачи (2.1)–(2.3)), а $l = \widetilde{l}$, где

$$\widetilde{l} = \sup \Big\{ |I_k(y(t_k))| : y \in H(x_0, b),\ t_k \in [a, b],\ k = 1 \ldots m \Big\}. \tag{3.1}$$

На множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ рассмотрим включение

$$x \in \mathfrak{A}(\mathcal{P}_r(x)), \tag{3.2}$$

где отображение $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ задано равенством (2.9), а непрерывное отображение $\mathcal{P}_r : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенствами (1.34), (1.35).

Аналогично доказательству того, что неподвижная точка включения (2.31) является продолжением локального обобщенного решения x в теореме 2.3, доказывается, что множество обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3) совпадает с множеством решений включения (3.2). В силу того, что оператор $\mathcal{P}_r : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ ограничен, то образ $\widetilde{\Phi}(\mathcal{P}_r(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]))$ ограничен суммируемой функцией, а это означает, что $\mathfrak{A}(\mathcal{P}_r(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]))$ — предкомпактное множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Следовательно, $\overline{\mathrm{co}}\ \mathfrak{A}(\mathcal{P}_r(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]))$ — выпуклый компакт пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Пусть $K = \overline{\mathrm{co}}\ \mathfrak{A}(\mathcal{P}_r(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]))$. Тогда из определения множества K следует, что $\mathfrak{A}(K) \subset K$ и $H(x_0,b) \subset K$. Теорема доказана.

Из теорем 2.1–2.3 § 2 и теоремы 3.1 вытекает

Т е о р е м а 3.2. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (2.1)–(2.3) *априорно ограничено. Тогда для любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(x_0,\tau) \neq \varnothing$ *и существует такое* $r > 0$, *что для каждых* $\tau \in (a,b]$, $y \in H(x_0,\tau)$ *выполняется неравенство* $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leqslant r$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3) *почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции*, если для любого $v \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обобщенное решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (2.1)–(2.3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, \overline{\mathrm{sw}}\Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{3.3}$$

где $q \in \overline{\mathrm{sw}}\Phi(x)$ удовлетворяет равенству (2.5). Если неравенство (3.3) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (2.1)–(2.3) *реализует расстояние до произвольной суммируемой функции* (приведенное определение условно проиллюстрировано на рис. 2).

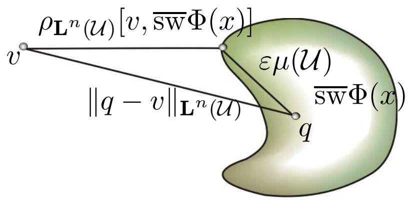

Рис. 2. Почти реализация расстояния до произвольной функции.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи* (2.1)–(2.3) *априорно ограничено. Тогда множество обобщенных решений этой задачи почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$, *то множество обобщенных решений задачи* (2.1)–(2.3) *реализует расстояние до произвольной суммируемой функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывно, то согласно [8], [9] для любого $\varepsilon > 0$ и функции $v \in \mathbf{L}^n[a,b]$ существует непрерывное отображение $g : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$, удовлетворяющее для любого $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ включению $g(y) \in \widetilde{\Phi}(y)$ и неравенству

$$\|g(y) - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(y)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}). \tag{3.4}$$

Далее определим непрерывный оператор $G : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$G(y) = \Lambda g(y) + \sum_{i=1}^{m} I_k(y(t_i))\chi_{(t_i,b]}(t). \tag{3.5}$$

Из определения оператора $G : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ (см. (3.5)) следует, что для любого $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ справедливо включение

$$G(y) \in \mathfrak{A}_\tau(y), \tag{3.6}$$

где отображение $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \Omega(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau])$ *задано равенством* (2.9). Поскольку множество локальных решений задачи (2.1)–(2.3) (см. § 2) априорно ограничено, то согласно теореме 3.2 найдется такой выпуклый компакт $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, что выполняется вложение $\mathfrak{A}(K) \subset K$. Поэтому из включения (3.6) следует, что $G(K) \subset K$. Отсюда в силу теоремы Шаудера следует, что отображение $G : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, определенное равенством (3.5), имеет неподвижную точку. Эта неподвижная точка есть обобщеное решение задачи (2.1)–(2.3). Далее, обозначив $g(x) = q$, из неравенства (3.4) получаем соотношение (3.3). Таким образом, первая часть утверждения доказана.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$. Согласно доказанному, для каждого $i = 1\ldots$ существует решение $x_i \in H(x_0,b)$, удовлетворяющее неравенству (3.3) при $q = q_i$ и $\varepsilon = \frac{1}{i}$, где q_i удовлетворяют представлению (2.5) при $x = x_i$. Так как последовательность x_i компактна в $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, а последовательность q_i слабо компактна в $\mathbf{L}^n[a,b]$, то, не уменьшая общности, будем считать, что $x_i \to x$ в $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, а $q_i \to q$ слабо в $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Поскольку $\widetilde{\Phi}$ замкнуто в слабой топологии пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$, то $q \in \Phi(x)$ (см. [11]). Следовательно, x — решение задачи (2.1)–(2.3) (см. § 2). Покажем, что для решения x выполняется неравенство (3.3) при $\varepsilon = 0$. Действительно, так как $q_i \to q$ слабо в $\mathbf{L}^n[a,b]$, то согласно [12] для каждого $i = 1\ldots$ найдутся такие числа $m(i)$, $\lambda_j^i \geqslant 0$, $j = 1\ldots m(i)$, что $\sum\limits_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i = 1$ и последовательность $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i q_{j+i}$ сходится к q в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$. Отсюда получаем

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} \leqslant \|q - \beta_i\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} + \sum_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i \|q_{j+i} - v\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}.$$

В силу выбора последовательности q_i ($q_i \in \widetilde{\Phi}(x_i)$) имеем оценку

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} \leqslant \|q - \beta_i\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} + \sum_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i \rho_{\mathbf{L}^n[a,b]}[v, \Phi(x_{j+i})] + (b-a)\sum_{j=1}^{m(i)} \lambda_j^i \frac{1}{j+i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем равенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \rho_{\mathbf{L}^n[a,b]}[v, \Phi(x)].$$

Из вложения $\Phi(x) \subset \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a,b]))$ вытекает, что последнее равенство выполняется для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$. Теорема доказана.

