УДК 519.651 + 517.518.823

© *В. И. Родионов*

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решение краевой задачи для простейшего уравнения теплопроводности, заданной в прямоугольнике, допускает представление в виде суммы двух слагаемых, которые являются решениями двух краевых задач: в первом случае граничные функции линейны, а во втором — начальная функция равна нулю. Эта специфика позволяет применять для численного решения обеих задач двумерные сплайны. Первая задача исследована в предыдущих работах, где получен экономичный алгоритм ее численного решения, имеющий линейную сложность вычислений. Данное обстоятельство послужило основанием для аналогичных построений при решении второй задачи. Здесь также определено конечномерное пространство сплайнов лагранжевого типа, а в качестве решения предложен оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от исходных конечных разностей, заданных на границе. Формула для невязки представляет собой сумму пяти простых слагаемых и отрицательно определенной квадратичной формы от новых конечных разностей, заданных на границе. Элементы матрицы формы выражаются через многочлены Чебышёва, матрица обратима и такова, что обратная матрица имеет трехдиагональный вид. Эта особенность позволяет получить для спектра матрицы верхние и нижние оценки и показать, что невязка ограничена константой, не зависящей от размерности N. Показано, что союзная невязка стремится к нулю с ростом N. Таким образом, полученный оптимальный сплайн следует считать псевдорешением второй задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, интерполяция, аппроксимирующий сплайн, трехдиагональная матрица, многочлены Чебышёва.

Введение

Работа развивает авторский метод построения разностных схем для решения простейших задач математической физики и продолжает цикл публикаций [1–7].

Уравнение $\mathrm{u}_t = \mathrm{c}\mathrm{u}_{\xi\xi}$, заданное в прямоугольнике, заменой переменных приводится к виду $\mathrm{a}\mathrm{u}_t = \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}$ (в терминах новых переменных из квадрата $\Pi \doteq [0,1]^2$). Пусть числа a, b — положительные, а непрерывные функции $\phi,\ \rho_0,\ \rho_1\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ таковы, что $\phi(0) = \rho_0(0),\ \phi(1) = \rho_1(0)$ и существуют производные $\rho_0'(0),\ \rho_1'(0)$.

Решение $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t,\xi)$ задачи

$$\begin{aligned} \mathrm{a}\mathrm{u}_t = \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = \rho_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \rho_1(t), \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{0}$$

представимо в виде $\mathrm{u} = \mathrm{u}^{(1)} + \mathrm{u}^{(2)}$, где $\mathrm{u}^{(1)} = \mathrm{u}^{(1)}(t,\xi)$ и $\mathrm{u}^{(2)} = \mathrm{u}^{(2)}(t,\xi)$ — это решения задач

$$\begin{aligned} \mathrm{a}\mathrm{u}_t = \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = 0, \qquad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = \widehat{\rho}_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \widehat{\rho}_1(t), \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{I}$$

и

$$\begin{aligned} \mathrm{a}\mathrm{u}_t = \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = r_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = r_1(t), \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{II}$$

соответственно. Использованы обозначения

$$r_0(t) \doteq \rho_0(0) + \rho_0'(0)\,t, \qquad r_1(t) \doteq \rho_1(0) + \rho_1'(0)\,t,$$

$$\widehat{\rho}_0(t) \doteq \rho_0(t) - r_0(t), \qquad \widehat{\rho}_1(t) \doteq \rho_1(t) - r_1(t).$$

Задача (II) исследована в работах [2, 3] (получен экономичный алгоритм численного решения), а в настоящей работе (по аналогии с этими работами) в качестве решения (псевдорешения) задачи (I) предлагается использовать оптимальный сплайн задачи

$$\big\| \mathrm{a}u_t - \mathrm{b}u_{\xi\xi} \big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma(\Pi).$$

Через $\sigma(\Pi)$ обозначено конечномерное пространство, состоящее из сплайнов (см. ниже), зависящих от коэффициентов u^i_1, $i = 1, \ldots, 2N$ (где N — это параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в квадрате П. Пусть, далее, $n \doteq N-1$, $\tau \doteq \frac{1}{2N}$, $h \doteq \frac{1}{2}$, $\theta \doteq \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \frac{\tau}{h^2} = \frac{2\mathrm{b}}{\mathrm{a}N}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Pi$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $h_j \doteq jh$, $j = 0, 1, 2$.

§ 1. Постановка задачи построения оптимального аппроксимирующего сплайна

Массив (u^i_j), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2$, называется *допустимым* для задачи (I), если:

1) $u^i_0 = \widehat{\rho}_0(\tau_i)$, $u^i_2 = \widehat{\rho}_1(\tau_i)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, 2N$;

2) $u^0_j = 0$ для $j = 0, 1, 2$.

Одномерные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\omega_\kappa(\zeta) \doteq \prod_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq\kappa}}^{2} \frac{\zeta-\alpha}{\kappa-\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \tag{1.1}$$

(такие, что $\omega_\kappa(\mu) = \delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa, \mu = 0, 1, 2$), и допустимый массив (u^i_j), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2$, порождают семейство полиномов

$$Q^k(s, \eta) \doteq \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u^{2k-2+i}_j \, \omega_i(s)\, \omega_j(\eta), \quad s, \eta \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

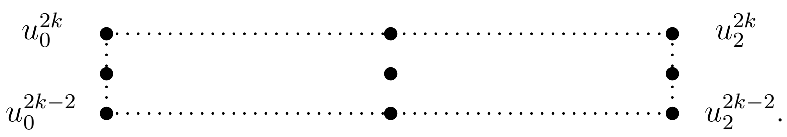
Пусть, далее, $P^k(t, \xi) \doteq Q^k(s, \eta)$, где $s \doteq \frac{t}{\tau} - 2k+2$, $\eta \doteq \frac{\xi}{h} = 2\xi$, то есть

$$P^k(t, \xi) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u^{2k-2+i}_j \, \omega_i\big(\tfrac{t}{\tau} - 2k+2\big)\, \omega_j\big(\tfrac{\xi}{h}\big).$$

Очевидно, для всех $k = 1, \ldots, N$ и $\ell, \mu = 0, 1, 2$ справедлива цепочка равенств

$$Q^k(\ell, \mu) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u^{2k-2+i}_j \prod_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq i}}^{2} \frac{\ell-\alpha}{i-\alpha} \prod_{\substack{\beta=0\\ \beta\neq j}}^{2} \frac{\mu-\beta}{j-\beta} = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u^{2k-2+i}_j \, \delta_{\ell i}\, \delta_{\mu j} = u^{2k-2+\ell}_\mu,$$

следовательно, $P^k(\tau_{2k-2+i}, h_j) = P^k\big((2k-2+i)\tau, jh\big) = Q^k(i, j) = u^{2k-2+i}_j$ для всех $k = 1, \ldots, N$, $i, j = 0, 1, 2$, то есть полином P^k является двумерным интерполяционным многочленом Лагранжа, определенным в 9 узлах полосы $\Pi^k \doteq \big\{ (t, \xi) \in \Pi \colon \tau_{2k-2} \leqslant t \leqslant \tau_{2k},\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \big\}$:



Таким образом, определена непрерывная функция $u \colon \Pi \to \mathbb{R}$ такая, что $u(t, \xi) = P^k(t, \xi)$, если $(t, \xi) \in \Pi^k$. Другими словами, допустимый массив (u^i_j), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2$, порождает сплайн, который мы называем *аппроксимирующим.* Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_1^i, $i = 1,\ldots,2N$. Это означает, что аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное пространство размерности $2N$. Обозначим его $\sigma(\Pi) = \sigma_{_N}(\Pi)$.

Определим оператор $D\colon \sigma(\Pi) \to \mathrm{L}_2(\Pi)$ следующим образом. Сплайн $u \in \sigma(\Pi)$ имеет все частные производные во всех точках множества Π, за исключением множества S меры нуль:

$$\mathrm{S} \doteq \Pi \cap \left\{ (t,\xi)\colon t = \tau_{2k} \right\}_{k=1}^{n}.$$

Пусть $(Du)(t,\xi) \doteq 0$ во всех точках множества S, а в остальных точках квадрата Π полагаем $(Du)(t,\xi) \doteq \mathrm{a} u_t - \mathrm{b} u_{\xi\xi}$. Таким образом, в качестве приближенного решения задачи (I) можно принять оптимальный аппроксимирующий сплайн $\overline{u} \in \sigma(\Pi)$ задачи

$$J \doteq \| \, Du \, \|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma_{_N}(\Pi), \tag{1.2}$$

решение которой в конечном счете сводится к поиску чисел $\overline{u}_1^i$, $i = 1,\ldots,2N$, реализующих минимум J^* функционала и порождающих оптимальное решение $\overline{u} \in \sigma_{_N}(\Pi)$.

Заметим, что наряду с функционалом (1.2) в работе применяется союзный функционал

$$J' \doteq \max_{k=1,\ldots,N} \| \, Du \, \|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi^k)}, \qquad u \in \sigma_{_N}(\Pi). \tag{1.3}$$

Для функционала (1.2) справедлива цепочка равенств

$$J = \int_{\Pi} \left[\mathrm{a} u_t - \mathrm{b} u_{\xi\xi} \right]^2 dt\, d\xi = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Pi^k} \left[\mathrm{a} P_t^k - \mathrm{b} P_{\xi\xi}^k \right]^2 dt\, d\xi = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Pi^k} f_k^2(t,\xi)\, dt\, d\xi, \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned} f_k(t,\xi) &\doteq \mathrm{a} P_t^k(t,\xi) - \mathrm{b} P_{\xi\xi}^k(t,\xi) = \mathrm{a}\, \tfrac{\partial}{\partial t}\, Q^k(s,\eta) - \mathrm{b}\, \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\, Q^k(s,\eta) = \\ &= \frac{\mathrm{a}}{\tau} \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u_j^{2k-2+i}\, \omega_i'(s)\, \omega_j(\eta) - \frac{\mathrm{b}}{h^2} \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u_j^{2k-2+i}\, \omega_i(s)\, \omega_j''(\eta) = \\ &= \frac{\mathrm{a}}{\tau} \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} u_j^{2k-2+i}\, \Omega_{ij}(s,\eta). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь и далее используем обозначение $\Omega_{ij} \doteq \Omega_{ij}(s,\eta) \doteq \omega_i'(s)\, \omega_j(\eta) - \theta\, \omega_i(s)\, \omega_j''(\eta)$.