Определение 3.3. Будем говорить, что «импульсное воздействие» $I_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$, если найдется такая непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k \colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x-y|). \tag{3.7}$$

Определим отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|. \tag{3.8}$$

Пусть заданы функция $u \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и числа $\varepsilon, \nu \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Будем говорить, что отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, и $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,\nu}, \widetilde{I}_k, k = 1 \dots m)$, если $I_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при любом $k = 1 \dots m$ обладают свойством $\mathcal{A}$ и если найдется такой изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, удовлетворяющий условию $\Gamma(0) = 0$, что для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \tag{3.9}$$

а множество всех локальных решений задачи

$$\dot{z} = u + \varepsilon + \Gamma(z), \quad \Delta(z(t_k)) = \widetilde{I}_k(z(t_k)), \quad k = 1 \dots m, \quad z(a) = \nu \tag{3.10}$$

априорно ограничено.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть для $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существуют такие $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, что имеет место представление*

$$y(t) = y(a) + \int_a^t \widetilde{q}(s)\, ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.11}$$

и для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедливо неравенство

$$\rho_{\boldsymbol{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s)\, ds. \tag{3.12}$$

Далее, пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что отображения $I_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, и $\Phi \colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,\nu}, \widetilde{I}_k, k = 1 \dots m)$ при значениях $u = \varkappa$, $\nu = |x_0 - y(a)|$. Тогда для любого обобщенного решения $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющего для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ неравенству (3.3) с функцией $v = \widetilde{q}$, имеет место оценка

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.13}$$

и почти всюду на $[a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi))(t), \tag{3.14}$$

где $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — верхнее решение задачи (3.10) при $u = \varkappa$ и $\nu = |x_0 - y(a)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющее для любого измеримого множества $\mathcal{U}$ неравенству (3.3), в котором функция $q \in \mathbf{L}^n[a,b]$ из представления (2.5), а функция $v = \widetilde{q}$ из соотношения (3.11). Поэтому из равенств (2.5) и (3.11) для любого $t \in [a,b]$ получаем оценку

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y(a)| + \int_a^t |q(s) - \widetilde{q}(s)|\, ds + \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k) - y(t_k))|\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{3.15}$$

Так как импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, обладают свойством $\mathcal{A}$, то из оценок (3.7) и (3.15) следует соотношение

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y(a)| + \int_a^t |q(s) - \widetilde{q}(s)|\, ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k(|x(t_k) - y(t_k)|)\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{3.16}$$

Далее, так как $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяет оценке (3.3), в которой $q \in \widetilde{\Phi}(x)$ из представления (2.5), а функция $v = \widetilde{q}$ из соотношения (3.11), то из оценок (3.3), (3.12) для любого измеримого множества $\mathcal{U}$ имеют место соотношения

$$\|q - \widetilde{q}\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}) \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] + \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(y); \Phi(x)] +$$

$$+ \varepsilon\mu(\mathcal{U}) \leqslant \int_{\mathcal{U}} (\varkappa(s) + \varepsilon)\, ds + \int_{\mathcal{U}} \Gamma(Z(x-y))(s)\, ds.$$

Таким образом, из предыдущих оценок вытекает, что при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + \Gamma(Z(x-y))(t). \tag{3.17}$$

Поэтому из оценок (3.17) и (3.16) для любого $t \in [a,b]$ вытекает соотношение

$$\begin{gathered} |x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y(a)| + \int_a^t (\varkappa(s) + \varepsilon)\, ds + \\ + \int_a^t \Gamma(Z(x-y))(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k(|x(t_k) - y(t_k)|)\chi_{(t_k,b]}(t). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Определим отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ равенством

$$(\Theta x)(t) = \sup_{s \in [a,t]} x(s). \tag{3.19}$$

Очевидно, что для любого $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|x(t) - y(t)| \leqslant (\Theta Z(x-y))(t). \tag{3.20}$$

Из (3.20), (3.18) и изотонности отображений $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1 \dots m$, для любого $t \in [a,b]$ следует соотношение

$$\begin{gathered} |x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y(a)| + \int_a^t (\varkappa(s) + \varepsilon)\, ds + \\ + \int_a^t \Gamma(\Theta Z(x-y))(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k((\Theta Z(x-y))(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \end{gathered} \tag{3.21}$$

Так как правая часть оценки (3.21) не убывает по $t \in [a,b]$, то из определения функции $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см. (3.19)) для любого $t \in [a,b]$ получаем оценку

$$\begin{gathered} (\Theta Z(x-y))(t) \leqslant |x_0 - y(a)| + \int_a^t \Big(\varkappa(s) + \varepsilon + \Gamma(\Theta Z(x-y))(s)\Big)\, ds + \\ + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k((\Theta Z(x-y))(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Поэтому для любого $t \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$(\Theta Z(x - y))(t) \leqslant \xi(t), \tag{3.23}$$

где $\xi(\cdot)$ — верхнее решение задачи (3.10). Из оценок (3.23), (3.22), (3.20) получаем оценку (3.13). Из неравенства (3.17) и соотношения (3.23) следует неравенство (3.14). Теорема доказана.

Из теорем 3.3, 3.4 вытекает

Т е о р е м а 3.5. *Пусть для* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *существуют такие* $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a, b]$ *и* $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a, b]$, *что имеют место соотношения* (3.11) *и* (3.12). *Далее, пусть множество всех локальных решений задачи* (2.1)–(2.3) *априорно ограниченно. Тогда, если отображения*

$$I_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad k = 1 \ldots m, \qquad \Phi \colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$$

обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,\nu}, \widetilde{I}_k, k = 1 \ldots m)$, *где* $u = \varkappa$, $\nu = |x_0 - y(a)|$, $\varepsilon > 0$, *существует решение* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *задачи* (2.1)–(2.3), *удовлетворяющее при всех* $t \in [a, b]$ *оценке* (3.13), *и при почти всех* $t \in [a, b]$ *соотношению* (3.14).