§ 2. Безынтегральная формула для функционала невязок

Всякий допустимый массив $(\, u_j^i \,)$, $i = 0,1,\ldots,2N$, $j = 0,1,2$, порождает термы

$$x^i \doteq u_0^i - 2u_1^i + u_2^i, \qquad i = 0,1,\ldots,2N, \tag{2.1}$$

$$X^k \doteq x^{2k-2} - 2x^{2k-1} + x^{2k}, \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{2.2}$$

и граничные элементы

$$\begin{aligned} z_0^k &\doteq \tfrac{1}{2\theta} \left(u_0^{2k-2} - u_0^{2k} + u_2^{2k-2} - u_2^{2k} \right), \qquad & w_0^k &\doteq \tfrac{1}{\theta} \left(u_0^{2k-2} - 2u_0^{2k-1} + u_0^{2k} + u_2^{2k-2} - 2u_2^{2k-1} + u_2^{2k} \right), \\ z_1^k &\doteq \tfrac{1}{2\theta} \left(u_0^{2k-2} - u_0^{2k} - u_2^{2k-2} + u_2^{2k} \right), \qquad & w_1^k &\doteq \tfrac{1}{\theta} \left(u_0^{2k-2} - 2u_0^{2k-1} + u_0^{2k} - u_2^{2k-2} + 2u_2^{2k-1} - u_2^{2k} \right), \end{aligned}$$

$$k = 1,\ldots,N. \tag{2.3}$$

Применяем также фиктивные элементы $z_0^{N+1} \doteq 0$ и $w_0^{N+1} \doteq 0$. Очевидно, $x^0 = 0$. В силу (2.1) справедливо равенство $u_1^i = \frac{1}{2}\left(u_0^i - x^i + u_2^i\right)$, следовательно, формула (1.5) принимает вид

$$\frac{\tau}{\mathrm{a}} f_k(t,\xi) = \sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\,\Omega_{i0} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}\left[u_0^{2k-2+i} - x^{2k-2+i} + u_2^{2k-2+i}\right]\Omega_{i1} + \sum_{i=0}^{2} u_2^{2k-2+i}\,\Omega_{i2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\varphi_0^i + \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\varphi_1^i + \sum_{i=0}^{2} u_2^{2k-2+i}\varphi_2^i, \tag{2.4}$$

где $\varphi_0^i \doteq \varphi_0^i(s,\eta) \doteq \Omega_{i0} + \frac{1}{2}\Omega_{i1}$, $\varphi_1^i \doteq \varphi_1^i(s,\eta) \doteq -\frac{1}{2}\Omega_{i1}$, $\varphi_2^i \doteq \varphi_2^i(s,\eta) \doteq \frac{1}{2}\Omega_{i1} + \Omega_{i2}$. В силу (1.1)

$$\omega_0(\eta) = \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 - 3\eta + 2\right), \quad \omega_1(\eta) = -\eta^2 + 2\eta, \quad \omega_2(\eta) = \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 - \eta\right),$$
$$\omega_0''(\eta) = 1, \quad \omega_1''(\eta) = -2, \quad \omega_2''(\eta) = 1,$$

следовательно, из определения функций Ω_{ij} следует, что

$$\begin{aligned}
\varphi_0^i &= \omega_i'(s)\left[\omega_0(\eta) + \tfrac{1}{2}\omega_1(\eta)\right] - \theta\,\omega_i(s)\left[\omega_0''(\eta) + \tfrac{1}{2}\omega_1''(\eta)\right] = \\
&= \tfrac{1}{2}\,\omega'(s)\,(2-\eta) = \tfrac{1}{2}\,\omega_i'\big(1+u\big)\,(1-v), \\
\varphi_1^i &= -\tfrac{1}{2}\left[\omega_i'(s)\,\omega_1(\eta) - \theta\omega_i(s)\,\omega_1''(\eta)\right] = -\tfrac{1}{2}\,\omega_i'(s)\,\eta\,(2-\eta) - \theta\omega_i(s) = \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\omega_i'\big(1+u\big)\,(1-v^2) - \theta\omega_i\big(1+u\big), \\
\varphi_2^i &= \omega_i'(s)\left[\tfrac{1}{2}\,\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta)\right] - \theta\,\omega_i(s)\left[\tfrac{1}{2}\,\omega_1''(\eta) + \omega_2''(\eta)\right] = \\
&= \tfrac{1}{2}\,\omega_i'(s)\,\eta = \tfrac{1}{2}\,\omega_i'\big(1+u\big)\,(1+v),
\end{aligned}$$

где $u \doteq s-1$, $v \doteq \eta - 1$. Преобразуем первую и третью суммы формулы (2.4):

$$\sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\varphi_0^i = \tfrac{1}{2}\,(1-v)\sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\omega_i'\big(1+u\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(1-v)\Big[-\tfrac{1}{2}\left(u_0^{2k-2} - u_0^{2k}\right) + u\left(u_0^{2k-2} - 2\,u_0^{2k-1} + u_0^{2k}\right)\Big] = \tfrac{1}{4}\,\theta\,(1-v)\left[-z_0^k - z_1^k + u\,w_0^k + u\,w_1^k\right],$$

$$\sum_{i=0}^{2} u_2^{2k-2+i}\varphi_2^i = \tfrac{1}{2}\,(1+v)\sum_{i=0}^{2} u_2^{2k-2+i}\omega_i'\big(1+u\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(1+v)\Big[-\tfrac{1}{2}\left(u_2^{2k-2} - u_2^{2k}\right) + u\left(u_2^{2k-2} - 2\,u_2^{2k-1} + u_2^{2k}\right)\Big] = \tfrac{1}{4}\,\theta\,(1+v)\left[-z_0^k + z_1^k + u\,w_0^k - u\,w_1^k\right].$$

Воспользовались формулами (2.3) и легко проверяемыми равенствами

$$\omega_0\big(1+u\big) = \tfrac{1}{2}\left(u^2 - u\right), \quad \omega_1\big(1+u\big) = 1 - u^2, \quad \omega_2\big(1+u\big) = \tfrac{1}{2}\left(u^2 + u\right),$$
$$\omega_0'\big(1+u\big) = u - \tfrac{1}{2}, \quad \omega_1'\big(1+u\big) = -2u, \quad \omega_2'\big(1+u\big) = u + \tfrac{1}{2}.$$

Таким образом, формула (2.4) принимает вид

$$\tfrac{\tau}{\mathrm{a}}\, f_k(t,\xi) = -\tfrac{1}{2}\,\theta\, z_0^k + \tfrac{1}{2}\,\theta\, u\, w_0^k + \tfrac{1}{2}\,\theta\, v\, z_1^k - \tfrac{1}{2}\,\theta\, u v\, w_1^k + \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\varphi_1^i. \tag{2.5}$$

Обозначим последнюю сумму через σ. Поскольку $\varphi_1^i = -\frac{1}{2}\,\omega_i'\big(1+u\big)\,(1-v^2) - \theta\,\omega_i\big(1+u\big)$, то $\sigma = -\frac{1}{2}\,(1-v^2)\,\sigma_0 - \theta\sigma_1$, где

$$\sigma_0 \doteq \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\omega_i'\big(1+u\big) = \left(u - \tfrac{1}{2}\right)x^{2k-2} - u\left[x^{2k-2} + x^{2k} - X^k\right] + \left(u + \tfrac{1}{2}\right)x^{2k} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,x^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\,x^{2k} + u\,X^k.$$

$$\sigma_1 \doteq \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\omega_i(1{+}u) = \tfrac{1}{2}\left(u^2{-}u\right)x^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\left(1{-}u^2\right)\left[\,x^{2k-2}{+}\,x^{2k}{-}\,X^k\,\right] + \tfrac{1}{2}\left(u^2{+}u\right)x^{2k} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(1{-}u)\,x^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\,(1{+}u)\,x^{2k} - \tfrac{1}{2}\,(1{-}u^2)\,X^k.$$

(Для исключения величин x^{2k-1} воспользовались формулой (2.2).) Следовательно,

$$\sigma = \tfrac{1}{4}\left[\,(1{-}v^2) - 2\theta(1{-}u)\,\right]x^{2k-2} - \tfrac{1}{4}\left[\,(1{-}v^2) + 2\theta(1{+}u)\,\right]x^{2k} - \tfrac{1}{2}\left[\,u\,(1{-}v^2) - \theta(1{-}u^2)\,\right]X^k,$$

а формула (2.5) принимает вид $f_k(t,\xi) = \frac{\mathrm{a}}{\tau}\,F_k(u,v)$, где

$$F_k(u,v) \doteq -\tfrac{1}{2}\,\theta\,z_0^k + \tfrac{1}{2}\,\theta\,u\,w_0^k + \tfrac{1}{2}\,\theta\,v\,z_1^k - \tfrac{1}{2}\,\theta\,uv\,w_1^k +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left[\,(1{-}v^2) - 2\theta(1{-}u)\,\right]x^{2k-2} - \tfrac{1}{4}\left[\,(1{-}v^2) + 2\theta(1{+}u)\,\right]x^{2k} - \tfrac{1}{2}\left[\,u\,(1{-}v^2) - \theta(1{-}u^2)\,\right]X^k.$$

(Поскольку $u = s-1$, $v = \eta-1$ и $s = \frac{t}{\tau} - 2k{+}2$, $\eta = 2\xi$, то $u = \frac{t}{\tau} - 2k{+}1$, $v = 2\xi{-}1$.)
Таким образом, для функционала (1.4) справедливо равенство $J = \sum\limits_{k=1}^{N} J^k$, где

$$J^k \doteq \int_{\Pi^k} f_k^2(t,\xi)\,dt\,d\xi = \frac{\mathrm{a}^2}{\tau^2}\int_{(2k-2)\tau}^{2k\tau}\int_0^1 F_k^2(u,v)\,dt\,d\xi = \frac{\mathrm{a}^2}{2\tau}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F_k^2(u,v)\,du\,dv. \tag{2.6}$$

Имеет место представление

$$F_k(u,v) = \tfrac{1}{2}\left[\,-F_{k1}(u,v) + u\,F_{k2}(u,v) + v\,F_{k3}(u,v) - uv\,F_{k4}(u,v)\,\right],$$

где

$$F_{k1}(u,v) \doteq \theta\left[\,x^{2k-2}{+}\,x^{2k}{+}\,z_0^k\,\right] - \tfrac{1}{2}\,(1{-}v^2)\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}\,\right] - \theta\,(1{-}u^2)\,X^k,$$

$$F_{k2}(u,v) \doteq \theta\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}{+}\,w_0^k\,\right] - (1{-}v^2)\,X^k, \qquad F_{k3}(u,v) \doteq \theta\,z_1^k, \qquad F_{k4}(u,v) \doteq \theta\,w_1^k.$$

Полиномы $F_{k1}(u,v)$ и $F_{k2}(u,v)$ — четные функции по обеим переменным, следовательно,

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\,J^k = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\,-F_{k1}(u,v) + u\,F_{k2}(u,v) + v\,F_{k3}(u,v) - uv\,F_{k4}(u,v)\,\Big]^2 du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\,F_{k1}^2(u,v) + u^2F_{k2}^2(u,v) + v^2F_{k3}^2(u,v) + u^2v^2F_{k4}^2(u,v)\,\Big]\,du\,dv =$$

$$= \Big(\,4\theta^2\left[\,x^{2k-2}{+}\,x^{2k}{+}\,z_0^k\,\right]^2 - \tfrac{8}{3}\,\theta\left[\,x^{2k-2}{+}\,x^{2k}{+}\,z_0^k\,\right]\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}\,\right] + \tfrac{8}{15}\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}\,\right]^2 -$$

$$- \tfrac{16}{3}\,\theta^2\left[\,x^{2k-2}{+}\,x^{2k}{+}\,z_0^k\,\right]X^k + \tfrac{16}{9}\,\theta\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}\,\right]X^k + \tfrac{32}{15}\,\theta^2\left[\,X^k\,\right]^2\Big) +$$

$$+ \Big(\,\tfrac{4}{3}\,\theta^2\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}{+}\,w_0^k\,\right]^2 - \tfrac{16}{9}\,\theta\left[\,x^{2k-2}{-}\,x^{2k}{+}\,w_0^k\,\right]X^k + \tfrac{32}{45}\left[\,X^k\,\right]^2\Big) +$$

$$+ \tfrac{4}{3}\,\theta^2\left[\,z_1^k\,\right]^2 + \tfrac{4}{9}\,\theta^2\left[\,w_1^k\,\right]^2. \tag{2.7}$$

Так как $J = \sum\limits_{k=1}^{N} J^k$, то в итоге мы получили безынтегральное представление для функционала (1.4) (значит, и для функционала (1.2)). Теперь он является квадратичной формой от величин (2.1)–(2.3) (исключая величины вида x^{2k-1}). Поскольку $x^0 = 0$, а термы (2.3), входящие в формулу (2.7), постоянны (как граничные элементы), то функционал в конечном счете является квадратичной функцией от переменных x^{2k}, X^k, $k = 1,\ldots,N$ (определен в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$). Для нахождения минимума функционала необходимо вычислить его частные производные.