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a, b]))$, *то утверждение верно при* $\varepsilon = 0$.

Далее рассмотрим приложения результатов, приведенных выше.

П р и м е р 3.1. Пусть заданы отображения $F_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1 \ldots r$, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображения $F_i(\cdot, x)$ измеримы;

(2) существуют суммируемые функции $l_i \colon [a, b] \to [0, \infty)$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$h[F_i(t, x); F_i(t, y)] \leqslant l_i(t)|x - y|, \quad i = 1, 2 \ldots r; \tag{3.24}$$

(3) функции $\|F_i(t, 0)\| : [a, b] \to [0, \infty)$, определеные равенствами

$$\|F_i(t, 0)\| = \sup_{y \in F_i(t,0)} |y|, \quad i = 1 \ldots r,$$

суммируемы.

Пусть $N_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$, $i = 1 \ldots r$, — многозначные операторы Немыцкого, порожденные отображениями $F_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1 \ldots r$, и заданные равенствами

$$N_i x = \{z \in \mathbf{L}^n[a, b] : z(t) \in F_i(t, x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a, b]\}. \tag{3.25}$$

Зададим многозначное отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ в виде

$$\mathcal{P}(x) = N_1(x) \cup N_2(x) \cup \ldots \cup N_r(x). \tag{3.26}$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями

$$\begin{gathered} \dot{x} \in \mathcal{P}x \\ \Delta(x(t_k)) = \widehat{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1 \ldots m, \\ x(a) = x_0, \end{gathered} \tag{3.27}$$

где для любого $k = 1 \dots m$ операторы $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеют вид

$$\widehat{I}_k x = A_k x + g_k,$$

здесь $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathbb{R}^n$; отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством (3.26).

В этом случае «овыпукленное по переключению» отображение

$$\widetilde{P}\colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$$

порождается отображением $\widetilde{F} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, которое имеет вид

$$\widetilde{F}(t,x) = F_1(t,x) \cup F_2(t,x) \cup \ldots \cup F_r(t,x).$$

Под обобщенным решением задачи (3.27) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая включению $q \in \widetilde{P}x$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = (\Lambda q)(t) + \sum_{k=1}^{m} \widehat{I}_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t), \tag{3.28}$$

где оператор $\Lambda : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством (2.8) при $\tau = b$.

Так как для любого $k = 1 \dots m$ выполняется неравенство

$$|\widehat{I}_k x - \widehat{I}_k y| \leqslant \|A_k\||x-y|,$$

то отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1 \dots m$, удовлетворяющее оценке (3.7), имеет вид

$$\widetilde{I}_k x = \|A_k\| x. \tag{3.29}$$

Таким образом, импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, обладают свойством $\mathcal{A}$ (см. определение 3.3).

Пусть отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ задано равенством

$$(\Gamma x)(t) = l(t)x(t), \tag{3.30}$$

где суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$l(t) = \max\{l_1(t), l_2(t), \ldots, l_r(t)\}, \tag{3.31}$$

где функции $l_i : [a,b] \to [0,\infty)$ удовлетворяют оценкам (3.24). При этом отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условию: $\Gamma(0) = 0$.

Пусть множество $\mathcal{U} \subset [a,b]$ измеримо и функции $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Из леммы 1.10 и неравенства (3.24) следует соотношение

$$\begin{gathered} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\mathcal{P}x, \mathcal{P}y] \leqslant \max_{i=1\dots r} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[N_i x, N_i y] = \\ = \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[F_i(t,x(t)), F_i(t,y(t))]\,dt \leqslant \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} l_i(t)|x(t)-y(t)|\,dt. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Из определения функции $l : [a,b] \to [0,\infty)$ (см. (3.31)) для любого $i = 1 \dots r$ вытекает оценка

$$\int_{\mathcal{U}} l_i(t)|x(t), y(t)|\,dt \leqslant \int_{\mathcal{U}} l(t)|x(t)-y(t)|\,dt. \tag{3.33}$$

Поэтому из неравенств (3.32), (3.33) следует, что для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ и любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ выполняется соотношение

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\mathcal{P}x, \mathcal{P}y] \leqslant \int_{\mathcal{U}} l(t)|x(t)-y(t)|\,dt = ||\Gamma(Z(x-y))||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \tag{3.34}$$

где суммируемая функция $l:[a,b]\to[0,\infty)$ определена равенством (3.31), отображение $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ имеет вид (3.30), непрерывное отображение $Z:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано равенством (3.8).

Таким образом, отображение $\mathcal{P}:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ с импульсными воздействиями $\widehat{I}_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1\ldots m$, обладает свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,\nu},\widetilde{I}_k, k=1\ldots m)$ при отображении $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$, заданном в виде (3.30).

Рассмотрим решение задачи

$$\dot{y}=u+\varepsilon+\Gamma(y), \quad \Delta y(t_k)=\widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k=1\ldots m, \quad y(a)=\nu, \tag{3.35}$$

где числа $\varepsilon,\nu\geqslant 0$, функция $u\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$, отображение $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ определено равенством (3.30). Решение задачи (3.35) на промежутке $[a,t_1]$ имеет вид

$$\xi(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^t l(s)\,ds}.$$

Рассмотрим продолжение решения задачи (3.35) на промежуток $(t_1,t_2]$. Из условия задачи получаем $\xi(t_1+0)=\xi(t_1)+\|A_1\|\xi(t_1)$. Поэтому решение задачи (3.35) на отрезке $[a,t_2]$ записывается в виде

$$\xi(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}\,ds+(y(t_1)+\|A_1\|y(t_1))e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}$$

или

$$\xi(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^t l(s)\,ds}+$$
$$+\|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_1} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_1,b]}(t).$$

Так как

$$\xi(t_2+0)=\xi(t_2)+\|A_2\|\xi(t_2),$$

то продолжение решения задачи (3.35) на полуинтервал $(t_2,t_3]$ имеет вид

$$\xi(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+\nu\; e^{\int_a^t l(s)\,ds}+$$
$$+\|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_1} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$
$$+\|A_2\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_2} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$
$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_1} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_2,b]}(t).$$