§ 3. Частные производные функционала невязок

Для любого $k=1,\dots,N$ справедливо

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial J}{\partial X^k}=\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial J^k}{\partial X^k}=-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\big[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\big]+$$
$$+\tfrac{16}{9}\,\theta\big[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\big]+\tfrac{64}{15}\,\theta^2X^k-\tfrac{16}{9}\,\theta\big[\,x^{2k-2}-x^{2k}+w_0^k\,\big]+\tfrac{64}{45}\,X^k=$$
$$=-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\big[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\big]-\tfrac{16}{9}\,\theta w_0^k+\tfrac{64}{45}\,(\,1+3\theta^2\,)\,X^k. \quad (3.1)$$

Для любого $k=1,\dots,n$ имеют место равенства

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial J}{\partial x^{2k}}=\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\Big[\,\frac{\partial J^k}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial J^{k+1}}{\partial x^{2k}}\,\Big]=$$
$$=8\theta^2\big[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\big]+\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\big]-\tfrac{16}{15}\big[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\big]-$$
$$-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^k-\tfrac{16}{9}\,\theta X^k-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[\,x^{2k-2}-x^{2k}+w_0^k\,\big]+\tfrac{16}{9}\,\theta X^k+$$
$$+8\theta^2\big[\,x^{2k}+x^{2k+2}+z_0^{k+1}\,\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2k}-x^{2k+2}\,\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2k}+x^{2k+2}+z_0^{k+1}\,\big]+\tfrac{16}{15}\big[\,x^{2k}-x^{2k+2}\,\big]-$$
$$-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^{k+1}+\tfrac{16}{9}\,\theta X^{k+1}+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[\,x^{2k}-x^{2k+2}+w_0^{k+1}\,\big]-\tfrac{16}{9}\,\theta X^{k+1}=$$
$$=\tfrac{8}{3}\,\theta(\,1+3\theta\,)\,z_0^k-\tfrac{8}{3}\,\theta(\,1-3\theta\,)\,z_0^{k+1}-\tfrac{8}{3}\,\theta^2w_0^k+\tfrac{8}{3}\,\theta^2w_0^{k+1}-$$
$$-\tfrac{16}{3}\big(\,\tfrac{1}{5}-\theta^2\big)\,x^{2k-2}+\tfrac{32}{3}\big(\,\tfrac{1}{5}+2\theta^2\big)\,x^{2k}-\tfrac{16}{3}\big(\,\tfrac{1}{5}-\theta^2\big)\,x^{2k+2}-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^k-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^{k+1}. \quad (3.2)$$

Наконец,

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial J}{\partial x^{2N}}=\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\frac{\partial J^N}{\partial x^{2N}}=8\theta^2\big[\,x^{2n}+x^{2N}+z_0^N\,\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2n}-x^{2N}\,\big]+\tfrac{8}{3}\,\theta\big[\,x^{2n}+x^{2N}+z_0^N\,\big]-$$
$$-\tfrac{16}{15}\big[\,x^{2n}-x^{2N}\,\big]-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^N-\tfrac{16}{9}\,\theta X^N-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[\,x^{2n}-x^{2N}+w_0^N\,\big]+\tfrac{16}{9}\,\theta X^N=$$
$$=\tfrac{8}{3}\,\theta(\,1+3\theta\,)\,z_0^N-\tfrac{8}{3}\,\theta^2w_0^N-\tfrac{16}{3}\big(\,\tfrac{1}{5}-\theta^2\big)\,x^{2n}+\tfrac{16}{3}\big(\,\tfrac{1}{5}+\theta+2\theta^2\big)\,x^{2N}-\tfrac{16}{3}\,\theta^2X^N. \quad (3.3)$$

§ 4. Система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Далее полагаем, что $\theta\leqslant\frac{1}{3}$, то есть $N\geqslant\frac{6\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$. Тогда определены числа

$$y\doteq-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},\qquad a\doteq-\frac{\alpha+\beta+2\theta}{\alpha-\beta},\qquad b\doteq-\frac{\alpha+\beta-2\theta}{\alpha-\beta}, \quad (4.1)$$

где

$$\alpha\doteq\tfrac{2}{5}+\theta^2>0,\qquad \beta\doteq\tfrac{1}{2}\,\theta^2+2\theta\gamma>0,\qquad \gamma\doteq\tfrac{5}{4}\,\theta/(1+3\theta^2)>0. \quad (4.2)$$

Действительно, легко проверить, что $\alpha-\beta=\frac{1}{10}\,(\,4-8\theta^2+15\theta^4\,)/(1+3\theta^2)>0$.

Справедливы равенства

$$12\theta^2\gamma=5\theta-4\gamma,\qquad a+b=2y,\qquad \tfrac{1}{4}\,(\alpha-\beta)^2(\,ab-1\,)=\alpha\beta-\theta^2=\tfrac{1}{15}\,\beta+\tfrac{1}{2}\,\theta^4. \quad (4.3)$$

Первое равенство следует непосредственно из определения (4.2) числа γ, второе равенство очевидно, третье равенство носит элементарный характер, а что касается четвертого, то

$$\big(\,\alpha-\tfrac{1}{15}\big)\,\beta=\big(\,\tfrac{1}{3}+\theta^2\big)\,\big(\,\tfrac{1}{2}\,\theta^2+2\theta\gamma\big)=\tfrac{1}{6}\,\theta^2+\tfrac{1}{2}\,\theta^4+\tfrac{2}{3}\,\theta\,(1+3\theta^2)\,\gamma=\tfrac{1}{6}\,\theta^2+\tfrac{1}{2}\,\theta^4+\tfrac{5}{6}\,\theta^2=\theta^2+\tfrac{1}{2}\,\theta^4.$$

Справедливы неравенства

$$ab > 1, \qquad a < y < -1 < b < 0. \tag{4.4}$$

Действительно, первая оценка имеет место в силу (4.3), а для остальных выполнено

$$y - a = \frac{2\theta}{\alpha-\beta} > 0, \quad 1 + y = -\frac{2\beta}{\alpha-\beta} < 0, \quad 1 + b = 2\,\frac{\theta-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{2\theta\,(1-3\theta\,) + 3\theta^3(2-\theta\,)}{(\alpha-\beta)\,(1+3\theta^2)} > 0.$$

Оценка $b < 0$ следует из неравенств $ab > 1$ и $a < -1$.

Приравняем производные (3.1) нулю, тогда для всех $k = 1, \ldots, N$ справедливо равенство

$$X^k = \gamma\,\big(3\theta\left[x^{2k-2} + x^{2k} + z_0^k\right] + w_0^k\big). \tag{4.5}$$

Если $\partial J/\partial x^{2k} = 0,\ k = 1, \ldots, n,$ то в силу (3.2) имеет место равенство

$$0 = \theta(1+3\theta)\,z_0^k - \theta(1-3\theta)\,z_0^{k+1} - \theta^2 w_0^k + \theta^2 w_0^{k+1} -$$

$$- 2\left(\tfrac{1}{5} - \theta^2\right)x^{2k-2} + 4\left(\tfrac{1}{5} + 2\theta^2\right)x^{2k} - 2\left(\tfrac{1}{5} - \theta^2\right)x^{2k+2} - 2\theta^2 X^k - 2\theta^2 X^{k+1}. \tag{4.6}$$

Исключим из него величины X^k и X^{k+1}. В силу (4.5) и первого равенства (4.3) справедливо

$$2\theta^2 X^k = \tfrac{1}{2}\,\theta\,(5\theta-4\gamma\,)\left[x^{2k-2} + x^{2k} + z_0^k\right] + 2\theta^2\gamma\,w_0^k,$$

$$2\theta^2 X^{k+1} = \tfrac{1}{2}\,\theta\,(5\theta-4\gamma\,)\left[x^{2k} + x^{2k+2} + z_0^{k+1}\right] + 2\theta^2\gamma\,w_0^{k+1},$$

поэтому после приведения подобных членов равенство (4.6) принимает вид

$$0 = (\,\beta + \theta\,)\,z_0^k + (\,\beta - \theta\,)\,z_0^{k+1} - \theta^2(1+2\gamma)\,w_0^k + \theta^2(1-2\gamma)\,w_0^{k+1} -$$

$$- (\alpha-\beta)\,x^{2k-2} + 2\,(\alpha+\beta)\,x^{2k} - (\alpha-\beta)\,x^{2k+2}.$$

Значит,

$$x^{2k-2} + 2y\,x^{2k} + x^{2k+2} = v^k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Здесь и далее используем обозначения

$$V^k \doteq (\,\beta + \theta\,)\,z_0^k + (\,\beta - \theta\,)\,z_0^{k+1} - \theta^2(1+2\gamma)\,w_0^k + \theta^2(1-2\gamma)\,w_0^{k+1}, \qquad v^k \doteq V^k/(\alpha-\beta). \tag{4.8}$$

Если $\partial J/\partial x^{2N} = 0$, то в силу (3.3), (4.5) и первого равенства (4.3) справедливо

$$\theta(1+3\theta)\,z_0^N - \theta^2 w_0^N - 2\left(\tfrac{1}{5} - \theta^2\right)x^{2n} + 2\left(\tfrac{1}{5} + \theta + 2\theta^2\right)x^{2N} = 2\theta^2 X^N =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\theta\,(5\theta-4\gamma\,)\left[x^{2n} + x^{2N} + z_0^N\right] + 2\theta^2\gamma\,w_0^N,$$

поэтому после приведения подобных членов равенство принимает вид

$$(\alpha-\beta)\,x^{2n} - (\alpha+\beta+2\theta)\,x^{2N} = (\,\beta + \theta\,)\,z_0^N - \theta^2(1+2\gamma)\,w_0^N.$$

Значит, $x^{2n} + a\,x^{2N} = v^N$. (Здесь мы используем фиктивные элементы $z_0^{N+1} = 0$ и $w_0^{N+1} = 0$, определенные в (2.3), и величины V^N и v^N, определенные в (4.8).) Таким образом, последнее равенство и равенства (4.5), (4.7) порождают итоговую разностную схему

$$\left\{\begin{array}{l} x^{2k-2} + 2y\,x^{2k} + x^{2k+2} = v^k, \qquad k = 1, \ldots, n, \\ x^{2n} + a\,x^{2N} = v^N, \\ X^k = \gamma\,\big(3\theta\left[x^{2k-2} + x^{2k} + z_0^k\right] + w_0^k\big), \quad k = 1, \ldots, N. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Первая совокупность уравнений (4.9) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x^{2m}, причем $x^0 = 0$. Матрица системы имеет трехдиагональный вид с доминирующей диагональю (так как $|y| > 1$ и $|a| > 1$, см. (4.4)), следовательно, система имеет единственное решение, которое легко найти методом прогонки. После этого из второй совокупности уравнений (4.9) явно вычисляются все значения X^k. Полученные значения позволяют в конечном счете найти искомые величины $\overline{u}_1^i$, $i = 1, \ldots, 2N$ (см. (2.1)–(2.2)). Ниже мы установим, что для решений первой системы (4.9) справедливы явные формулы (5.6).

Метод прогонки имеет линейную сложность вычислений и, безусловно, наиболее эффективен в прикладной реализации. Однако явная формула (5.6) имеет важное теоретическое значение: она позволяет в явном виде получить минимальное значение J^* функционала (1.2) и показать, что в случае гладких граничных функций величина J^* ограничена константой, не зависящей от размерности N, а невязка союзного функционала (1.3) стремится к нулю с ростом N. Эти исследования и составляют оставшуюся часть настоящей работы.

§ 5. Вспомогательные утверждения о многочленах Чебышёва

Совокупность $\{U_n(x),\ x \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, состоящую из многочленов Чебышёва 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0$, $U_0(x) \doteq 1$, $U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x) = 2x\, U_n(x)$. Числа $a, b, x \in \mathbb{R}$ такие, что $a + b = 2x$, порождают числа

$$P_n \doteq P_n(x) \doteq U_n(x) - b\, U_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

и матрицы $\overline{A}(x) = \big(\overline{A}_{ki}(x)\big)$ и $\overline{B}(x) = \big(\overline{B}_{ki}(x)\big)$, $k, i = 0, 1, \ldots, n$, порядка N такие, что

$$\overline{A}_{ki}(x) \doteq \begin{cases} a, & \text{если } (k,i) = (0,0), \\ \delta_{k,i+1} + 2x\,\delta_{ki} + \delta_{k,i-1}, & \text{если } (k,i) \neq (0,0), \end{cases}$$

$$\overline{B}_{ki}(x) \doteq (-1)^{k+i} \begin{cases} P_k(x)\, U_{n-i}(x), & \text{если } k \leqslant i, \\ U_{n-k}(x)\, P_i(x), & \text{если } k \geqslant i. \end{cases}$$

Т е о р е м а 1 (см. [3], теорема 2). *Имеют место равенства*

$$\overline{A}(x)\, \overline{B}(x) = P_{\scriptscriptstyle N}(x)\, E_n^0 = \overline{B}(x)\, \overline{A}(x),$$

где E_n^0 — единичная матрица порядка N с элементами $(E_n^0)_{ki} \doteq \delta_{ki}$, $k, i = 0, 1, \ldots, n$.

Если $\delta_{ki}^{\geqslant}$ — символ Кронекера такой, что $\delta_{ki}^{\geqslant} = 0$ при $k < i$ и $\delta_{ki}^{\geqslant} = 1$ при $k \geqslant i$, то, очевидно,

$$\overline{B}_{ki}(x) = (-1)^{k+i} \left[\, \delta_{ik}^{\geqslant} P_k(x)\, U_{n-i}(x) + \delta_{k-1,i}^{\geqslant} U_{n-k}(x)\, P_i(x) \,\right], \tag{5.2}$$

$$\overline{B}_{ki}(x) = (-1)^{k+i} \left[\, \delta_{i-1,k}^{\geqslant} P_k(x)\, U_{n-i}(x) + \delta_{ki}^{\geqslant} U_{n-k}(x)\, P_i(x) \,\right]. \tag{5.3}$$

Заметим еще, что в силу (5.1) имеет место равенство

$$P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) = 2x\, P_n(x). \tag{5.4}$$

Справедливы формулы

$$P_k(x) = a\, U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x),$$

$$a\, P_k(x) - P_{k+1}(x) = (\,1 - ab\,)\, U_{k-1}(x), \qquad P_k(x) - b\, P_{k+1}(x) = (\,1 - ab\,)\, U_k(x). \tag{5.5}$$

Действительно, так как $a+b=2x$, то $P_k(x)=U_k(x)-b\,U_{k-1}(x)=a\,U_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)$,

$$a\,P_k(x)-P_{k+1}(x)=a\,U_k(x)-ab\,U_{k-1}(x)-U_{k+1}(x)+b\,U_k(x)=$$
$$=(\,a+b\,)\,U_k(x)-ab\,U_{k-1}(x)-2xU_k(x)+U_{k-1}(x)=(\,1-ab\,)\,U_{k-1}(x),$$
$$P_k(x)-b\,P_{k+1}(x)=a\,U_{k-1}(x)-U_{k-2}(x)-ab\,U_k(x)+b\,U_{k-1}(x)=$$
$$=(\,a+b\,)\,U_{k-1}(x)-ab\,U_k(x)-2xU_{k-1}(x)+U_k(x)=(\,1-ab\,)\,U_k(x).$$

Для решения первой системы (4.9) введем в рассмотрение вспомогательные переменные $x_k \doteq x^{2N-2k}$, $k=0,1,\ldots,N$, $v_k \doteq v^{N-k}$, $k=0,1,\ldots,n$, тогда

$$\begin{cases} a x_0 + x_1 = v_0, \\ x_{k-1}+2y\,x_k + x_{k+1} = v_k, \quad k=1,\ldots,n-1, \\ x_{n-1}+2y\,x_n = v_n \end{cases}$$

(воспользовались тем, что $x_{\scriptscriptstyle N}=x^0=0$). Пусть $X\doteq\mathrm{col}\,(x_0,\ldots,x_n)$, $V\doteq\mathrm{col}\,(v_0,\ldots,v_n)$, тогда система принимает вид $\overline{A}(y)X=V$. В силу теоремы 1 имеет место равенство $P_{\scriptscriptstyle N}(y)X=\overline{B}(y)V$, а так как $b\in[-1,1]$ (см. (4.4)), то в силу следствия 3 [3] справедливо $P_{\scriptscriptstyle N}(y)\neq 0$, следовательно,

$$x_k=\frac{1}{P_{\scriptscriptstyle N}(y)}\sum_{i=0}^{n}\overline{B}_{ki}(y)\,v_i, \qquad k=0,1,\ldots,n.$$

Возвраящась к исходным переменным, получаем итоговую формулу

$$x^{2k}=\frac{1}{P_{\scriptscriptstyle N}}\sum_{i=1}^{N}\overline{B}_{\scriptscriptstyle N-k,N-i}\,v^i, \qquad k=1,\ldots,N. \tag{5.6}$$

Здесь и далее мы применяем обозначения $U_m\doteq U_m(y)$, $P_m\doteq P_m(y)$, $B_{ki}\doteq B_{ki}(y)$.

§ 6. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна

Пусть J^* — значение функционала J на решении системы (4.9). Другими словами, J^* — это минимальное значение функционала (1.2) в пространстве аппроксимирующих сплайнов $\sigma(\Pi)$. Зафиксируем это решение и подставим его в формулу (2.7). Тогда

$$J^*=\sum_{k=1}^{N}J^k, \qquad \tfrac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\,J^k=I^k+I_0^k+I_1^k+I_2^k, \tag{6.1}$$

где

$$I^k\doteq\tfrac{4}{3}\,\theta^2\big[z_1^k\big]^2+\tfrac{4}{9}\,\theta^2\big[w_1^k\big]^2, \qquad I_0^k\doteq\tfrac{32}{15}\,\theta^2\big[X^k\big]^2+\tfrac{32}{45}\big[X^k\big]^2, \tag{6.2}$$
$$I_1^k\doteq-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\big]X^k+\tfrac{16}{9}\,\theta\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]X^k-\tfrac{16}{9}\,\theta\big[x^{2k-2}-x^{2k}+w_0^k\big]X^k,$$
$$I_2^k\doteq4\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\big]^2-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\big]\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]+\tfrac{8}{15}\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]^2+$$
$$+\tfrac{4}{3}\,\theta^2\big[x^{2k-2}-x^{2k}+w_0^k\big]^2.$$

Легко убедиться, что

$$I_1^k=-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\big]X^k-\tfrac{16}{9}\,\theta w_0^kX^k=-\tfrac{16}{9}\,\theta\Big(3\theta\big[x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\big]+w_0^k\Big)X^k,$$

$$I_2^k=4\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}\big]^2+8\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}\big]z_0^k+4\theta^2\big[z_0^k\big]^2-\tfrac{8}{3}\,\theta\big[x^{2k-2}+x^{2k}\big]\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]-$$

$$-\tfrac{8}{3}\,\theta\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]z_0^k+\tfrac{8}{15}\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]^2+\tfrac{4}{3}\,\theta^2\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]^2+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]w_0^k+\tfrac{4}{3}\,\theta^2\left[w_0^k\right]^2.$$

В силу (4.9) и третьей формулы (4.2) справедливы равенства

$$I_0^k=\tfrac{32}{45}\left[\,(1+3\theta^2)\,X^k\,\right]X^k=\tfrac{32}{45}\left[\,(1+3\theta^2)\,\gamma\left(3\theta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\right]+w_0^k\right)\right]X^k=$$

$$=\tfrac{8}{9}\,\theta\left(3\theta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\right]+w_0^k\right)X^k,$$

а следующая цепочка равенств завершается ссылкой на первую формулу (4.3):

$$I_0^k+I_1^k=-\tfrac{8}{9}\,\theta\left(3\theta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}+z_0^k\,\right]+w_0^k\right)X^k=-\tfrac{8}{9}\,\theta\gamma\left(3\theta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]+3\theta z_0^k+w_0^k\right)^2=$$

$$=-8\,\theta^3\gamma\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]^2-16\,\theta^3\gamma\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]z_0^k-8\,\theta^3\gamma\left[\,z_0^k\right]^2-$$

$$-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]w_0^k-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\,z_0^k\,w_0^k-\tfrac{8}{9}\,\theta\gamma\left[\,w_0^k\right]^2=$$

$$=-\tfrac{2}{3}\,\theta\,(\,5\theta-4\gamma\,)\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]^2-\tfrac{4}{3}\,\theta\,(\,5\theta-4\gamma\,)\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]z_0^k-\tfrac{2}{3}\,\theta\,(\,5\theta-4\gamma\,)\left[\,z_0^k\right]^2-$$

$$-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]w_0^k-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\,z_0^k\,w_0^k-\tfrac{8}{9}\,\theta\gamma\left[\,w_0^k\right]^2.$$