На полуинтервал $(t_3,t_4]$

$$\xi(t)=\int_a^t (u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+\nu\; e^{\int_a^t l(s)\,ds}+$$
$$+\|A_1\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_1} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_1,b]}(t)+$$
$$+\|A_2\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\; e^{\int_a^{t_2} l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$

$$+\|A_3\|\Big(\int_a^{t_3}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_3}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int\limits_a^{t_3}l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_3}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_2,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_2}l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_2}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_3,b]}(t)+$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\|A_3\|\Big(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\Big)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_3,b]}(t)$$

Окончательно получаем формулу

$$\xi(t)=\int_a^t(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^t l(s)\,ds}+$$

$$+\sum_{k=1}^m\|A_k\|\left(\int_a^{t_k}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_k}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_k}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_k}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_k,b]}(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\|A_1\|\|A_{k+1}\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{m-2}\|A_2\|\|A_{k+1}\|\left(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_2}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_2}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int_a^{t_{m-1}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_{m-1}}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_{m-1}}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_{m-1}}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-2}\|A_1\|\|A_2\|\|A_{k+2}\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_{k+2},b]}(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-3}\|A_2\|\|A_3\|\|A_{k+3}\|\left(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_2}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_2}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_{k+3},b]}(t)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\|A_{m-2}\|\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int_a^{t_{m-2}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_{m-2}}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_{m-2}}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_{m-2}}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\|A_1\|\|A_2\|\ldots\|A_m\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1}l(\tau)d\tau}\,ds+\nu\ e^{\int_a^{t_1}l(s)\,ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)\,ds}\chi_{(t_m,b]}(t). \qquad (3.36)$$

Пусть для функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\widetilde{q}\in\mathbf{L}^n[a,b]$, что при любом $t\in[a,b]$ имеет место представление

$$y(t)=y(a)+\int_a^t\widetilde{q}(s)\,ds+\sum_{k=1}^m I_k(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \qquad (3.37)$$

Далее, пусть функция $\varkappa\in\mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ удовлетворяет соотношению

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q},\mathcal{P}(y)]\leqslant\int_{\mathcal{U}}\varkappa(s)\,ds. \qquad (3.38)$$

Тогда из теоремы 3.5 и из приведенных выше рассуждений вытекает, что для любой функции $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (3.37) и оценке (3.38) и любого $\varepsilon>0$ существует такое обобщенное решение x задачи (3.27), что для любого $t\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\xi(t) \qquad (3.39)$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + l(t)\xi(t), \tag{3.40}$$

где функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (3.38); функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ задана равенством (3.31); $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (3.36) при $u = \varkappa$ и $\nu = |x_0 - y(a)|$. Отметим, что если импульсные воздействия отсутствуют, то приведенные оценки (3.39), (3.40) совпадают с оценками А. Ф. Филиппова с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим задачу Коши для импульсного дифференциального включения с запаздыванием и правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений:

$$\begin{gathered} \dot{x} \in N_1(P_1x) \cup N_2(P_2x) \cup \ldots \cup N_r(P_rx), \\ \Delta(x(t_k)) = \widehat{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1 \ldots m, \\ x(a) = x_0, \end{gathered} \tag{3.41}$$

где $N_i : \mathbf{L}^n_\infty[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ — многозначные операторы Немыцкого, заданные равенствами (3.25) и порожденные отображениями $F_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1 \ldots r$, удовлетворяющими условиям (1)–(3) примера 3.1; операторы $P_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n_\infty[a,b]$, $i = 1 \ldots r$, имеют вид

$$(P_ix)(t) = \begin{cases} x(\omega_i(t)), & \text{если} \quad \omega_i(t) \in [a,b], \\ \varphi_i(\omega_i(t)), & \text{если} \quad \omega_i(t) < a, \end{cases} \tag{3.42}$$

где измеримые по Лебегу функции $\omega_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots r$, при всех $t \in [a,b]$ удовлетворяют неравенству $\omega_i(t) \leqslant t$, ограниченные функции $\varphi_i : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ измеримы по Борелю; импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определены равенствами $\widehat{I}_kx = A_kx + g_k$, здесь $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1 \ldots m$.

Определим отображение $\Psi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ равенством

$$\Psi(x) = N_1(P_1x) \cup N_2(P_2x) \cup \ldots \cup N_r(P_rx). \tag{3.43}$$

Тогда включение (3.41) можно переписать в эквивалентном виде

$$\dot{x} \in \Psi x. \tag{3.44}$$

«Овыпукленное по переключению» отображение $\widetilde{\Psi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством

$$\begin{gathered} \widetilde{\Psi}(x) = \{z \in \mathbf{L}^n[a,b] : z(t) \in F_1(t,(P_1x)(t)) \cup F_2(t,(P_2x)(t)) \cup \ldots \cup F_r(t,(P_rx)(t)) \\ \text{при почти всех } t \in [a,b]\}. \end{gathered} \tag{3.45}$$

Определим отображение $\widetilde{\Gamma} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ равенством

$$(\widetilde{\Gamma}x)(t) = l(t)(\Theta x)(t), \tag{3.46}$$

где для каждого $t \in [a,b]$ функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ задана равенством (3.31), отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ имеет вид

$$(\Theta x)(t) = \operatorname*{vraisup}_{s\in[a,t]} x(s). \tag{3.47}$$

Далее, зададим отображения $\widetilde{P}_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}^1_\infty[a,b]$, $i = 1 \dots r$, формулой

$$(\widetilde{P}_i x)(t) = \begin{cases} x(\omega_i(t)), & \text{если} \quad \omega_i(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad \omega_i(t) < a. \end{cases} \tag{3.48}$$

Пусть множество $\mathcal{U} \subset [a,b]$ измеримо по Лебегу и $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Из леммы 1.10 следует оценка

$$\begin{gathered} h_{L^n(\mathcal{U})}[\Psi(x);\ \Psi(y)] \leqslant \max_{i=1\dots r} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[N_i(P_i x), N_i(P_i y)] = \\ = \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} h[F_i(t,(P_i x)(t)), F_i(t,(P_i y)(t))]\, dt, \end{gathered} \tag{3.49}$$

здесь отображение $\Psi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством (3.43),

$$N_i : \mathbf{L}_\infty[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]), \quad i = 1 \dots r,$$

многозначные операторы Немыцкого, заданные равенствами (3.25).

Согласно неравенствам (3.24) и оценке (3.49) имеем

$$\begin{gathered} h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Psi(x);\ \Psi(y)] \leqslant \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} l_i(t)|(P_i x)(t) - (P_i y)(t)|\, dt = \\ = \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} l_i(t)|(\widetilde{P}_i x)(t) - (\widetilde{P}_i y)(t)|\, dt. \end{gathered} \tag{3.50}$$

Так как $\omega_i(t) \leqslant t$, то при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|(\widetilde{P}_i x)(t) - (\widetilde{P}_i y)(t)| \leqslant \Theta(Z(x-y))(t),$$

где отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ имеет вид (3.47), непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (3.8). Поэтому из неравенства (3.50) следует оценка

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Psi(x);\ \Psi(y)] \leqslant \max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} l_i(t)\Theta(Z(x-y))(t)\, dt. \tag{3.51}$$

Поскольку выполняется соотношение

$$\max_{i=1\dots r} \int_{\mathcal{U}} l_i(t)\Theta(Z(x-y))(t)\, dt \leqslant \int_{\mathcal{U}} l(t)\Theta(Z(x-y))(t)\, dt,$$

то для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ и любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ справедливо неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Psi(x);\ \Psi(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} l(t)\Theta(Z(x-y))(t)\, dt, \tag{3.52}$$

где суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ задана равенством (3.31).

Таким образом, отображение $\Psi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ с импульсными воздействиями $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, обладает свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,\nu}, \widetilde{I}_k, k = 1 \dots m)$ при отображении $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, заданном в виде (3.46).

Пусть функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определена при любом $t \in [a,b]$ представлением (3.37). Далее, пусть функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}, \Psi(y)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \varkappa_1(s)\, ds, \tag{3.53}$$

где отображение $\Psi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством (3.43), функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$ из соотношения (3.37).

Для задачи (3.41) в силу неравенства (3.52) можно найти мажорантную оценку.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)(\Theta y)(t), \\ &\Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1 \dots m, \\ &y(a) = \nu, \end{aligned} \tag{3.54}$$

где отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ задано формулой (3.47), импульсные воздействия $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1 \dots m$, имеют вид (3.29), функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (3.53).

Решение задачи (3.54) при любом $t \in [a,b]$ определяется равенством

$$y(t) = \nu + \int_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon)\, ds + \int_a^t l(s)(\Theta y)(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{3.55}$$

Так как при любом $k = 1 \dots m$ имеет место неравенство $\Delta(y(t_k)) \leqslant \Delta((\Theta y)(t_k))$, а правая часть равенства (3.55) не убывает, то из определения $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ (см. (3.47)) при почти всех $t \in [a,b]$ вытекает оценка

$$(\Theta y)(t) \leqslant \nu + \int_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon)\, ds + \int_a^t l(s)(\Theta y)(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{I}_k((\Theta y)(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{3.56}$$

Из оценки (3.56) и теоремы 1.3 следует, что значение $(\Theta y)(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ не превосходит решения задачи

$$\dot{y} = \varkappa_1 + \varepsilon + ly, \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1 \dots m, \quad y(a) = \nu. \tag{3.57}$$

Решение задачи (3.57) найдено в примере 1.2.1, является функцией $\xi(\cdot)$ и определено равенством (3.36) при $\varkappa = \varkappa_1$.

Таким образом, из теоремы 3.5 и приведенных выше рассуждений вытекает, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (3.37) и оценке (3.53), для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(t) \tag{3.58}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)\xi(t), \tag{3.59}$$

где функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (3.53), функция $l \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого $t \in [a,b]$ задана равенством (3.31), $\xi \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (3.36) при $u = \varkappa_1$ и $\nu = |x_0 - y(a)|$. Отметим также, что если для каждого $i = 1 \dots r$ запаздывания $\omega_i(t) = t$, то приведенные оценки (3.58), (3.59) совпадают с оценками (3.39), (3.40) примера 3.1 и в регулярном случае (без импульсных воздействий), с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, совпадают с оценками А. Ф. Филиппова.

§ 4. Обобщенные квазирешения и принцип плотности для обобщенных решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями

В параграфе вводится понятие обобщенного квазирешения задачи (2.1)–(2.3) и исследуются свойства квазирешений. Отметим, что это понятие было введено Важевским (T. Wazewski)(см. [1]) для обыкновенного дифференциального включения и играет фундаментальную роль в изучении свойств решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. На основе полученных результатов доказано свойство, когда множество обобщенных решений включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости значений, и с импульсными воздействиями, плотно во множестве решений «овыпукленного» включения, которое называют принципом плотности.

Применительно к задаче (2.1)–(2.3) определение квазирешения можно сформулировать следующим образом.

Определение 4.1. Будем говорить, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, имеющая представление (3.11), в котором $y(a) = x_0$, является *обобщенным квазирешением задачи* (2.1)–(2.3), если найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1\ldots$, что для каждой функции x_i, $i = 1\ldots$, найдется функция $q_i \in \widetilde{\Phi}(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = x_0 + \int_a^t q_i(s)\,ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(x_i(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t), \tag{4.1}$$

где $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Отметим, что если множество $\Phi(x)$ в определении обобщенного квазирешения выпукло по переключению, то обобщенное квазирешение совпадает с квазирешением, введенным в работах [11], [13], [14], в случае когда $\Phi(\cdot)$ — оператор Немыцкого.

Пусть $\mathcal{H}(x_0)$ — множество всех обобщенных квазирешений задачи (2.1)–(2.3).

Определим отображение $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$ равенством

$$\widetilde{\Phi}_{\text{co}}(x) = \overline{\text{co}}(\overline{\text{sw}}\Phi(x)). \tag{4.2}$$

Оператор $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$ будем называть *обобщенно овыпукленным оператором.*

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \widetilde{\Phi}_{\text{co}}(x), \quad \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \quad x(a) = x_0. \tag{4.3}$$

Пусть $H_{\text{co}}(x_0,\tau)$ — множество всех решений задачи (4.3) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Теорема 4.1. *Справедливо равенство* $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0,b)$.