Следовательно, для суммы $I_0^k+I_1^k+I_2^k$ имеет место равенство $I_0^k+I_1^k+I_2^k=\varsigma^k+\sigma_1^k+\sigma_2^k$, где

$$\varsigma^k\doteq\tfrac{4}{3}\,\beta\left[\,z_0^k\right]^2-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\,z_0^k\,w_0^k+\tfrac{4}{9}\,\theta(\,3\theta-2\gamma\,)\left[\,w_0^k\right]^2,$$

$$\sigma_1^k\doteq\tfrac{8}{3}\,\beta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]z_0^k-\tfrac{8}{3}\,\theta\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]z_0^k+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]w_0^k-\tfrac{16}{3}\,\theta^2\gamma\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]w_0^k,$$

$$\sigma_2^k\doteq\tfrac{4}{3}\,\beta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]^2-\tfrac{8}{3}\,\theta\left[\,x^{2k-2}+x^{2k}\,\right]\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]+\tfrac{4}{3}\,\alpha\left[\,x^{2k-2}-x^{2k}\,\right]^2, \qquad (6.3)$$

а для функционала (6.1) имеет место представление

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\,J^*=\sum_{k=1}^N I^k+\sum_{k=1}^N\varsigma^k+\sum_{k=1}^N\sigma_1^k+\sum_{k=1}^N\sigma_2^k. \qquad (6.4)$$

Преобразуем третье слагаемое формулы (6.4):

$$\frac{3}{8}\,\sum_{k=1}^N\sigma_1^k=(\,\beta-\theta\,)\sum_{k=1}^N x^{2k-2}z_0^k+(\,\beta+\theta\,)\sum_{k=1}^N x^{2k}z_0^k+$$

$$+\theta^2(1-2\gamma\,)\sum_{k=1}^N x^{2k-2}w_0^k-\theta^2(1+2\gamma\,)\sum_{k=1}^N x^{2k}w_0^k=$$

$$=(\,\beta-\theta\,)\sum_{k=0}^n x^{2k}z_0^{k+1}+(\,\beta+\theta\,)\sum_{k=1}^N x^{2k}z_0^k+$$

$$+\theta^2(1-2\gamma\,)\sum_{k=0}^n x^{2k}w_0^{k+1}-\theta^2(1+2\gamma\,)\sum_{k=1}^N x^{2k}w_0^k.$$

В первой и третьей суммах заменили индекс k на $k+1$. Поскольку $x^0=0$, $z_0^{N+1}=0$ и $w_0^{N+1}=0$, то все суммирования можно вести от 1 до N, следовательно,

$$\sum_{k=1}^N\sigma_1^k=\frac{8}{3}\,\sum_{k=1}^N x^{2k}\Big[\,(\beta-\theta)\,z_0^{k+1}+(\beta+\theta)\,z_0^k+\theta^2(1-2\gamma)\,w_0^{k+1}-\theta^2(1+2\gamma)\,w_0^k\Big]=\frac{8}{3}\,\sum_{k=1}^N x^{2k}V^k$$

(см. определения (4.8)). Преобразуем четвертое слагаемое формулы (6.4):

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{N}\sigma_2^k=\left(\beta-2\theta+\alpha\right)\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k-2}\right]^2+2\left(\beta-\alpha\right)\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}+\left(\beta+2\theta+\alpha\right)\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k}\right]^2=$$

$$=-b\left(\alpha-\beta\right)\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k-2}\right]^2-2\left(\alpha-\beta\right)\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}-a\left(\alpha-\beta\right)\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k}\right]^2.$$

Воспользовались определением (4.1) чисел a и b. Тогда

$$-\frac{3}{4\left(\alpha-\beta\right)}\sum_{k=1}^{N}\sigma_2^k=b\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k-2}\right]^2+2\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}+a\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k}\right]^2=$$

$$=b\sum_{k=0}^{n}\left[x^{2k}\right]^2+2\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}+a\sum_{k=1}^{N}\left[x^{2k}\right]^2=2y\sum_{k=1}^{n}\left[x^{2k}\right]^2+2\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}+a\left[x^{2N}\right]^2.$$

Сначала мы заменили в первой сумме индекс k на $k+1$, а затем воспользовались равенствами $x^0=0$ и $a+b=2y$ (см. (4.3)). Значит, в соответствии с (4.9) имеет место цепочка равенств

$$-\frac{3}{4\left(\alpha-\beta\right)}\sum_{k=1}^{N}\sigma_2^k-2\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}-a\left[x^{2N}\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\left[2y\,x^{2k}\right]x^{2k}=\sum_{k=1}^{n}\left[v^k-x^{2k-2}-x^{2k+2}\right]x^{2k},$$

поэтому

$$-\frac{3}{4\left(\alpha-\beta\right)}\sum_{k=1}^{N}\sigma_2^k-a\left[x^{2N}\right]^2-\sum_{k=1}^{n}v^kx^{2k}=2\sum_{k=1}^{N}x^{2k-2}x^{2k}-\sum_{k=1}^{n}x^{2k-2}x^{2k}-\sum_{k=1}^{n}x^{2k+2}x^{2k}=x^{2n}x^{2N}.$$

В последней сумме мы заменили индекс k на $k-1$, а затем произвели массовые сокращения, учитывая равенство $x^0=0$. Следовательно, в силу (4.9) и (4.8) справедливо

$$-\frac{3}{4\left(\alpha-\beta\right)}\sum_{k=1}^{N}\sigma_2^k=\sum_{k=1}^{n}v^kx^{2k}+\left[x^{2n}+a\,x^{2N}\right]x^{2N}=\sum_{k=1}^{n}v^kx^{2k}+v^Nx^{2N}=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{N}V^kx^{2k},$$

поэтому $\sum\limits_{k=1}^{N}\sigma_2^k=-\frac{4}{3}\sum\limits_{k=1}^{N}V^kx^{2k}$. Значит, формула (6.4) принимает вид

$$\frac{8\tau}{\mathrm{a}^2}J^*=\sum_{k=1}^{N}I^k+\sum_{k=1}^{N}\varsigma^k+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{N}V^kx^{2k},\qquad\text{или}\qquad\frac{6\tau}{\mathrm{a}^2}J^*=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{N}\varsigma^k+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{N}I^k+\sum_{k=1}^{N}V^kx^{2k}.$$

В силу (5.6) и (4.8) справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{N}V^kx^{2k}=\frac{1}{P_N}\sum_{k=1}^{N}V^k\sum_{i=1}^{N}\overline{B}_{N-k,N-i}v^i=$$

$$=\frac{\alpha-\beta}{P_N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{B}_{N-k,N-i}v^kv^i=\frac{\alpha-\beta}{P_N}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\overline{B}_{ki}\,v^{N-k}v^{N-i}.$$

Определим в $\mathbb{R}^N$ векторы $v \doteq \mathrm{col}\,(v^N, v^n, \ldots, v^1)$, $\quad z_0 \doteq \mathrm{col}\,(z_0^1, \ldots, z_0^N)$,

$$w_0 \doteq \mathrm{col}\,(w_0^1, \ldots, w_0^N), \qquad z_1 \doteq \mathrm{col}\,(z_1^1, \ldots, z_1^N), \qquad w_1 \doteq \mathrm{col}\,(w_1^1, \ldots, w_1^N).$$

(См. определения (2.3) для чисел z_0^k, w_0^k, z_1^k, w_1^k и определение (4.8), согласно которому величины v^k также зависят от граничных элементов (2.3).) Тогда в соответствии с определением чисел τ, θ и определениями (6.3), (6.2) чисел ς^k, I^k справедливы итоговые формулы

$$\begin{aligned} J^* = \frac{4\mathrm{b}^2}{3N} \Big[\varkappa \big\langle z_0, z_0 \big\rangle - 4\gamma \big\langle z_0, w_0 \big\rangle + \varrho \big\langle w_0, w_0 \big\rangle + \\ + \big\langle z_1, z_1 \big\rangle + \tfrac{1}{3} \big\langle w_1, w_1 \big\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\theta^2} \frac{1}{P_N(y)} \big\langle \overline{B}(y) v, v \big\rangle \Big] = \\ = \frac{4\mathrm{b}^2}{3N} \Big[\varkappa \big\langle z_0, z_0 \big\rangle - 4\gamma \big\langle z_0, w_0 \big\rangle + \varrho \big\langle w_0, w_0 \big\rangle + \\ + \big\langle z_1, z_1 \big\rangle + \tfrac{1}{3} \big\langle w_1, w_1 \big\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\theta^2} \big\langle \overline{A}^{-1}(y) v, v \big\rangle \Big], \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\varkappa \doteq \theta^{-2}\beta$, $\varrho \doteq 1 - \frac{2}{3}\theta^{-1}\gamma$. Применили запись через скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, указали зависимость от параметра y и воспользовались теоремой 1.

Таким образом, в терминах введенных обозначений справедлива

Т е о р е м а 2. *Минимум J^* функционала* (1.2) *достигается на решении системы уравнений* (4.9)*, и для него имеют место представления* (6.5) *через граничные элементы* (2.3).

§ 7. Поведение невязки J^* при $N \to \infty$ в случае гладких граничных условий

Пусть $\{ J_N \}$ — это последовательность, в которой $J_N \doteq J^*$ — минимальное значение функционала (1.2), вычисленное при заданном N.

В силу следствия 2 [3] спектры матриц $\overline{A}(y)$ и $\overline{A}^{-1}(y)$ вещественные и справедливо

$$-2\,(1-y) < \Lambda_0 < \Lambda_1 < \ldots < \Lambda_n < 2\,(1+y) < 0, \quad \tfrac{1}{2\,(1+y)} < \Lambda_n^{-1} < \ldots < \Lambda_0^{-1} < -\tfrac{1}{2\,(1-y)} < 0$$

(здесь мы находимся в условиях, когда переменные c, x и β из следствия 2 [3] таковы, что $c > 0$, $x < 0$ и $\beta \in [-1, 1]$: в нашем случае $c = 1$, x — это y, а β — это b). Значит, $\big\langle \overline{A}^{-1}(y) v, v \big\rangle$ — отрицательно определенная квадратичная форма ($\big\langle \overline{A}^{-1}(y) v, v \big\rangle < 0$ для всех $v \neq 0$), поэтому

$$J_N = J^* \leqslant \tfrac{4\mathrm{b}^2}{3N} \Big[\varkappa \big\langle z_0, z_0 \big\rangle - 4\gamma \big\langle z_0, w_0 \big\rangle + \varrho \big\langle w_0, w_0 \big\rangle + \big\langle z_1, z_1 \big\rangle + \tfrac{1}{3} \big\langle w_1, w_1 \big\rangle \Big]. \tag{7.1}$$

Полагаем далее, что $\rho_0, \rho_1 \in \mathrm{C}^2[0,1]$, тогда $\widehat{\rho}_0, \widehat{\rho}_1 \in \mathrm{C}^2[0,1]$, а в силу (2.3) и формулы Тейлора при $N \to \infty$ справедливо $z_0^k = O(1)$, $w_0^k = O(N^{-1})$, $z_1^k = O(1)$, $w_1^k = O(N^{-1})$. Заметим, что эти оценки равномерны по $k = 1, \ldots, N$. Например,

$$|z_0^k| \leqslant \tfrac{\mathrm{a}}{4\mathrm{b}} \big(\max |\widehat{\rho}_0'(\cdot)| + \max |\widehat{\rho}_1'(\cdot)| \big), \qquad |w_0^k| \leqslant \tfrac{\mathrm{a}}{8\mathrm{b}N} \big(\max |\widehat{\rho}_0''(\cdot)| + \max |\widehat{\rho}_1''(\cdot)| \big).$$

(Аналогично для $|z_1^k|$ и $|w_1^k|$.) Легко убедиться, что $\varkappa = O(1)$, $\gamma = O(N^{-1})$, $\varrho = O(1)$, поэтому слагаемые, расположенные в квадратных скобках (7.1), равны $O(N)$, $O(N^{-1})$, $O(N^{-1})$, $O(N)$, $O(N^{-1})$ соответственно. Значит, $J_N = O(1)$, то есть последовательность $\{ J_N \}$ ограничена.