Доказательство. Вначале докажем вложение

$$\mathcal{H}(x_0) \subset H_{\text{co}}(x_0,b). \tag{4.4}$$

Пусть $y \in \mathcal{H}(x_0)$, и пусть $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет представление (3.11), в котором $y(a) = x_0$. Тогда согласно определению обобщенного квазирешения задачи (2.1)–(2.3) найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1\ldots$, что для каждой функции x_i, $i = 1\ldots$, найдется функция $q_i \in \widetilde{\Phi}(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство (4.1). Так как $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$, а отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1\ldots m$, непрерывны, то при любом $t \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{m} I_k(x_i(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t) = \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{4.5}$$

Из равенства (4.5) следует, что при любом $t \in [a,b]$ имеет место соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^t q_i(s)\,ds = \int_a^t \widetilde{q}(s)\,ds, \tag{4.6}$$

где для каждого $i = 1\ldots$ функция $q_i \in \widetilde{\Phi}(y)$ удовлетворяет представлению (4.1), а функция $\widetilde{q}$ удовлетворяет равенству (3.11), в котором $y(a) = x_0$.

Далее покажем, что $q_i \to \widetilde{q}$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Так как множество $\widetilde{\Phi}(y)$ ограничено суммируемой функцией, то согласно [6] достаточно показать, что для каждого измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ имеет место равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathcal{U}} q_i(s)\,ds = \int_{\mathcal{U}} \widetilde{q}(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Докажем равенство (4.7). Из аддитивности интеграла и равенства (4.6) следует, что для любых $t, \tau \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int_\tau^t q_i(s)\,ds = \int_\tau^t \widetilde{q}(s)\,ds. \tag{4.8}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть функция $\beta \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ такова, что при любых $z \in \Phi(y)$ и при почти всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|z(t)| \leqslant \beta(t). \tag{4.9}$$

Не уменьшая общности далее будем считать, что и функция $\widetilde{q}$ из представления (3.11) удовлетворяет неравенству (4.9). Далее, пусть $\delta > 0$ таково, что при всех измеримых множествах $\mathcal{E} \subset [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $\mu(\mathcal{E}) < \delta$, выполняется неравенство

$$\int_{\mathcal{E}} \beta(s)\,ds < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Далее, пусть $\mathcal{U} \subset (a,b)$ — измеримое множество и $\widetilde{\mathcal{U}} \subset (a,b)$ — такое открытое множество, что $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ и $\mu(\widetilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}) < \delta$. Далее, пусть

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) = \widetilde{\mathcal{U}}_1 \bigcup \widetilde{\mathcal{U}}_2,$$

где (a_i, b_i), $i = 1\ldots$, — составляющие открытые интервалы множества $\mathcal{U} \subset (a,b)$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_1 = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i), \qquad \widetilde{\mathcal{U}}_2 = \bigcup_{i=p+1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

причем p выбрано так, что $\mu(\widetilde{\mathcal{U}}_2) < \delta$. В силу равенства (4.8) выберем $N = 1\ldots$ таким, что при всех $i \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\Big| \int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1} q_i(s)\,ds - \int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1} q(s)\,ds \Big| < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Так как для любого $i = 1\ldots$ справедливо равенство

$$\int_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds=\int_{\widetilde{\mathcal{U}}}(q_i(s)-q(s))\,ds-\int_{\widetilde{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds,$$

то для любого $i = 1\ldots$ справедлива оценка

$$\Big|\int_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|\leqslant\Big|\int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|+\Big|\int_{\widetilde{\mathcal{U}}_2}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|+\Big|\int_{\widetilde{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|.$$

Так как для функции $\beta\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ выполняется неравенство (4.9), то получаем оценку

$$\Big|\int_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|\leqslant\Big|\int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|+2\int_{\widetilde{\mathcal{U}}_2}\beta(s)\,ds+2\int_{\widetilde{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}}\beta(s)\,ds.$$

Отсюда, в силу неравенств (4.10), (4.11), для любого $i\geqslant N$ получаем оценку

$$\Big|\int_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))\,ds\Big|<5\varepsilon.$$

Таким образом, для любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ справедливо равенство (4.7). Следовательно, $q_i\to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i\to\infty$. Так как выпуклое замкнутое множество пространства замкнуто и в слабой топологии этого пространства (см. [6], [15]), то из включения $q_i\in\overline{\text{co}}\widetilde{\Phi}(y)$ вытекает включение $q\in\overline{\text{co}}\widetilde{\Phi}(y)$. А это означает, что функция $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, представимая в виде (3.11), является решением задачи (4.3), то есть $y\in H_{\text{co}}(x_0,b)$. Следовательно, включение (4.4) справедливо.

Теперь докажем вложение

$$H_{\text{co}}(x_0,\tau)\subset\mathcal{H}(x_0).\tag{4.12}$$

Пусть $y\in H_{\text{co}}(x_0,b)$. Тогда функция $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ представима в виде равенства (3.11), причем функция $q\in\overline{\text{co}}\widetilde{\Phi}(y)$, $y(a)=x_0$. Так как множество $\widetilde{\Phi}(y)\in\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, то для функции q найдется такая последовательность $q_i\in\widetilde{\Phi}(y)$, $i=1\ldots$, что $q_i\to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i\to\infty$ (см. [8]). Далее, определим последовательность $x_i\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i=1\ldots$, равенством (4.1). Так как $q_i\to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i\to\infty$, то

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^t q_i(s)\,ds=\int_a^t q(s)\,ds$$

равномерен относительно $t\in[a,b]$. Поэтому в силу непрерывности импульсных отображений $I_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1\ldots m$, получим равенство

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=0.$$

А это означает, что $y\in\mathcal{H}(x_0)$. Таким образом, справедливо вложение (4.12). Из соотношений (4.4), (4.12) следует равенство $\mathcal{H}(x_0)=H_{\text{co}}(x_0,\tau)$. Теорема доказана.