З а м е ч а н и е 1. В (7.1) мы исключили отрицательно определенную квадратичную форму, и есть основание полагать, что порядок аппроксимации для последовательности $\{ J_N \}$ может быть улучшен. Однако это не так. Например, если $\widehat{\rho}_0(t) = -t$, $\widehat{\rho}_1(t) = t$, то $z_0^k = w_0^k = w_1^k = 0$, $z_1^k = \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{b}}$, поэтому $v^k = 0$, а формула (6.5) принимает вид $J_N = \frac{4\mathrm{b}^2}{3N} \langle z_1, z_1 \rangle = \frac{1}{3}\,\mathrm{a}^2$ (для всех N).

Ситуацию меняет союзная невязка (1.3). Обозначим через J'_N значение функционала (1.3), вычисленное для сплайна, порожденного решением системы (4.9), и покажем, что $J'_N \to 0$.

§ 8. Поведение союзной невязки при $N \to \infty$ в случае гладких граничных условий

В соответствии с формулой (6.1) и определениями (1.3), (1.5), (2.6), (6.2), (6.3) справедливо

$$J'_N = \max_{k=1,\dots,N} J^k, \qquad \tfrac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\, J^k = I^k + I_0^k + I_1^k + I_2^k = I^k + \varsigma^k + \sigma_1^k + \sigma_2^k, \tag{8.1}$$

$$\max_{k=1,\dots,N} I^k = \max_{k=1,\dots,N} \Big(\tfrac{4}{3}\,\theta^2 \big[z_1^k\big]^2 + \tfrac{4}{9}\,\theta^2 \big[w_1^k\big]^2 \Big) = O(N^{-2}),$$

$$\max_{k=1,\dots,N} \varsigma^k = \max_{k=1,\dots,N} \Big(\tfrac{4}{3}\,\beta \big[z_0^k\big]^2 - \tfrac{16}{3}\,\theta^2 \gamma z_0^k w_0^k + \tfrac{4}{9}\,\theta(\,3\theta - 2\gamma\,) \big[w_0^k\big]^2 \Big) = O(N^{-2}),$$

а для того, чтобы оценить величины σ_1^k, σ_2^k, зависящие от термов $x^{2k-2} + x^{2k}$, $x^{2k-2} - x^{2k}$ (см. формулы (6.3)), необходимо привести последние выражения к регулярному виду. Согласно формулам (5.2), (5.3) и (5.5) для всех $k, i = 1, \dots, N$ имеют место равенства

$$\overline{B}_{N+1-k,N-i} = (-1)^{k+i-1} \big[\, \delta^{\geqslant}_{N-i,N+1-k}\, P_{N+1-k}\, U_{i-1} + \delta^{\geqslant}_{N-k,N-i}\, U_{k-2}\, P_{N-i} \big] =$$

$$= (-1)^{k+i-1} \Big[\, \delta^{\geqslant}_{k-1,i}\, P_{N+1-k}\, \frac{P_{i-1} - b P_i}{1-ab} + \delta^{\geqslant}_{ik}\, \frac{a P_{k-1} - P_k}{1-ab}\, P_{N-i} \Big],$$

$$\overline{B}_{N-k,N-i} = (-1)^{k+i} \big[\, \delta^{\geqslant}_{N-i-1,N-k}\, P_{N-k}\, U_{i-1} + \delta^{\geqslant}_{N-k,N-i}\, U_{k-1}\, P_{N-i} \big] =$$

$$= (-1)^{k+i} \Big[\, \delta^{\geqslant}_{k-1,i}\, P_{N-k}\, \frac{P_{i-1} - b P_i}{1-ab} + \delta^{\geqslant}_{ik}\, \frac{P_{k-1} - b P_k}{1-ab}\, P_{N-i} \Big]$$

(применили легко проверяемые равенства $\delta^{\geqslant}_{N-i,N+1-k} = \delta^{\geqslant}_{N-i-1,N-k} = \delta^{\geqslant}_{k-1,i}$ и $\delta^{\geqslant}_{N-k,N-i} = \delta^{\geqslant}_{ik}$), следовательно, в силу (5.6) для всех $k = 1, \dots, N$ (в том числе для $k = 1$; в этом случае $x^0 = 0$)

$$x^{2k-2} + x^{2k} = \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{N} \Big(\overline{B}_{N+1-k,N-i} + \overline{B}_{N-k,N-i} \Big)\, v^i = \frac{1}{1-ab} \sum_{i=1}^{N} C_{ki}^0\, v^i,$$

$$x^{2k-2} - x^{2k} = \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{N} \Big(\overline{B}_{N+1-k,N-i} - \overline{B}_{N-k,N-i} \Big)\, v^i = \frac{1}{1-ab} \sum_{i=1}^{N} C_{ki}^1\, v^i, \tag{8.2}$$

где

$$C_{ki}^0 \doteq (-1)^{k+i}\, \tfrac{1}{P_N} \Big(\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\, \big[\, P_{N-k} - P_{N+1-k} \big] \big[\, P_{i-1} - b P_i \big] + \delta^{\geqslant}_{ik} \big[\, (\,1-a\,)\, P_{k-1} + (\,1-b\,)\, P_k \big]\, P_{N-i} \Big),$$

$$C_{ki}^1 \doteq (-1)^{k+i}\, \tfrac{1}{P_N} \Big(\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\, \big[\, P_{N-k} + P_{N+1-k} \big] \big[\, b P_i - P_{i-1} \big] + \delta^{\geqslant}_{ik} \big[\, (\,1+b\,)\, P_k - (\,1+a\,)\, P_{k-1} \big]\, P_{N-i} \Big).$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Для любых $k, i = 1, \dots, N$ справедлива оценка $C_{ki}^0 > 0$. Если $k > i$, то $C_{ki}^1 > 0$, а иначе $C_{ki}^1 < 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Q_k \doteq (-1)^k P_k,\ k \in \mathbb{Z}$, тогда легко убедиться, что

$$\begin{aligned} C^0_{ki} \doteq \tfrac{1}{Q_N} \Big(\delta^{\geqslant}_{k-1,i} \left[Q_{N-k} + Q_{N+1-k} \right] \left[- Q_{i-1} - b\, Q_i \right] + \\ + \delta^{\geqslant}_{ik} \left[(1-b)\, Q_k - (1-a)\, Q_{k-1} \right] Q_{N-i} \Big), \\ C^1_{ki} \doteq \tfrac{1}{Q_N} \Big(\delta^{\geqslant}_{k-1,i} \left[Q_{N+1-k} - Q_{N-k} \right] \left[- Q_{i-1} - b\, Q_i \right] + \\ + \delta^{\geqslant}_{ik} \left[(1+b)\, Q_k + (1+a)\, Q_{k-1} \right] Q_{N-i} \Big). \end{aligned} \tag{8.3}$$

В силу (5.4) справедливо равенство $P_{k-1} - 2y\, P_k + P_{k+1} = 0$, поэтому числа Q_k удовлетворяют линейному рекуррентному уравнению $Q_{k-1} + 2y\, Q_k + Q_{k+1} = 0$ с начальными условиями $Q_0 = 1,\ Q_1 = -a$ (имеем $Q_0 = P_0 = U_0 - b\, U_{-1} = 1,\ \ Q_1 = -P_1 = -U_1 + b\, U_0 = -2y + b = -a$), причем $y < -1$. Следовательно, непосредственной проверкой убеждаемся, что для всех $k \in \mathbb{Z}$

$$Q_k = \tfrac{1}{2\nu} \left(\lambda^{k+1} + b\, \lambda^k - \lambda^{-k-1} - b\, \lambda^{-k} \right), \qquad \text{где} \qquad \nu \doteq \sqrt{y^2 - 1}, \quad \lambda \doteq -\, y + \nu.$$

Также легко проверить, что $r \doteq \lambda^{-1} = -y - \nu,\ \ 1 + 2y\, \lambda + \lambda^2 = 0$ и $1 + 2y\, r + r^2 = 0$ (значит, $0 < r < 1 < \lambda$). Таким образом, для чисел Q_k имеет место альтернативное представление

$$Q_k = c_0\, \lambda^{k+1} + c_1 r^{k+1}, \qquad \text{где} \qquad c_0 \doteq \tfrac{1}{2\nu} (1 + b\, r), \quad c_1 \doteq -\, \tfrac{1}{2\nu} (1 + b\lambda). \tag{8.4}$$

Так как $c_0 + c_1 = \frac{b}{2\nu} (r - \lambda) = -b > 0$ и

$$c_0 c_1 = -\tfrac{1}{4\nu^2} \left(1 + b\,(r + \lambda) + b^2 \right) = -\tfrac{1}{4\nu^2} \left(1 - 2b\, y + b^2 \right) = \tfrac{1}{4\nu^2} (ab - 1) > 0 \tag{8.5}$$

(см. оценки (4.4)), то $c_0 > 0,\ c_1 > 0$. Следовательно, $Q_k > 0$. Справедливы цепочки равенств

$$c_0 (a + \lambda) = \tfrac{1}{2\nu} \left(a + ab\, r + \lambda + b \right) = \tfrac{1}{2\nu} \left(2y + ab\, r + \lambda \right) = \tfrac{r}{2\nu} \left(2y\, \lambda + ab + \lambda^2 \right) = \tfrac{r}{2\nu} (ab - 1),$$

$$c_1 (a + r) = -\tfrac{1}{2\nu} \left(a + ab\, \lambda + r + b \right) = -\tfrac{1}{2\nu} \left(2y + ab\, \lambda + r \right) = -\tfrac{\lambda}{2\nu} \left(2y\, r + ab + r^2 \right) = -\tfrac{\lambda}{2\nu} (ab - 1),$$

а поскольку $\lambda > r$ и имеют место оценки (4.4), то для всех $k \in \mathbb{N}$

$$a Q_{k-1} + Q_k = c_0 (a + \lambda)\, \lambda^k + c_1 (a + r)\, r^k = \tfrac{1}{2\nu} (ab - 1) \left[\lambda^{k-1} - r^{k-1} \right] \geqslant 0,$$

$$-Q_{k-1} - b\, Q_k = -b \left[a Q_{k-1} + Q_k \right] + (ab - 1)\, Q_{k-1} > 0, \qquad Q_k - Q_{k-1} > -b\, Q_k - Q_{k-1} > 0,$$

$$(1-b)\, Q_k - (1-a)\, Q_{k-1} = \left[a Q_{k-1} + Q_k \right] + \left[- Q_{k-1} - b\, Q_k \right] > 0. \tag{8.6}$$

Значит, $C^0_{ki} > 0$. Также легко проверить, что $c_0 (1 + b\lambda) = -\frac{1}{2\nu} (ab - 1),\ \ c_1 (1 + br) = \frac{1}{2\nu} (ab - 1)$, поэтому

$$\begin{aligned} (1+b)\, Q_k + (1+a)\, Q_{k-1} = \left[c_0 (a + \lambda) + c_0 (1 + b\lambda) \right] \lambda^k + \left[c_1 (a + r) + c_1 (1 + br) \right] r^k = \\ = \tfrac{1}{2\nu} (ab - 1) \Big((r - 1)\, \lambda^k + (1 - \lambda)\, r^k \Big) < 0, \end{aligned} \tag{8.7}$$

что и доказывает вторую часть утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. *Для любых* $k, i = 1, \ldots, N$ *справедливо* $C^0_{ki} \leqslant C^0_{NN}$.

Доказательство. 1. В силу (8.3) для всех всех $k=1,\dots,n$ справедливо

$$\left(C^0_{k+1,k+1}-C^0_{kk}\right)Q_N=(1-b)\left[Q_{k+1}Q_{n-k}-Q_kQ_{N-k}\right]+(1-a)\left[Q_{k-1}Q_{N-k}-Q_kQ_{n-k}\right].$$

Обозначим выражения, стоящие в квадратных скобках, через ς^k_0 и ς^k_1. Тогда в силу (8.4)

$$\varsigma^k_0=\left(c_0\lambda^{k+2}+c_1r^{k+2}\right)\left(c_0\lambda^{n-k+1}+c_1r^{n-k+1}\right)-\left(c_0\lambda^{k+1}+c_1r^{k+1}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+1}+c_1r^{N-k+1}\right)=$$

$$=c_0c_1\left(\lambda^{k+2}r^{n-k+1}+r^{k+2}\lambda^{n-k+1}-\lambda^{k+1}r^{N-k+1}-r^{k+1}\lambda^{N-k+1}\right)=c_0c_1(\lambda-r)\left[r^{n-2k}-\lambda^{n-2k}\right],$$

$$\varsigma^k_1=\left(c_0\lambda^{k}+c_1r^{k}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+1}+c_1r^{N-k+1}\right)-\left(c_0\lambda^{k+1}+c_1r^{k+1}\right)\left(c_0\lambda^{n-k+1}+c_1r^{n-k+1}\right)=$$

$$=c_0c_1\left(\lambda^{k}r^{N-k+1}+r^{k}\lambda^{N-k+1}-\lambda^{k+1}r^{n-k+1}-r^{k+1}\lambda^{n-k+1}\right)=c_0c_1(\lambda-r)\left[\lambda^{N-2k}-r^{N-2k}\right].$$

Следовательно, в силу (8.5) и очевидного равенства $\lambda-r=2\nu$ имеем

$$\left(C^0_{k+1,k+1}-C^0_{kk}\right)Q_N=c_0c_1(\lambda-r)\left((1-b)\left[r^{n-2k}-\lambda^{n-2k}\right]+(1-a)\left[\lambda^{N-2k}-r^{N-2k}\right]\right)=$$

$$=\tfrac{1}{2\nu}(ab-1)\left(\left[1-a-(1-b)r\right]\lambda^{N-2k}+\left[a-1+(1-b)\lambda\right]r^{N-2k}\right).$$

Так как $a+b=2y$, $\lambda+r=-2y$, то $a+b+\lambda+r=0$, поэтому

$$1-a-(1-b)r=b+\lambda+1+br=(1+\lambda)(1+br)=2\nu c_0(1+\lambda),$$

$$a-1+(1-b)\lambda=-b-r-1-b\lambda=-(1+r)(1+b\lambda)=2\nu c_1(1+r),$$

$$\left(C^0_{k+1,k+1}-C^0_{kk}\right)Q_N=(ab-1)\left[c_0(1+\lambda)\lambda^{N-2k}+c_1(1+r)r^{N-2k}\right]>0,$$

$$C^0_{11}<C^0_{22}<\ldots<C^0_{NN}.$$

2. В силу (8.3) и (8.6) для всех $k=1,\dots,n$ и $i>k$ справедливо

$$\left(C^0_{kk}-C^0_{ki}\right)Q_N=\left[(1-b)Q_k-(1-a)Q_{k-1}\right]\left[Q_{N-k}-Q_{N-i}\right]>0,\qquad C^0_{ki}<C^0_{kk}<C^0_{NN}.$$

3. В силу (8.3) для всех $k=2,\dots,N$ справедливы равенства

$$C^0_{k,k-1}=\left[Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\right]\left[-Q_{k-2}-b\,Q_{k-1}\right]/Q_N=\left[Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\right]\left[a\,Q_{k-1}+Q_k\right]/Q_N,$$

поэтому

$$\left(C^0_{k,k-1}-C^0_{kk}\right)Q_N=\left[Q_{N-k}+Q_{N+1-k}\right]\left[a\,Q_{k-1}+Q_k\right]-\left[(1-b)Q_k-(1-a)Q_{k-1}\right]Q_{N-k}=$$

$$=a\,Q_{k-1}Q_{N+1-k}+Q_kQ_{N+1-k}+b\,Q_kQ_{N-k}+Q_{k-1}Q_{N-k}= \tag{8.8}$$

$$=a\left(c_0\lambda^{k}+c_1r^{k}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+2}+c_1r^{N-k+2}\right)+\left(c_0\lambda^{k+1}+c_1r^{k+1}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+2}+c_1r^{N-k+2}\right)+$$

$$+b\left(c_0\lambda^{k+1}+c_1r^{k+1}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+1}+c_1r^{N-k+1}\right)+\left(c_0\lambda^{k}+c_1r^{k}\right)\left(c_0\lambda^{N-k+1}+c_1r^{N-k+1}\right)=$$

$$=c_0^2\lambda^{N+1}\left\{1+2y\lambda+\lambda^2\right\}+c_0c_1\left(\left[2+a\lambda+br\right]\lambda^{N-2k+1}+\left[2+b\lambda+ar\right]r^{N-2k+1}\right)+$$

$$+c_1^2r^{N+1}\left\{1+2yr+r^2\right\}.$$

Выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю. Обозначим коэффициенты, стоящие в квадратных скобках, через κ_0 и κ_1. Тогда $\kappa_0+\kappa_1=4+(a+b)(\lambda+r)=4-4y^2<0$ и

$$\kappa_0\kappa_1=4+2(a\lambda+br+b\lambda+ar)+(a\lambda+br)(b\lambda+ar)=$$

$$= 4 + 2\,(\,a+b\,)\,(\,\lambda + r\,) + ab\lambda^2 + b^2 + a^2 + ab\,r^2 =$$

$$= 4 - 8y^2 + ab\,(\lambda{-}r)^2 + (\,a{+}b\,)^2 = 4 - 8y^2 + 4ab\,(y^2{-}1) + 4y^2 = 4\,(ab-1)\,(y^2{-}1) > 0,$$

следовательно, $\kappa_0 < 0$, $\kappa_1 < 0$. Таким образом, $C^0_{k,k-1} < C^0_{kk} \leqslant C^0_{NN}$ для всех $k = 2,\ldots,N$.

4. В силу (8.3) и (8.6) для всех $i = 2,\ldots,n$ и $k > i$ справедливо

$$\big(\,C^0_{i,i-1} - C^0_{k,i-1}\,\big)\,Q_N = \big[\,(\,Q_{N-i} - Q_{N-k}\,) + (\,Q_{N+1-i} - Q_{N+1-k}\,)\big]\,\big[-Q_{i-2} - b\,Q_{i-1}\big] > 0,$$

$$C^0_{k,i-1} < C^0_{i,i-1} < C^0_{ii} < C^0_{NN}.$$

У т в е р ж д е н и е 3. *Для любых* $k,i = 1,\ldots,N$ *справедливо* $|\,C^1_{ki}| \leqslant -C^1_{11}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Согласно утверждению 1 все числа C^1_{kk} отрицательные, а в силу представления (8.3) для всех $k = 1,\ldots,n$ справедливо

$$\big(\,C^1_{k+1,k+1} - C^1_{kk}\,\big)\,Q_N = (\,1{+}b\,)\,\big[\,Q_{k+1}Q_{n-k} - Q_kQ_{N-k}\,\big] - (\,1{+}a\,)\,\big[\,Q_{k-1}Q_{N-k} - Q_kQ_{n-k}\,\big].$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках, — это числа ς^k_0 и ς^k_1 из утверждения 2, поэтому

$$\big(\,C^1_{k+1,k+1} - C^1_{kk}\,\big)\,Q_N = c_0c_1(\,\lambda{-}r\,)\Big(\,(\,1{+}b\,)\,\big[\,r^{n-2k} - \lambda^{n-2k}\big] - (\,1{+}a\,)\,\big[\,\lambda^{N-2k} - r^{N-2k}\,\big]\,\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2\nu}\,(ab-1)\Big(-\big[\,1{+}a{+}(\,1{+}b\,)\,r\,\big]\,\lambda^{N-2k} + \big[\,1{+}a{+}(\,1{+}b\,)\,\lambda\,\big]\,r^{N-2k}\,\Big).$$

Воспользовались равенствами (8.5) и $\lambda - r = 2\nu$. Так как $a + b + \lambda + r = 0$, то

$$1 + a + (1+b)r = -b - \lambda + 1 + b\,r = (1-\lambda)(1+b\,r) = 2\nu\,c_0\,(1-\lambda),$$

$$1 + a + (1+b)\lambda = -b - r + 1 + b\lambda = (1-r)\,(1+b\lambda) = -2\nu\,c_1(1-r),$$

$$\big(\,C^1_{k+1,k+1} - C^1_{kk}\,\big)\,Q_N = (ab{-}1)\,\big[\,c_0\,(\lambda{-}1)\,\lambda^{N-2k} - c_1(1{-}r)\,r^{N-2k}\,\big] = (ab{-}1)\,\big[\,Q_{N-2k} - Q_{n-2k}\,\big].$$