Определение 4.2. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1\ldots m$ и отображение $\Phi\colon\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $\mathcal{B}$, если выполняется свойство $(\Gamma^{0,0,0},\widetilde{I}_k,k=1\ldots m)$ (см. определение 3.4, § 3), а задача

$$\dot{y}=\Gamma y,\quad y(a)=0\tag{4.13}$$

на каждом отрезке $[a,\tau]$ $(\tau\in(a,b])$ имеет только нулевое решение, где отображение $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (3.9).

Т е о р е м а 4.2. *Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи*(4.3) *априорно ограничено. Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\boldsymbol{L}^n[a,b])$ *обладают свойством* $\mathcal{B}$. *Тогда* $H(x_0,b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H(x_0,b)} = H_{\mathrm{co}}(x_0,b), \tag{4.14}$$

где $\overline{H(x_0,b)}$ *— замыкание множества* $H(x_0,b)$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача (4.3) априорно ограничена, то априорно ограничена и задача (2.1)–(2.3). Поэтому согласно теореме 3.1 множество $H(x_0,b) \neq \varnothing$.

Докажем равенство (4.14). Так как «овыпукленное» по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ непрерывно по Хаусдорфу, то отображение

$$\widetilde{\Phi}_{co}(x) \colon \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to\to \Omega(\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$$

также непрерывно (см. следствие 1.2). Поэтому (см. теорему 3.1) множество $H_{\mathrm{co}}(x_0,b)$ замкнуто в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и является компактом, содержащимся в некотором выпуклом компакте пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, который отображением $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенным равенством (2.9), переводится в себя (см. теорему 3.1). Из этого свойства вытекает вложение

$$\overline{H(x_0,b)} \subset H_{\mathrm{co}}(x_0,b). \tag{4.15}$$

Теперь докажем включение

$$H_{\mathrm{co}}(x_0,b) \subset \overline{H(x_0,b)}. \tag{4.16}$$

Пусть $y \in H_{\mathrm{co}}(x_0,b)$. Это означает, что найдется $\widetilde{q} \in \overline{\mathrm{co}}\widetilde{\Phi}(y)$, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ представима в виде (3.11), в котором $y(a) = x_0$. В силу теоремы 4.1, $y \in \mathcal{H}(x_0)$. Поэтому найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1\dots$, что для каждой функции $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1\dots$, найдется функция $q_i \in \widetilde{\Phi}(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство (3.11) и $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Далее, из неравенства (3.9) для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ и для любого $i = 1\dots$ вытекает соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[q_i;\Phi(x_i)] \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(y);\Phi(x_i)] \leqslant \int_{\mathcal{U}} \Gamma(Z(x_i - y))(s)\,ds.$$

Для любого $i = 1\dots$ рассмотрим мажорантную задачу

$$\dot{z} = \Gamma(Z(x_i - y)) + \frac{1}{i} + \Gamma(z),\ \Delta z(t_k) = \widetilde{I}_k(z(t_k)),\ k = 1\dots m,\ z(a) = 0, \tag{4.17}$$

где отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (3.9). Так как $\Gamma(Z(x_i - y)) \to 0$ при $i \to \infty$, а предельная задача априорно ограничена, то при всех достаточно больших $i = 1\dots$ задача (4.17) имеет верхнее решение. Не уменьшая общности будем считать, что при всех $i = 1\dots$ задача (4.17) имеет верхнее решение. Обозначим это верхнее решение $\xi_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Согласно теореме 3.5, для каждого $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1\dots$, найдется такое обобщенное решение $z_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (2.1)–(2.3), что при любом $t \in [a,b]$ имеет место оценка

$$|z_i(t) - x_i(t)| \leqslant \xi_i(t). \tag{4.18}$$

Поскольку $\Gamma(Z(x_i - y)) + \frac{1}{i} \to 0$ при $i \to \infty$, то $\xi_i \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому из оценки (4.18) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \|z_i - x_i\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = 0. \tag{4.19}$$

Из равенства (4.19) вытекает, что $z_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. А это означает, что $y \in \overline{H(x_0,b)}$. Таким образом, включение (4.16) доказано. Из соотношений (4.15), (4.16) вытекает равенство (4.14). Теорема доказана.

Свойство, когда множество обобщенных решений включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости значений, и импульсными воздействиями плотно во множестве решений «овыпукленного» включения, назовем, по аналогии с обыкновенными дифференциальными включениями, принципом плотности. Таким образом, теорема 4.2 дает достаточные условия выполнения принципа плотности (см. [11]) для задачи (2.1)–(2.3).

Принцип плотности является фундаментальным свойством в теории включений, так как он широко используется в теории оптимального управления, например для доказательства существования скользящих режимов (см. [16]). Впервые принцип плотности был установлен А. Ф. Филипповым для обыкновенных дифференциальных включений (см. [10]). Впоследствии обобщению этого результата были посвящены работы многих авторов (см., например, [9], [17]).

Приведем примеры функционально-дифференциальных включений, для которых выполняется принцип плотности.

П р и м е р 4.1. Пусть многозначное отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством (3.26) (см. пример 3.1, § 3).

Отображения $F_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1 \dots r$, удовлетворяют условиям (1)–(3) примера 3.1, § 3.

Рассмотрим задачу Коши для импульсного дифференциального включения с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений (3.27).

Из определения отображений $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, следует, что импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, обладают свойством $\mathcal{A}$ (см. определение 3.3 и пример 3.1). Если отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ задать равенством (3.30), где суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением (3.31), то $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условию $\Gamma(0) = 0$ и задача

$$\dot{y} = \Gamma(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1,2,\dots m, \quad y(a) = 0, \tag{4.20}$$

где отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1 \dots m$, задано равенством (3.29), имеет только нулевое решение на каждом отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$. Поэтому для импульсных воздействий $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$ и отображения $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ выполняется свойство $(\Gamma^{0,0,0},\ \widetilde{I}_k,\ k = 1 \dots m)$ (см. определение 4.2) при $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$, заданном равенством (3.30).

Таким образом, выполняются условия априорной ограниченности обобщенных решений задачи (3.27) (см. пример 3.1, § 3) и свойство $\mathcal{B}$ для импульсных воздействий $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1 \dots m$, и отображения $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$. Это означает, что задача (3.27) удовлетворяет условиям теоремы (4.2) и, следовательно, для задачи (3.27) выполняется принцип плотности.

Аналогично, выполнение принципа плотности можно доказать для импульсного дифференциального включения с запаздыванием и правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, рассмотренного в примере 3.2, § 3.

Априорная ограниченность множества решений и свойство $(\Gamma^{0,0,0}, \widetilde{I}_k, k = 1 \dots m)$ (см. определение 4.2) при этом являются достаточными условиями для выполнения принципа плотности.

Список литературы

1. Wazewski A. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. 1962. Vol. 10. №1. P. 11–15.
2. Булгаков А.И. Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №11. С. 1872–1878.
3. Bressan A. On a bang-bang principle for nonlinear systems // Boll. Unione Math. Italiana, suppl. 1980. Vol. 1. P. 53–59.
4. Железцов Н.А. Метод точечного преобразования и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с «комбинированным» трением // ПММ. 1949. Т. 13. № 1. С. 3–40.
5. Забрейко П.П., Красносельский М.А., Лифшиц Е.Л. Осциллятор на упруго-пластическом элементе // ДАН СССР. 1970. Т. 190. №2. С. 266–268.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.Н. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
7. Тихонов А.Н. Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 1. №8. С. 1–25.
8. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
9. Борисович Б.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
10. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
11. Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н. Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. № 1. С. 3–20.
12. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений с невыпуклыми образами и функционально-дифференциальные включения // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №10. С. 1659–1670.
13. Plis A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. 1963. Vol. 11. №6. P. 369–370.
14. Turowicz A. Remarque sur la definition des quasitrajectoires d'une system de commande nonlineaire // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. 1963. Vol. 11. №6. P. 367–368.
15. Пучков Н.П., Булгаков А.И., Григоренко А.А., Коробко А.И., Корчагина Е.В., Мачина А.Н., Филиппова О.В., Шлыкова И.В. О некоторых задачах функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2008. Т. 14. №4. С. 947–974.
16. Финогенко И.А. О скользящих режимах регулируемых разрывных систем с последействием // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. №4. С. 19–26.
17. Булгаков А.И., Васильев В.В., Ефремов А.А. О принципе плотности для функционально-дифференциального включения нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2001. Т. 6. Вып. 3. С. 308–315.

Поступила в редакцию 01.02.2014

Булгаков Александр Иванович, д. ф.-м. н., профессор, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Филиппова Ольга Викторовна, к. ф.-м. н., старший преподаватель, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

A. I. Bulgakov, O. V. Filippova

The functional differential inclusions with impulses and with the right-hand side not necessarily convex-valued with respect to switching

Keywords: functional differential inclusion, convex-valued with respect to switching, generalized solution, the near-realization and realization of the distance to a given summable function by the set of generalized solutions, a-priori boundedness.

MSC: 34K15

The Cauchy problem for the functional differential inclusion with Volterra's multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching and with impulses is considered. For this problem, the definition of a generalized solution is introduced, and the questions of existence and extendibility of generalized solutions are studied. Notions of a near-realization and realization of the distance to an arbitrary summable function by the set of generalized solutions are formulated. For a set of generalized solutions of functional differential inclusions with impulses and with multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching, estimations are found similar to A.F. Filippov's estimations. The generalized principle of density is proved.

REFERENCES

1. Wazewski A. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 11–15.
2. Bulgakov A.I. Functional-differential inclusions with nonconvex right side, *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 11, pp. 1872–1878 (in Russian).
3. Bressan A. On a bang-bang principle for nonlinear systems, *Boll. Unione Math. Italiana, suppl.*, 1980, vol. 1, pp. 53–59.
4. Zheleztsov N.A. The method of point transformation and the problem of the forced vibrations of an oscillator with combined friction, *American Mathematical Society*, 1951, 49 p.
5. Zabreiko P.P., Krasnosel'skii M.A., Lifshits E.L. Elastic-plastic oscillator, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 2, pp. 266–268 (in Russian).
6. Kantorovich L.V., Akilov G.N. *Funktsional'nyi analiz* (Function analysis), Moscow: Nauka, 1984, 752 p.
7. Tikhonov A.N. Functional equations of Volterra's type and their applications to certain problems of mathematical physics, *Byulleten' Moskovskogo universiteta. Sektsiya A*, 1938, vol. 1, no. 8, pp. 1–25 (in Russian).
8. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* (Theory of extremal problems), Moscow: Nauka, 1974, 480 p.
9. Borisovich B.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* (Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions), Moscow: KomKniga, 2005, 216 p.
10. Fillipov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous righthand side), Moscow: Nauka, 1985, 224 p.
11. Bulgakov A.I., Belyaeva O.P., Machina A.N. Functional-differential inclusion with multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2005, no. 1, pp. 3–20 (in Russian).
12. Bulgakov A.I. Continuous branches of multivalued mappings and functional-differential inclusions, *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 10, pp. 1659–1670 (in Russian).
13. Plis A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys.*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 369–370.
14. Turowicz A. Remarque sur la definition des quasitrajectoires d'une system de commande nonlineaire, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys.*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 367–368.
15. Puchkov N.P., Bulgakov A.I., Grigorenko A.A., Korobko A.I., Korchagina E.V., Machina A.N., Filippova O.V., Shlykova I.V. About some problems of functional differential inclusions, *Vestn. Tambov. Gos. Tekhn. Univ.*, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 947–974 (in Russian).
16. Finogenko I.A. On sliding mode controlled discontinuous systems with aftereffect, *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2004, no. 4, pp. 19–26 (in Russian).

17. Bulgakov A.I., Vasil'ev V.V., Efremov A.A. On the principle of density for functional-differential inclusions of neutral type, *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2001, vol. 6, issue 3, pp. 308–315 (in Russian).

Received 01.02.2014

Bulgakov Aleksandr Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Filippova Olga Viktorovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: philippova.olga@rambler.ru