Поскольку $Q_0 - Q_{-1} = Q_0 + Q_1 + 2y\,Q_0 = 1 - a + 2y = 1 + b > 0$, то $Q_{-1} < Q_0$. В силу третьей оценки (8.6) имеем $Q_0 < Q_1 < Q_2 < \ldots$, поэтому при $N{-}2k \geqslant 0$ справедливы неравенства $Q_{n-2k} < Q_{N-2k}$ и $C^1_{k+1,k+1} > C^1_{kk}$. Другими словами, если $m \doteq \big[\frac{N}{2}\big]$, то

$$0 > C^1_{m+1,m+1} > C^1_{mm} > \ldots > C^1_{11}.$$

Зафиксируем $k = m+1,\ldots,N$, и пусть $\ell \doteq N + 1 - k$. Очевидно, $\ell \in \{\,1,\ldots,N-m\,\}$, причем $N - m \leqslant m + 1$, поэтому $C^1_{\ell\ell} \geqslant C^1_{11}$. С другой стороны,

$$\big(\,C^1_{kk} - C^1_{\ell\ell}\,\big)\,Q_N = \big[\,(\,1{+}b\,)\,Q_k + (\,1{+}a\,)\,Q_{k-1}\big]\,Q_{N-k} - \big[\,(\,1{+}b\,)\,Q_{N+1-k} + (\,1{+}a\,)\,Q_{N-k}\,\big]\,Q_{k-1} =$$

$$= (\,1{+}b\,)\,\big[\,Q_kQ_{N-k} - Q_{k-1}Q_{N+1-k}\,\big] = (\,1{+}b\,)\,\varsigma^{k-1}_0 = (\,1{+}b\,)\,c_0c_1(\,\lambda{-}r\,)\,\big[\,r^{n-2k+2} - \lambda^{n-2k+2}\big].$$

Воспользовались определением и формулой для чисел ς^k_0 (см. первый пункт утверждения 2). Так как $\lambda > r$ и $k \geqslant \ell$, то

$$\big(\,C^1_{kk} - C^1_{\ell\ell}\,\big)\,Q_N = (\,1{+}b\,)\,c_0c_1(\,\lambda{-}r\,)\,\big[\,r^{\ell-k} - \lambda^{\ell-k}\big] = (\,1{+}b\,)\,c_0c_1(\,\lambda{-}r\,)\,\big[\,\lambda^{k-\ell} - r^{k-\ell}\,\big] \geqslant 0.$$

Таким образом, $0 > C^1_{kk} \geqslant C^1_{\ell\ell} \geqslant C^1_{11}$ для всех $k = m{+}1,\ldots,N$.

2. В силу (8.3), (8.7), (8.6) и утверждения 1 для всех $k = 1,\ldots,n$ и $i > k$ справедливо

$$\big(\,C^1_{ki} - C^1_{kk}\,\big)\,Q_N = \big[\,(\,1{+}b\,)\,Q_k + (\,1{+}a\,)\,Q_{k-1}\big]\,\big[\,Q_{N-i} - Q_{N-k}\,\big] > 0, \qquad 0 > C^1_{ki} > C^1_{kk} \geqslant C^1_{11}.$$

3. Согласно (8.3) для всех $k=2,\dots,N$ справедливы равенства

$$C^1_{k,k-1}=\big[\,Q_{N+1-k}-Q_{N-k}\,\big]\,\big[-Q_{k-2}-b\,Q_{k-1}\big]/Q_N=\big[\,Q_{N+1-k}-Q_{N-k}\,\big]\,\big[\,a\,Q_{k-1}+Q_k\big]/Q_N,$$

$$\big(\,C^1_{k,k-1}+C^1_{kk}\,\big)\,Q_N=\big[\,Q_{N+1-k}-Q_{N-k}\,\big]\,\big[\,a\,Q_{k-1}+Q_k\big]+\big[\,(\,1+b\,)\,Q_k+(\,1+a\,)\,Q_{k-1}\,\big]\,Q_{N-k}=$$

$$=a\,Q_{k-1}Q_{N+1-k}+Q_k\,Q_{N+1-k}+b\,Q_kQ_{N-k}+Q_{k-1}Q_{N-k}.$$

Последнее выражение совпадает с выражением (8.8), которое в силу третьего пункта утверждения 2 отрицательно, следовательно, $C^1_{k,k-1}+C^1_{kk}<0$, поэтому $0<C^1_{k,k-1}<-C^1_{kk}<-C^1_{11}$.

4. В силу (8.3), (4.4) и (8.6) для всех $i=1,\dots,n-1$ и $k>i$ справедливо

$$\big(\,C^1_{k+1,i}-C^1_{ki}\,\big)\,Q_N=\big[\,(\,Q_{N-k}-Q_{N-1-k}\,)-(\,Q_{N+1-k}-Q_{N-k}\,)\big]\,\big[-Q_{i-1}-b\,Q_i\big]=$$

$$=\big[\,2Q_{N-k}+2y\,Q_{N-k}\big]\,\big[-Q_{i-1}-b\,Q_i\big]=2\,(1+y)\,Q_{N-k}\big[-Q_{i-1}-b\,Q_i\big]<0.$$

Следовательно, $0<C^1_{Ni}<\ldots<C^1_{i+2,i}<C^1_{i+1,i}<-C^1_{i+1,i+1}<-C^1_{11}$ при всех $i=1,\dots,n-1$. $\square$

В силу определений (8.3) справедливы соотношения

$$-C^1_{11}=-\big[\,(\,1+b\,)\,Q_1+(\,1+a\,)\,Q_0\,\big]\,Q_n/Q_N=(ab-1)\,Q_n/Q_N<ab-1,$$

$$C^0_{NN}=1-b-(\,1-a\,)\,Q_n/Q_N<1-b+(\,1-a\,)\,(\,1+b\,)/(\,1+a\,)=2\,(\,1-ab\,)/(\,1+a\,).$$

Воспользовались оценкой (8.7), согласно которой $-Q_n/Q_N<(\,1+b\,)/(\,1+a\,)$. Следовательно,

$$\big|\,x^{2k-2}+x^{2k}\big|\leqslant\frac{1}{ab-1}\,C^0_{NN}\,\sum_{i=1}^{N}|\,v^i\,|<-\frac{2}{1+a}\,\sum_{i=1}^{N}|\,v^i\,|=\frac{\alpha-\beta}{\theta+\beta}\,\sum_{i=1}^{N}|\,v^i\,|=\frac{1}{\theta+\beta}\,\sum_{i=1}^{N}|\,V^i\,|,$$

$$\big|\,x^{2k-2}-x^{2k}\big|\leqslant\frac{1}{1-ab}\,C^1_{11}\,\sum_{i=1}^{N}|\,v^i\,|<\sum_{i=1}^{N}|\,v^i\,|=\frac{1}{\alpha-\beta}\,\sum_{i=1}^{N}|\,V^i\,|$$

(см. формулы (8.2)). В § 7 отмечены равномерные (по i) оценки $z^i_0=O(1)$, $w^i_0=O(N^{-1})$. Также легко убедиться, что $z^i_0-z^{i+1}_0=O(N^{-1})$ (равномерно по i), следовательно, в силу (4.8)

$$V^i=\theta\,(z^i_0-z^{i+1}_0)+\beta\,z^i_0+\beta\,z^{i+1}_0-\theta^2(1+2\gamma)\,w^i_0+\theta^2(1-2\gamma)\,w^{i+1}_0=O(N^{-2}),\qquad i=1,\dots,n,$$

$$V^N=(\,\beta+\theta\,)\,z^N_0-\theta^2(1+2\gamma)\,w^N_0=O(N^{-1}),\qquad\sum_{i=1}^{N}|\,V^i\,|=\sum_{i=1}^{n}|\,V^i\,|+|\,V^N|=O(N^{-1}).$$

Итак, $\big|\,x^{2k-2}+x^{2k}\big|=O(1)$, $\big|\,x^{2k-2}-x^{2k}\big|=O(N^{-1})$. В силу формул (6.3) справедливо $\sigma^k_1=O(N^{-2})$, $\sigma^k_2=O(N^{-2})$ (равномерно по k), а в силу (8.1)

$$\max_{k=1,\dots,N}\sigma^k_1=O(N^{-2}),\qquad\max_{k=1,\dots,N}\sigma^k_2=O(N^{-2}),\qquad\tfrac{8\tau}{\mathrm{a}^2}\,J^k=O(N^{-2}),\qquad J'_N=O(N^{-1}).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдутся размерность N и сплайн $u\in\sigma_N(\Pi)$ (порожденный решением системы (4.9)) такие, что $\max\limits_{k=1,\dots,N}\|\,\mathrm{a}u_t-\mathrm{b}u_{\xi\xi}\,\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi^k)}<\varepsilon$.

Список литературы

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146–153.
2. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 154–171.
3. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 141–156.
4. Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего волнового уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 144–154.
5. Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим волновым уравнением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 141–152.
6. Родионов В.И. Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2656–2659.
7. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation // Современные компьютерные и информационные технологии: сборник трудов международной научной Российско-Корейской конференции. УрФУ. Екатеринбург, 2011. С. 132–135.

Поступила в редакцию 17.10.2013

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

V. I. Rodionov

On solution of one optimization problem generated by simplest heat conduction equation

Keywords: heat conduction equation, interpolation, approximate spline, tridiagonal matrix, Chebyshev's polynomials.

MSC: 41A15

The solution of boundary value problem for the simplest heat conduction equation defined on a rectangle can be represented as the sum of two terms which are solutions of two boundary value problems: in the first case, the boundary functions are linear, while in the second case, the initial function is zero. This specificity allows us to apply two-dimensional splines for the numerical solution of both problems. The first problem was studied in previous papers where an economical algorithm was obtained for its numerical solution with linear computational complexity. This fact served as the basis for similar constructions in solving the second problem. Here we also define the finite-dimensional space of splines of Lagrangian type, and as a solution, we suggest the optimal spline giving the smallest residual. We have obtained exact formulas for the coefficients of this spline and its residual. The formula for the spline coefficients is a linear form of initial finite differences on the boundary. The formula for the residual is the sum of five simple terms and a negative definite quadratic form of new finite differences defined on the boundary. The entries of the matrix of the form are expressed through Chebyshev's polynomials, the matrix is invertible and is such that the inverse matrix has a tridiagonal form. This feature allows us to obtain upper and lower bounds for the spectrum of the matrix and to show that the residual is bounded by a constant independent of the dimension N. It is shown that the associated residual tends to zero with increasing N. Thus, the obtained optimal spline should be considered the pseudosolution of the second problem.

REFERENCES

1. Rodionov V.I. On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 146–153 (in Russian).
2. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 154–171 (in Russian).
3. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 141–156 (in Russian).
4. Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 144–154 (in Russian).
5. Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 141–152 (in Russian).
6. Rodionov V.I. A method for constructing difference schemes, *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2656–2659 (in Russian).
7. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation, *Sovremennye Komp'yuternye i Informatsionnye Tekhnologii: Tez. Dokl. Mezhdunarodnoi Konferentsii* (Advanced Computer and Information Technologies: Abstracts of Int. Conf.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 2011, pp. 132–135.

Received 17.10.2013

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru