УДК 517.91

© *Е. Л. Тонков*

МАГИСТРАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ (I)[1]

Рассматриваемый текст предназначен в первую очередь магистрам, занимающимся на специализации «дифференциальные уравнения». Он посвящен применению к рассматриваемым управляемым системам хорошо разработанной теории классических динамических систем, методов дифференциальной геометрии, а также теории дифференциальных включений, разработанной в основном А. Ф. Филипповым. Основное содержание текста состоит в исследовании так называемой стандартной управляемой системы. Фазовым пространством такой системы является конечномерное гладкое многообразие. Это предположение очень важно с точки зрения приложений. Кроме того, предполагается, что векторное поле системы локально липшицево, а геометрические ограничения на управляемые параметры компактны. Рассматриваемые здесь допустимые управления могут быть как программными, так и позиционными. В первом случае мы приходим к так называемым системам уравнений Каратеодори, во втором — в случае разрывов векторного поля по фазовым переменным — к дифференциальным включениям Филиппова. Серьезное внимание уделяется здесь изучению условий, при которых сохраняются заданные по условиям задачи свойства управляемой системы при замыкании множества сдвигов (в топологии равномерной сходимости на компактах) исходной стандартной управляемой системы.

Ключевые слова: динамические системы, конечномерные гладкие многообразия, обыкновенные дифференциальные уравнения, управляемые системы, магистральные движения.

Содержание

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН (№ 12–П–1002), гранта РФФИ (12–01–00195) и Минобрнауки России в рамках базовой части.

Введение

Стандартный курс дифференциальных уравнений для студентов-математиков классических университетов страны основан на обстоятельном изучении свойств решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(t, x_1 \dots x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = v_n(t, x_1 \dots x_n), \end{cases} \tag{0.1}$$

заданной на множестве $(t_*, t^*) \times G$, где G — область[2] в $\mathbb{R}^n$, а векторное поле $v(t,x)$ системы уравнений (0.1) непрерывно по совокупности переменных (t,x) и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial x_j}, \quad i,j = 1 \dots n, \quad \text{при всех} \quad (t,x) \in (t_*, t^*) \times G.$$

Для магистров-математиков, решивших специализироваться на теории дифференциальных уравнений (специализация ВАК 01. 01. 02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), такой объем знаний по обыкновенным дифференциальным уравнениям явно недостаточен, поскольку исключает из рассмотрения большинство важных прикладных задач теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории устойчивости так называемых магистральных процессов, многие задачи классической механики, связанные с управлением мобильными роботами и ряд задач, имеющих отношение к математической экономике.

В течение последних пятидесяти лет теория обыкновенных дифференциальных уравнений интенсивно развивалась в связи с необходимостью решения отмеченных прикладных задач управления, и сейчас мы получили прекрасную возможность пересмотреть классический курс дифференциальных уравнений и довести его до уровня, необходимого для изучения и развития некоторых важных прикладных задач.

В связи со сказанным рассматриваемый текст имеет следующие особенности.

Основным объектом нашего изучения является так называемая *управляемая* система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = v_n(t, x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m), \end{cases} \tag{0.2}$$

заданная на множестве $(t_*, t^*) \times M \times U$, где M — *гладкое многообразие размерности* n (называемое фазовым пространством системы (0.2)), а вектор параметров $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_m)$, порождающий так называемые допустимые управления, имеет *компактные* геометрические ограничения $u \in U$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Среди допустимых управлений системы (0.2) рассматриваются два принципиально различных допустимых вида управления:

(1) допустимое *программное* управление $t \to u(t)$;

(2) допустимое *позиционное управление* $(t,x) \to u(t,x)$.

[2] То есть открытое связное множество.

В первом случае управление $u(t)$ — это измеримая по Лебегу функция со значениями в заданном множестве U, удовлетворяющая при всех $t \in (t_*, t^*)$ так называемому *условию невырожденности*. Это означает, что для любого (в смысле Каратеодори [1]) решения $t \to x(t)$ системы

$$\dot{x} = v\bigl(t, x, u(t)\bigr)$$

имеет место включение

$$v\bigl(t, x(t), u(t)\bigr) \in T_{x(t)}M, \quad t \in (t_*, t^*), \tag{0.3}$$

где T_xM — *линейное пространство, касательное к многообразию* M *в точке* $x \in M$.

Во втором случае позиционное управление $u(t,x)$ при $(t,x) \in (t_*, t^*) \times M$ удовлетворяет геометрическим ограничениям и *условию невырожденности* (0.3) с программным управлением $u(t)$, удовлетворяющим включению

$$u(t) \in \mathcal{U}\bigl(t, x(t)\bigr), \tag{0.4}$$

где

$$\mathcal{U}(t,x) \doteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\operatorname{mes}\mu=0} \overline{\operatorname{co}}\, u(t, \mathcal{O}_\varepsilon(x) \setminus \mu),$$

mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\operatorname{co}}A$ — замыкание выпуклой оболочки множества $A \subset \mathbb{R}^n$, а $x(t)$ в равенстве (0.4) — это решение в смысле А. Ф. Филиппова [1] системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v\bigl(t, x, u(t,x)\bigr),$$

то есть дифференциального включения

$$\dot{x} \in v\bigl(t, x, \mathcal{U}(t,x)\bigr).$$

И наконец, важной особенностью этого текста является массированное применение классической теории динамических систем и, в частности, *динамической системы сдвигов* при исследовании асимптотического поведения решений множества предельных уравнений, образующих так называемое *омега-предельное множество* при замыкании (в топологии равномерной сходимости на компактах) множества сдвигов исходной системы уравнений (0.2).

Дело в том, что во многих задачах, связанных с асимптотическим поведением исследуемого свойства управляемой системы (0.2), это свойство, как правило, сохраняется при всех сдвигах влево системы, но в замыкании множества сдвигов системы (0.2) может не сохраниться. Простой пример: для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ *множество управляемости* уравнения

$$\dot{x} = \frac{u}{(t+\tau)^2 + 1}, \quad u \in \mathbb{R},$$

на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ совпадает со всем фазовым пространством $\mathbb{R}$, но множество управляемости, соответствующее предельному (при $\tau \to \infty$) уравнению $\dot{x} = 0$, состоит из одной точки $\{0\}$.

Возможность такого непредсказуемого поведения свойств систем дифференциальных уравнений вынуждает нас обратиться к методам хорошо разработанной теории динамических систем и в связи с этим посвятить часть рассматриваемого текста теории динамических систем.

Г л а в а 1. Топологическая динамическая система

§ 1. Предварительные сведения

Обыкновенные дифференциальные уравнения — это *динамические системы* [2–5], *конечномерные гладкие многообразия* [6–11] и *диффеоморфизмы*, а современная теория оптимального управления — это, в частности, конкретные задачи из практики, допускающие *регулярный синтез* управляемых систем.

Евклидово пространство. Начнём с напоминания основных понятий, на которых базируется теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Вспомним [9], что:

(1) $\mathbb{R}^n$ — это *прямое произведение* n экземпляров числовой прямой $\mathbb{R} \doteq (-\infty, \infty)$ с нормой
$$|x|_0 = |x_1| + \cdots + |x_n|;$$

(2) A^n — это *аффинное* пространство размерности n; в аффинном пространстве не фиксировано начало координат, и поэтому сумма точек x, y в A^n не определена, но определена *разность* $x - y$, которая называется *вектором* $v = x - y$; следовательно, в аффинном пространстве действует *группа параллельных переносов*;

(3) *евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ размерности n — это пространство, снабженное *группой параллельных переносов и положительно-определенной билинейной симметрической формой* x^*Qy, называемой *скалярным произведением.* Если в пространстве $\mathbb{R}^n$, фиксирован *ортонормированный базис*, то предполагается, что $Q = E$, где E — единичная матица, и тогда
$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

В дальнейшем применяются следующие обозначения:
$$\mathcal{O}^n_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\}, \quad O^n_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| \leqslant r\}$$
— *открытый и замкнутый* шары радиуса r с центром в точке x пространства $\mathbb{R}^n$ (если $x = 0$, то пишем $\mathcal{O}^n_r$, O^n_r или $\mathcal{O}_r$, O_r, если размерность шаров понятна); ∂M — граница и $\operatorname{cl} M$, или $\overline{X}$ — замыкание множества M.

Далее, в рассматриваемых лекциях *область* — это всегда *открытое связное* множество полного метрического пространства (в частности, *евклидова* пространства $\mathbb{R}^n$); а *компактность* множества K в *полном метрическом* пространстве $\mathcal{S}$ означает, что всякая последовательность $\{x_i\}$ такая, что $x_i \in K$ при всех $i = 1, 2\ldots$ имеет сходящуюся в $\mathcal{S}$ подпоследовательность, предел которой принадлежит K.

Касательное пространство и диффеоморфизмы. Нам понадобится определение *касательного пространства* к границе ∂M множества M в заданной точке x.

О п р е д е л е н и е 1.1 (касательного пространства). Пусть заданы связное множество M в $\mathbb{R}^N$ и точка x, принадлежащая ∂M. Для каждой *гладкой*[3] функции
$$p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial M,$$
проходящей через точку $p(0) = x$, построим *вектор скорости* $v(x, p)$ кривой $t \to p(t)$ в точке x. Этот вектор определяется равенством
$$v(x, p) = \frac{dp(t)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

[3]То есть имеющей по крайней мере одну непрерывную производную.

Совокупность всех векторов скорости $v(x,p)$ с естественными операциями сложения и умножения на число оказывается *линейным пространством*, это пространство называется *касательным пространством к множеству M в точке x* и обозначается T_xM. Несложно убедиться, что размерность n касательного пространства T_xM удовлетворяет неравенству $n \leqslant N$.

На протяжении этого текста касательное пространство T_xM снабжается структурой *евклидова* пространства $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.2 (диффеоморфизмы (предварительное определение)). Функция $f\colon W \to U$, действующая из заданного множества $W \subset \mathbb{R}^N$ в *область U евклидова* пространства $\mathbb{R}^n$, называется *диффеоморфизмом*, если существует обратная функция

$$f^{-1}\colon U \to W$$

и обе функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы.

§ 2. Стационарное векторное поле

Условие Липшица. Рассмотрим *стационарную* систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in X, \tag{2.1}$$

векторное поле $v(x)$ которой задано в области X евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет *локальном условию Липшица.*

О п р е д е л е н и е 2.1 (условие Липшица (предварительное определение)). Функция $v\colon X \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждой точки x области X и любого положительного ε такого, что $O_\varepsilon(x) \subset X$, найдётся число $\ell_\varepsilon(x)$, обеспечивающее для всех $y, z \in O_\varepsilon(x)$ неравенство

$$|v(y) - v(z)| \leqslant \ell_\varepsilon(x)|y - z|. \tag{2.2}$$

Далее, если функция $v(x)$ определена на множестве $\overline{X}$, где $\overline{X}$ — замыкание области X в $\mathbb{R}^n$ и для всех $x \in \partial X = \overline{X} \setminus X$ имеет место включение

$$v(x) \in T_x(\partial X),$$

то условие Липшица выполнено, если оно выполнено в области X и для каждой точки $x \in \partial X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\ell_\varepsilon(x)$, что для всех

$$y, z \in O_\varepsilon(x) \bigcap T_x(\partial X)$$

имеет место неравенство (2.2).

Напомним, что *решением* системы уравнений (2.1) на интервале (t_*, t^*) времени называется всякая *непрерывная* функция $t \to \varphi(t) \in X$, удовлетворяющая при всех t из интервала (t_*, t^*) равенству

$$\dot{\varphi}(t) = v\big(\varphi(t)\big).$$

В дальнейшем, если нет специальных оговорок, мы рассматриваем только *максимальные* решения системы (2.1), то есть такие решения, которые рассматриваются на *максимальном* интервале (t_*, t^*) существования решения.

Следует отличать:

(1) *решение* системы (2.1) (это функция $t \to \varphi(t)$);

(2) *движение* системы (2.1), или по-другому *интегральную кривую* (это множество точек $(t, \varphi(t))$ в *расширенном* фазовом пространстве);

(3) *траекторию*
$$\operatorname{orb}(\varphi, t_*, t^*) \doteq \big\{\varphi(t) \in X : t \in (t_*, t^*)\big\}$$
движения системы (2.1) (это проекция интегральной кривой на фазовое пространство X системы (2.1)).

Для дальнейшего изложения существенны следующие две теоремы, для доказательства которых полезно ознакомиться с замечательной книгой Л. С. Понтрягина [12].

Теорема 2.1. *Пусть векторное поле системы* (2.1) *локально липшицево. Тогда для каждой точки* $x \in X$ *найдётся интервал* $\big(t_*(x), t^*(x)\big)$ *существования решения* $t \to \varphi(t, x)$ *задачи Коши*
$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x. \tag{2.3}$$
Решение задачи (2.3) *единственно. Кроме того, концы* $t_*(x)$, $t^*(x)$ *интервала существования решения задачи* (2.3) *равномерно непрерывны по* x *в области* X.

Теорема о существовании топологической динамической системы. Это теорема о глобальном продолжении решений стационарной системы в предположении, что векторное поле системы имеет подлинейный рост. Различные обобщения этой теоремы будут даны ниже.

Теорема 2.2. *Предположим, что векторное поле* $v(x)$ *системы*
$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \overline{X}, \tag{2.4}$$
локально липшицево на множестве $\overline{X}$, *где* X — *область в* $\mathbb{R}^n$ *и для всех* $x \in \partial X$ *имеет место включение* $v(x) \in T_x(\partial X)$.

Если область X *ограничена в* $\mathbb{R}^n$ *или, в противном случае, правая часть системы* (2.4) *имеет подлинейный рост*
$$\varlimsup_{x\in\overline{X},\, |x|\to\infty} \frac{|v(x)|}{|x|} < \infty,$$
то всякому начальному условию $x(0) = x \in \overline{X}$ *отвечает решение* $t \to \varphi(t, x)$ *системы* (2.4), *определенное на числовой прямой* $\mathbb{R}$. *Далее, в силу липшицевости векторного поля системы* (2.4) *оно единственно и непрерывно по совокупности переменных* (t, x) *на множестве* $\mathbb{R}\times\overline{X}$. *Кроме того, из условия* $v(x) \in T_x(\partial X)$ *следует, что для каждой точки* $x \in \partial X$ *решение* $t \to \varphi(t, x)$ *остается в* ∂X *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Задача 2.1. Докажите теоремы 2.1 и 2.2.

Для дальнейших рассуждений удобно значение решения $\varphi(t, x)$ системы (2.4), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x$, переобозначить так: $\varphi(t, x) = g^t x$. В силу стационарности системы (2.4) при всех $t, s \in \mathbb{R}$ имеет место равенство
$$\varphi(t + s, x) = \varphi\big(t, \varphi(s, x)\big),$$
которое теперь перепишется в следующем виде:
$$g^{t+s}(x) = g^t g^s(x). \tag{2.5}$$

Рис. 1. Джорж Давид Биркгоф (1884—1944)

Из равенства (2.5) следует, что при каждом t функция $g^t\colon \overline{X} \to \overline{X}$ представляет *однопараметрическую группу преобразований* пространства $\overline{X}$ в себя. Эта функция в теории дифференциальных уравнений называется *оператором сдвига* вдоль траекторий системы (2.4).

Таким образом, система (2.4) порождает пару $(\overline{X}, g^t)$, полностью описывающую поведение решений системы (2.4). В действительности, в силу инвариантности пространства ∂X относительно решений системы (2.4), начинающихся в ∂X, имеет смысл рассматривать две независимые пары: $(\partial X, g^t)$ и (X, g^t), которые отвечают двум системам дифференциальных уравнений: системе

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \partial X, \tag{2.6}$$

и системе

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in X. \tag{2.7}$$

§ 3. Топологическая динамическая система

В этом параграфе приведены необходимые для дальнейшего сведения из теории динамических систем. Изложение опирается в основном на главу 5 монографии В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [5], что вполне достаточно для наших целей. Современное состояние теории динамических систем см. в [3].

Определения и простейшие свойства

Определение 3.1 (динамической системы Биркгофа [2]). Топологическая динамическая система — это пара (Σ, g^t), где Σ — *фазовое пространство* (которое далее предполагается полным метризуемым [4] пространством), а g^t — *однопараметрическая*

[4]Напомним, что топологическое пространство Σ называется метризуемым, если существует метрика ρ, сохраняющая топологию пространства Σ, и в этой метрике пространство Σ полное.

группа преобразований пространства Σ в себя. Это означает что параметр t, называемый «временем», меняется на прямой $\mathbb{R} \doteq (-\infty, \infty)$ (или на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), а функция $(t, x) \to g^t x$ удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) непрерывна по совокупности переменных (t, x),

(2) удовлетворяет начальному условию $g^t x\big|_{t=0} = x$,

(3) удовлетворяет свойству группы $g^t g^s = g^{t+s}$ (или полугруппы, $t, s \geqslant 0$).

Функция $t \to g^t x$ называется *движением* (точки x), а множества

$$\operatorname{orb}(x) \doteq \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} g^t x, \quad \operatorname{orb}_+(x) \doteq \bigcup_{t=0}^{\infty} g^t x \quad \text{и} \quad \operatorname{orb}_-(x) \doteq \bigcup_{t=-\infty}^{0} g^t x$$

— *траекторией*, *положительной полутраекторией* и *отрицательной полутраекторией* точки x фазового пространства Σ.

Далее, точка $x_0 \in \Sigma$ называется ω-*предельной* (α-*предельной*) для точки x, если найдется такая последовательность $\{t_k\}$ моментов времени, что $t_k \to \infty$ (соответственно $t_k \to -\infty$) и $g^{t_k} x \to x_0$. Множества ω-предельных и α-предельных точек, отвечающих точке x, обозначим $\omega(x)$ и $\alpha(x)$, тогда

$$\omega(x) = \bigcap_{T=0}^{\infty} \overline{\Big(\bigcup_{t \geqslant T} g^t x\Big)}, \quad \alpha(x) = \bigcap_{T=0}^{-\infty} \overline{\Big(\bigcup_{t \leqslant T} g^t x\Big)}. \tag{3.1}$$

Простым следствием перечисленных свойств потока g^t служат следующие леммы.

Л е м м а 3.1. *Всякое движение топологической динамической системы* (Σ, g^t) *непрерывно зависит от начальной точки равномерно относительно* t *на любом конечном отрезке времени, то есть для каждой точки* $x_0 \in \Sigma$ *и любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\vartheta > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что если* $\rho(x, x_0) \leqslant \delta$, *то*

$$\rho(g^t x, g^t x_0) \leqslant \varepsilon$$

для всех $|t| \leqslant \vartheta$.

Д е й с т в и т е л ь н о, фиксируем $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$ и x_0. Из непрерывности функции

$$(t, x) \to \rho(g^t x, g^t x_0)$$

следует непрерывность функции

$$x \to \varkappa(x) \doteq \max_{|t| \leqslant \vartheta} \rho(g^t x, g^t x_0).$$

Так как $\varkappa(x_0) = 0$, то при x, близких к x_0, будет выполнено неравенство $\varkappa(x) \leqslant \varepsilon$.

Л е м м а 3.2. *Имеют место следующие вложения:*

$$\omega(x) \subseteq \overline{\operatorname{orb}}_+(x), \quad \alpha(x) \subseteq \overline{\operatorname{orb}}_-(x).$$

Это утверждение просто следует из следующих рассуждений. Если $x_0 \in \omega(x)$, то найдется такая последовательность $\{t_i\}$, что $t_i \to \infty$ и $h^{t_i} x \to x_0$. Следовательно при всех t_i имеет место включение $h^{t_i} x \in \operatorname{orb}_+(x)$. Отсюда следует, что $x_0 \in \overline{\operatorname{orb}}_+(x)$, и это доказывает лемму.

Примеры динамических систем. Теория топологических динамических систем возникла в связи с исследованием стационарных векторных полей. Рассмотрим в связи с этим два поучительных примера.

Рис. 2. Николай Николаевич Красовский (1924–2012)

Пример 3.1. Примеры автономных систем (2.6) и (2.7), рассмотренных в предыдущем параграфе в условиях теоремы 2.2, доставляют два типичных примера $(\partial X, g^t)$ и (X, g^t) топологических динамических систем.

Пример 3.2. Важный класс дифференциальных систем составляют системы уравнений с последействием. Пусть $\mathfrak{S} \doteq C\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big)$ — линейное пространство непрерывных функций с нормой

$$\|u\|_0 = \max_{-r\leqslant t\leqslant 0} |u(t)|.$$

Пусть, далее, при каждом t задана функция $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменной $s \in [-r, 0]$. Рассмотрим автономную систему уравнений с последействием [13], [14] и соответствующую задачу Коши

$$\dot{x}(t) = v(x_t), \quad x_t \in \mathfrak{S}, \quad v : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^n; \tag{3.2}$$

$$x_t\big|_{t=0} = u, \quad u \in \mathfrak{S}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Н. Н. Красовский показал [15], что естественным фазовым пространством системы уравнений (3.2), обладающей свойством *непрерывной зависимости и глобальной правосторонней единственности* решения $t \to x(t,u)$ задачи (3.2), (3.3), является фазовое пространство $\mathfrak{S}$, в котором *движение* $t \to x_t(\cdot,u) \in \mathfrak{S}$ *строится по решению* $t \to x(t,u)$.

Таким образом, автономной системе (3.2) отвечает топологическая динамическая система $(\mathfrak{S}, g^t)$, где *полупоток* $g^t : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $t \geqslant 0$, определен равенством

$$g^t u \doteq \big\{x_t(s,u),\ s \in [-r,0]\big\}.$$

§ 4. Введение в теорию динамических систем

Предельные точки и множества. Начнем с простого примера, связанного с так называемой *динамической системой сдвигов*.

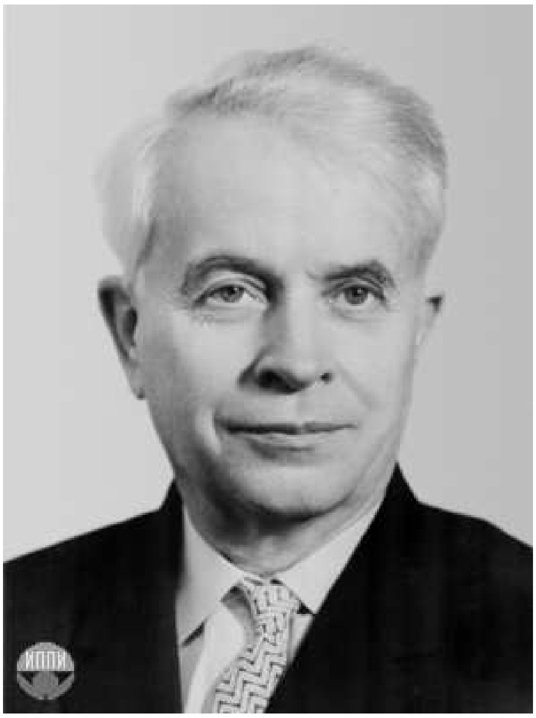


Рис. 3. Александр Александрович Марков (мл.) (1903–1979)

П р и м е р 4.1. Рассмотрим функцию

$$t \to p(t) \doteq \begin{cases} \sin\bigl(\ln(t+1)\bigr), & \text{если} \quad t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Сдвиг функции $t \to p(t)$ на константу τ обозначим $p_\tau(t)$: $p_\tau(t) \doteq p(\tau + t)$. Рассмотрим множество сдвигов $\{t \to p_\tau(t)\colon \tau \in \mathbb{R}\}$ функции $p(t)$ и добавим к этому множеству все функции $t \to q(t)$, полученные из $p(t)$ с помощью *замыкания множества сдвигов в топологии равномерной сходимости на отрезках.*

Это означает, что всякой предельной функции $q(t)$ отвечает *последовательность* $\{\tau_i\}$, *обеспечивающая для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\vartheta > 0$ *неравенства*

$$|q(t) - p_{\tau_i}(t)| \leqslant \varepsilon,$$

выполненные при $t \in [-\vartheta, \vartheta]$ *и всех* i, *начиная с некоторого* $i_0 = i_0(\varepsilon, \vartheta)$. Построенное так семейство функций обозначим

$$\mathcal{F}(p) \doteq \mathrm{cl}\{\, t \to p_\tau(t)\colon \tau \in \mathbb{R}\,\}.$$

Это семейство содержит наряду с функциями $p_\tau(t)$ (полученными из $p(t)$ с помощью простого сдвига на константу τ) все предельные функции

$$q(t) \equiv \mathrm{const} \in [-1, 1]$$

(полученные на различных последовательностях $\{\tau_i\}$, $\tau_i \to \infty$) и функцию $q(t) \equiv 0$ (полученную из функции $p(t)$ на любой последовательности $\{\tau_i\}$, $\tau_i \to -\infty$). Определим далее поток h^τ на множестве $\mathcal{F}(p)$ равенством $\tau \to h^\tau q \doteq q_\tau$, где $q \in \mathcal{F}(p)$.

Тем самым построена динамическая система $(\mathcal{F}(p), h^\tau)$, которую, следуя за А. А. Марковым (мл.), называют *динамической системой сдвигов.* Пусть $\omega(p)$ — множество всех частичных пределов (в локально-компактной топологии) движения $\tau \to h^\tau p$ при $\tau \to +\infty$. Множество $\omega(p)$ является *омега-предельным* множеством точек $q \in \mathcal{F}(p)$, отвечающих начальной точке p (*омега-предельным* множеством), и, несложно проверить (см. (3.1)), что оно определяется равенством

$$\omega(p) = \{\, q(t) \equiv \mathrm{const} \in [-1,1] \,\}.$$

Аналогичным образом, множество $\alpha(p)$, состоящее из одной функции $q(t) \equiv 0$, является *альфа-предельным* множеством, отвечающим точке p. Эти множества $\omega(p)$ и $\alpha(p)$ характеризуют асимптотические свойства функции $p(t)$ и ее сдвигов.

О п р е д е л е н и е 4.1. Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *инвариантным* относительно потока h^t, если $\mathrm{orb}(x) \subset M$ для каждой точки $x \in M$. Аналогично определяются *положительно инвариантные* и *отрицательно инвариантные* множества: $\mathrm{orb}_+(x) \subset M$ или $\mathrm{orb}_-(x) \subset M$ для каждой точки $x \in M$.

Т е о р е м а 4.1. *Каждое из множеств $\omega(x)$, $\alpha(x)$ инвариантно и замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что омега-предельное множество $\omega(x)$ инвариантно. Фиксируем $x_0 \in \omega(x)$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Достаточно доказать, что $h^\tau x_0 \in \omega(x)$. Найдется такая последовательность $\{t_k\}$, что $t_k \to \infty$ и $\rho(h^{t_k}x, x_0) \to 0$. В силу леммы 3.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что

$$\rho(h^{t_k+\tau}x, h^\tau x_0) \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех} \quad k \geqslant k_0.$$

Следовательно, $\rho(h^{t_k+\tau}x, h^\tau x_0) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $t_k + \tau \to \infty$ и $h^{t_k+\tau}x = h^{t_k}h^\tau x$, то $h^\tau x_0$ является омега-предельной точкой для x, и поэтому $h^\tau x_0 \in \omega(x)$.

Докажем, что множество $\omega(x)$ замкнуто. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_k\}$ точек x_k из $\omega(x)$. Пусть x_0 — предел этой последовательности. Надо показать, что точка x_0 находится в $\omega(x)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_0, что $\rho(x_k, x_0) \leqslant \varepsilon/2$ при всех $k \geqslant k_0$. Кроме того, для каждого k существует момент времени t_k такой, что $\rho(h^{t_k}x, x_k) \leqslant \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\rho(h^{t_k}x, x_0) \leqslant \rho(h^{t_k}x, x_k) + \rho(x_k, x_0) \leqslant \varepsilon,$$

то есть x_0 является омега-предельной точкой для точки x. □

В дальнейшем расстояние $\rho(x, \Sigma_0)$ от точки x до компактного множества $\Sigma_0 \subset \Sigma$ означает кратчайшее расстояние:

$$\rho(x, \Sigma_0) \doteq \min\{\rho(x, x_0) \colon x_0 \in \Sigma_0\}.$$

Аналогично, расстояние между двумя компактными множествами Σ_0 и Σ_1 определяется равенством

$$\rho(\Sigma_0, \Sigma_1) = \min\{\rho(x_0, x_1) \colon x_0 \in \Sigma_0,\ x_1 \in \Sigma_1\}. \tag{4.1}$$

Замкнутая ε-окрестность $O_\varepsilon(\Sigma_0)$ компактного множества Σ_0 определяется равенством

$$O_\varepsilon(\Sigma_0) = \{x \in \Sigma \colon \rho(x, \Sigma_0) \leqslant \varepsilon\}.$$

Очевидно, что для любых двух компактных множеств Σ_0, Σ_1 и любой точки $x \in \Sigma$ имеет место неравенство треугольника

$$\rho(\Sigma_0, \Sigma_1) \leqslant \rho(x, \Sigma_0) + \rho(x, \Sigma_1),$$

и если $x \in \Sigma_0$, то в силу равенства (4.1) выполнено неравенство $\rho(\Sigma_0, \Sigma_1) \leqslant \rho(x, \Sigma_1)$.

Компактность и связность предельных множеств. Докажем теорему об основных свойствах предельных множеств.

Т е о р е м а 4.2. *Если замыкание положительной полутраектории* $\mathrm{orb}_+(x)$ *движения* $t \to h^t x$ *компактно, то омега-предельное множество* $\omega(x)$ *непусто, компактно и связно. Кроме того,* $\rho\bigl(h^t x, \omega(x)\bigr) \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Аналогичные утверждения верны и для альфа-предельного множества* $\alpha(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\overline{\mathrm{orb}}_+(x)$ замыкание положительной полутраектории $\mathrm{orb}_+(x)$ точки x. Если множество $\overline{\mathrm{orb}}_+(x)$ компактно, то из всякой последовательности $\{h^{t_k}x\}$, $t_k \to \infty$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой является омега-предельной точкой. Следовательно, омега-предельное множество $\omega(\sigma)$ непусто.

Покажем, что омега-предельное множество $\omega(\sigma)$ компактно. Действительно, пусть дана произвольная последовательность $\{x_k\}$ точек из $\omega(\sigma)$. Тогда для любого положительного ε найдется такой момент времени t_k, что $\rho(h^{t_k}x, x_k) \leqslant \varepsilon/2$. Выделим из последовательности $\{h^{t_k}x\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{h^{t_{k_i}}x\}$. Тогда, начиная с некоторого i, выполнено неравенство $\rho(h^{t_{k_i}}x, \widehat{x}) \leqslant \varepsilon/2$, где $\widehat{x}$ — предел подпоследовательности $\{h^{t_{k_i}}x\}$ и, следовательно, $\widehat{x} \in \omega(\sigma)$. Поэтому

$$\rho(x_{k_i}, \widehat{x}) \leqslant \rho(x_{k_i}, h^{t_{k_i}}x) + \rho(h^{t_{k_i}}x, \widehat{x}) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$ сходится к $\widehat{x}$.

Докажем, что $\rho\bigl(h^t x, \omega(x)\bigr) \to 0$ при $t \to \infty$. Если это не так, то найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_k\}$ такие, что выполнены неравенства

$$\rho\bigl(h^{t_k}x, \omega(x)\bigr) \geqslant \varepsilon, \quad t_k \to \infty. \tag{4.2}$$

Последовательность $\{h^{t_k}\sigma\}$ имеет предельную точку (обозначим ее $\widehat{x}$), и $\widehat{x} \in \omega(x)$. Переходя в неравенстве (4.2) к пределу на соответствующей подпоследовательности, приходим к противоречию $\rho\bigl(\widehat{x}, \omega(\sigma)\bigr) \geqslant \varepsilon$.

Покажем, кроме того, что множество $\omega(x)$ связно. Если это неверно, то

$$\omega(x) = \omega^0(x) \bigcup \omega^1(x),$$

где $\omega^0(x)$ и $\omega^1(x)$ замкнуты и $\omega^0(x) \bigcap \omega^1(x) = \varnothing$. Следовательно, в силу компактности $\omega^i(x)$ $\rho\bigl(\omega^0(x), \omega^1(x)\bigr) = \varepsilon > 0$. Далее, ясно, что найдутся две такие последовательности $\{t_k\}$ и $\{\tau_k\}$, что $t_k \to \infty$, $\tau_k \to \infty$ и

$$h^{t_k}x \in O_{\varepsilon/3}\bigl(\omega^0(x)\bigr), \quad h^{\tau_k}x \in O_{\varepsilon/3}\bigl(\omega^1(x)\bigr).$$

Эти последовательности можно выбрать так, что выполнены неравенства

$$t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \cdots < t_k < \tau_k < t_{k+1} < \cdots .$$

Из непрерывности функции $t \to \rho\bigl(h^t x, \omega^0(x)\bigr)$ и неравенств

$$\rho\bigl(h^{t_k}x, \omega^0(x)\bigr) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\rho\bigl(h^{\tau_k}x, \omega^0(x)\bigr) \geqslant \rho\bigl(h^{\tau_k}x, O_{\varepsilon/3}(\omega^0(x))\bigr) \geqslant \rho\bigl(O_{\varepsilon/3}(\omega^0(x)), O_{\varepsilon/3}(\omega^1(x))\bigr) = \frac{\varepsilon}{3}$$

следует, что найдется последовательность $\{\vartheta_k\}$, для которой

$$\rho(h^{\vartheta_k}\sigma, \Sigma^0_\omega) = \varepsilon/3, \quad t_k \leqslant \vartheta_k \leqslant \tau_k. \tag{4.3}$$

Переходя в равенствах (4.3) к пределу (возможно, на подпоследовательности), получим, что $\rho\big(\widehat{x}, \omega^0(x)\big) = \varepsilon/3$, где $\widehat{x} = \lim h^{\vartheta_k}x$ — омега-предельная точка и, следовательно, $\widehat{x} \in \omega(x)$. Но $\widehat{x} \notin \omega^0(x)$, а в силу неравенства (4)

$$\rho\big(\widehat{x}, \omega^1(x)\big) \geqslant \rho(\omega^0(x), \omega^1(x)) - \rho\big(\widehat{x}, \omega^0(x)\big) = 2\varepsilon/3,$$

$\widehat{x} \notin \omega^1(x)$, что противоречит равенству $\omega(x) = \omega^0(x) \bigcup \omega^1(x)$. $\square$

З а д а ч а 4.1. Пусть M — компактное выпуклое подмножество пространства Σ. Докажите, что для любой точки $x \in \Sigma$ функция $t \to \rho(h^t x, M)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Г л а в а 2. Минимальные множества динамической системы, рекуррентность и почти периодичность

§ 5. Минимальные множества и рекуррентные движения

Минимальные множества. Если инвариантное множество минимально, то оно состоит из рекуррентных по Дж. Д. Биркгофу движений. Введем необходимые определения.

О п р е д е л е н и е 5.1. Множество $M \subset \Sigma$, где (Σ, g^t) — динамическая система, называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно относительно потока h^t и не содержит собственного подмножества, обладающего этими свойствами.

Непосредственно из определения 5.1 следует характеристическое свойство минимальности: *множество M минимально в том и только в том случае, если для любой точки $x \in M$ замыкание траектории* $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ *совпадает с M.* Действительно, множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ инвариантно, замкнуто и содержится в M. Если для некоторой точки $x \in M$ множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ не совпадает с M, то оно является собственной частью M.

Т е о р е м а 5.1. *Всякое инвариантное компактное множество содержит компактное минимальное подмножество.*

О п р е д е л е н и е 5.2. Пусть M — компактное инвариантное множество в полном метрическом пространстве Σ и $x \in M$. Движение $t \to h^t x$ называется *рекуррентным*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon, x) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon\ \rho(h^\tau x, x) \leqslant \varepsilon\} \tag{5.1}$$

относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$, то есть найдется такое $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $s \in \mathbb{R}$ отрезок $[s, s+\vartheta]$ имеет непустое пересечение с множеством $\Delta(\varepsilon)$. В частности, если $x \in \Sigma$ и множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ компактно, то движение $t \to h^t x$ рекуррентно в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ множество (5.1) относительно плотно на $\mathbb{R}$. Если движение $t \to h^t x$ рекуррентно, то точка x называется *рекуррентной*.

Т е о р е м а 5.2. *Движение $t \to h^t\sigma$ в компактном пространстве Σ рекуррентно в том и только в том случае, если для любых $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$ множество*

$$\theta(\varepsilon, \vartheta) = \theta(\varepsilon, \vartheta, x) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon\ \max_{|t| \leqslant \vartheta} \rho(h^{t+\tau}x, h^t x) \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{5.2}$$

(ε, ϑ)-почти периодов относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка x рекуррентна, то для заданных ε и ϑ найдется $\delta > 0$, что для любой точки $\tau \in \Delta(\delta)$ и всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$ выполнено неравенство

$$\rho(h^{t+\tau}x, h^t x) \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому $\tau \in \theta(\varepsilon, \vartheta)$. Так как множество $\Delta(\delta)$ относительно плотно, то множество $\theta(\varepsilon, \vartheta)$ тоже относительно плотно. Обратное утверждение очевидно. □

Компактное множество

$$\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta) \doteq \{h^t x\colon\ t \in [t_0, t_0 + \vartheta]\} \tag{5.3}$$

точек фазового пространства Σ будем называть *дугой траектории* $\operatorname{orb}(x)$ временно́й длины ϑ. Далее, *ε-трубкой* дуги (5.3) назовем множество точек фазового пространства Σ, отстоящих от дуги (5.3) не более чем на ε. Пусть $O_\varepsilon(\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta))$ — ε-трубка дуги, определенной равенством (5.3).

Рекуррентные движения. *Характеристическим свойством* рекуррентности движения $t \to h^t x$ в компактном пространстве Σ служит следующее свойство: *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\vartheta > 0$, что любая дуга $\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)$ временно́й длины ϑ аппроксимирует траекторию* $\operatorname{orb}(x)$ *с точностью до* ε, то есть

$$\operatorname{orb}(x) \subseteq O_\varepsilon\big(\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)\big)$$

для любого $t_0 \in \mathbb{R}$.

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\vartheta > 0$, обеспечивающее следующее свойство: каждому $t \in \mathbb{R}$ и любому t_0 отвечает такой момент времени $s \in [t_0, t_0 + \vartheta]$, что $\rho(h^t x, h^s x) \leqslant \varepsilon$. Но последнее неравенство, очевидно, выполнено при $s = t + \tau$ и любом

$$\tau \in \theta(\varepsilon, \vartheta) \bigcap [t_0 - t, t_0 - t + \vartheta],$$

где $\theta(\varepsilon, \vartheta)$ — множество (ε, ϑ)-почти периодов движения $t \to h^t x$ (см. (5.2)).

Несложно доказывается, что всякая точка, лежащая на траектории рекуррентного движения, тоже рекуррентна, то есть если движение $t \to h^t x$ рекуррентно, то для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ движение $t \to h^t(h^\tau x)$ тоже рекуррентно. Поэтому каждое из множеств $\Delta(\varepsilon, \widehat{x})$ и $\theta(\varepsilon, \vartheta, \widehat{x})$ (см. (5.1) и (5.2)) относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$ для всех $\widehat{x} \in \operatorname{orb}(x)$. Более того, из характеристического свойства рекуррентности следует, что если точка x рекуррентна, то всякая точка $\widehat{x}$ из замыкания $\overline{\operatorname{orb}}(x)$ траектории $\operatorname{orb}(x)$ тоже рекуррентна.

Л е м м а 5.1. *Замыкание* $\overline{\operatorname{orb}}(x)$ *траектории* $\operatorname{orb}(x)$ *рекуррентного движения* $t \to h^t x$ *в компактном пространстве компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое число $\vartheta > 0$, что

$$\operatorname{orb}(x) \subseteq O_{\varepsilon/2}\big(\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)\big).$$

В силу компактности дуги $\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)$ существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $\{x_1 \dots x_r\}$ (иными словами, для любой точки x^* дуги $\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)$ найдется такой индекс $i \in \{1 \dots r\}$, что $x^* \in O_{\varepsilon/2}(x_i)$). Поэтому из замкнутости множества $O_{\varepsilon/2}(\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta))$ следует включение

$$\overline{\operatorname{orb}}(x) \subseteq O_{\varepsilon/2}\big(\gamma(x, t_0, t_0 + \vartheta)\big).$$

Далее непосредственно проверяется, что выбранное множество точек $\{x_1 \dots x_r\}$ образует ε-сеть для множества $\overline{\operatorname{orb}}(x)$. □

Теорема о рекуррентности. Сформулированное ниже утверждение принадлежит Дж. Д. Биркгофу.

Т е о р е м а 5.3. *Всякая точка x минимального компактного множества порождает рекуррентное движение $t \to h^t x$. Верно и обратное утверждение, если точка x в компактном пространстве порождает рекуррентное движение, то множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ минимально и*

$$\alpha(x) = \overline{\mathrm{orb}}_-(x) = \overline{\mathrm{orb}}(x) = \overline{\mathrm{orb}}_+(x) = \omega(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M есть минимальное компактное множество в Σ и $x \in M$. Покажем, что движение $t \to h^t x$ рекуррентно. Если это не так, то найдутся число $\varepsilon > 0$, последовательность отрезков $[t_i - \vartheta_i, t_i + \vartheta_i]$, где $\vartheta_i \to \infty$, и последовательность таких точек τ_i, что

$$h^{\tau_i} x \notin O_\varepsilon\big(\gamma(\sigma, t_i - \vartheta_i, t_i + \vartheta_i)\big)$$

(другими словами, траектория $\mathrm{orb}(x)$ не аппроксимируется дугой

$$\gamma(x, t_i - \vartheta_i, t_i + \vartheta_i) = \gamma(h^{t_i} x, -\vartheta_i, \vartheta_i)$$

длины $2\vartheta_i$ с точностью до ε).

Рассмотрим две последовательности $\{x_i\}$ и $\{x_i^*\}$ точек, лежащих на траектории $\mathrm{orb}(x) : x_i = h^{\tau_i} x$, $x_i^* = h^{t_i} x$. Каждая из этих последовательностей имеет предельную точку, и мы, не усложняя обозначений, будем считать, что сами последовательности имеют предел. Пусть $\widehat{x}$ — предел первой, а x^* — второй последовательности. Покажем тогда, что множество $\overline{\mathrm{orb}}(x^*)$ является собственной частью множества M.

Фиксируем $\vartheta > 0$ и рассмотрим дугу $\gamma(x^*, -\vartheta, \vartheta)$ траектории $\mathrm{orb}(x^*)$ длины 2ϑ. Пусть $\delta > 0$ таково, что из неравенства $\rho(x^*, x_0) \leqslant \delta$ для всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$ следует неравенство

$$\rho(h^t x^*, h^t x_0) \leqslant \varepsilon/3.$$

Далее, найдется такое i, что

$$\vartheta \leqslant \vartheta_i, \quad \rho(x^*, x_i^*) \leqslant \delta, \quad \rho(\widehat{x}, x_i) \leqslant \varepsilon/3.$$

Следовательно, $\rho(h^t x^*, h^t x_i^*) \leqslant \varepsilon/3$ при всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$, но с учетом неравенств

$$|t| \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_i$$

имеем следующее неравенство:

$$\rho(h^t x_i^*, x_i) = \rho(h^{t+t_i} x, x_i) \geqslant \varepsilon.$$

Из полученных неравенств и неравенства $\rho(\widehat{x}, x_i) \leqslant \varepsilon/3$ при всех $|t| \leqslant \vartheta$ следует неравенство $\rho(\widehat{x}, h^t x^*) \geqslant \varepsilon/3$, что ввиду произвольности ϑ влечет неравенство $\rho(\widehat{x}, \overline{\mathrm{orb}}(x^*)) \geqslant \varepsilon/3$. Так как $x^* \in M$, то множество $\overline{\mathrm{orb}}(x^*)$ является собственной частью множества M, что противоречит минимальности M. Следовательно, всякое движение в M рекуррентно.

Покажем теперь, что если x — рекуррентная точка, то выполнено равенство

$$\overline{\mathrm{orb}}(x) = \omega(x).$$

Действительно, в силу рекуррентности точки x для всякого положительного ε найдется относительно плотная последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что $\rho(h^{\tau_i} x, x) \leqslant \varepsilon$. Поэтому найдется такая последовательность $\{t_i\}$, что $t_i \to \infty$ и $h^{t_i} x \to x$. Следовательно, в силу инвариантности и замкнутости множества $\omega(x)$ имеет место включение $x \in \omega(x)$, и поэтому $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subseteq \omega(x)$.

Пусть $x_0 \in \alpha(\sigma)$, тогда $\overline{\mathrm{orb}}(x_0) \subset \alpha(x)$. Если

$$\overline{\mathrm{orb}}(x_0) \bigcap \overline{\mathrm{orb}}(x) \neq \varnothing,$$

то $\overline{\mathrm{orb}}(x_0) = \overline{\mathrm{orb}}(x)$ (в силу инвариантности). Если же множества $\overline{\mathrm{orb}}(x_0)$ и $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ не пересекаются, то (в силу их компактности)

$$\rho(\overline{\mathrm{orb}}(x_0), \overline{\mathrm{orb}}(x)) = \varepsilon > 0.$$

С другой стороны, найдется последовательность $\{t_i\}$ такая, что $h^{t_i}x \to x_0$. Следовательно, $\overline{\mathrm{orb}}(x_0) = \overline{\mathrm{orb}}(x)$ (в силу произвольности x_0), и поэтому $\omega(x) \subset \overline{\mathrm{orb}}(x)$.

Отметим далее, что, не уменьшая общности, мы можем считать все последовательности $\{t_i\}$, участвующие в доказательстве равенства $\overline{\mathrm{orb}}(x) = \omega(x)$, неотрицательными ($t_i \geqslant 0$), поэтому равенство $\overline{\mathrm{orb}}_+(x) = \omega(x)$ доказывается аналогично равенству $\overline{\mathrm{orb}}(x) = \omega(x)$.

Пусть точка x рекуррентна. Покажем, что множество $\omega(x)$ (а следовательно, и множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$) минимально. Если это неверно, то найдется такое $x_0 \in \omega(x)$, что компактное и инвариантное множество $\overline{\mathrm{orb}}(x_0)$ является собственной частью множества $\omega(x)$. Но это противоречит только что доказанному равенству $\overline{\mathrm{orb}}(x_0) = \omega(x)$. □

§ 6. Почти периодические движения динамической системы

Определение почти периодического движения. Почти периодические движения занимают промежуточное положение между периодическими и рекуррентными движениями и зачастую более точно (по сравнению с периодическими движениями) моделируют колебательные процессы в прикладных задачах. Теории почти периодических движений и функций посвящены монографии [16–18].

Определение 6.1. Движение $t \to h^t x$ называется *почти периодическим* (по Бору), если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов

$$\theta(\varepsilon) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(h^{t+\tau}x, h^t x) \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{6.1}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. В этом случае мы будем говорить также, что *точка x почти периодична.*

Если точка x почти периодична, то в силу определения 6.1 она рекуррентна, и поэтому замыкание $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ траектории $\mathrm{orb}(x)$ является минимальным компактным множеством. Следовательно, $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ состоит из рекуррентных точек. В формулируемой ниже теореме Бохнера утверждается, что в действительности множество $\overline{\mathrm{orb}}(x)$ состоит только из почти периодических точек. Для доказательства теоремы 6.1 нам понадобится лемма о равномерной двусторонней устойчивости по Ляпунову почти периодической точки относительно своей траектории.

Лемма 6.1. *Допустим, что движение $t \to h^t x$ почти периодично. Тогда всякому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любых двух точек $\varkappa, \varkappa_0 \in \mathrm{orb}(x)$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\varkappa, \varkappa_0) \leqslant \delta$, при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\rho(h^t\varkappa, h^t\varkappa_0) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\ell_\varepsilon > 0$, что

$$\Delta(\varepsilon/3, x) \bigcap [t, t+\ell_\varepsilon] \neq \varnothing$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Здесь

$$\Delta(\varepsilon, x) = \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_t \rho(h^{t+\tau}x, h^t x) \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{6.2}$$

— множество ε-почти периодов точки x. Отметим ещё, что непосредственно из (6.2) вытекает следующее свойство:

$$\text{если} \quad \varkappa \in \operatorname{orb}(x), \quad \text{то} \quad \Delta(\varepsilon, x) = \Delta(\varepsilon, \varkappa).$$

Фиксируем произвольные $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \Delta(\varepsilon/3, \sigma)$. Тогда

$$\rho(h^{t+\tau}\varkappa, h^t\varkappa) \leqslant \varepsilon/3, \quad \rho(h^{t+\tau}\varkappa_0, h^t\varkappa_0) \leqslant \varepsilon/3.$$

Выберем теперь такое $\delta_\varepsilon > 0$, что из неравенства $\rho(\varkappa, \varkappa_0) \leqslant \delta_\varepsilon$ при всех $\eta \in [0, \ell_\varepsilon]$ следует неравенство $\rho(h^\eta\varkappa, h^\eta\varkappa_0) \leqslant \varepsilon/3$. Пусть, кроме того, $\tau \in [-t, -t + \ell_\varepsilon]$, тогда $t + \tau \in [0, \ell_\varepsilon]$, и поэтому

$$\rho(h^{t+\tau}\varkappa, h^{t+\tau}\varkappa_0) \leqslant \varepsilon/3.$$

Отметим теперь, что в силу компактности множества $\overline{\operatorname{orb}}(x)$ и непрерывности функции $(\varkappa, \varkappa_0) \to \rho(\varkappa, \varkappa_0)$ константу $\delta_\varepsilon > 0$ можно выбрать общей для всех точек $\varkappa, \varkappa_0 \in \operatorname{orb}(x)$. Поэтому, с учетом доказанных $\varepsilon/3$-неравенств, получаем для всех $t \in \mathbb{R}$ неравенство $\rho(h^t\varkappa, h^t\varkappa_0) \leqslant \varepsilon$. □

Основная теорема о почти периодических движениях.

Т е о р е м а 6.1. *Если движение $t \to h^t x$ почти периодично и не совпадает с положением равновесия и периодическим движением, то для любой точки $x^* \in \overline{\operatorname{orb}}(x)$ движение $t \to h^t x^*$ тоже почти периодично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякой точки x^*, находящейся на траектории $\operatorname{orb}(x)$, движение $t \to h^t x^*$ почти периодично (сдвиг почти периодического движения — почти периодическое движение). Пусть $x^* \in \overline{\operatorname{orb}}(x)$ и $x^* \notin \operatorname{orb}(x)$. Тогда существует последовательность $\{x_i\}$, где $x_i = h^{t_i}x \in \operatorname{orb}(x)$, такая, что $x_i \to x^*$. Покажем, что движение $t \to h^t x^*$ тоже почти периодическое.

Так как последовательность $\{x_i\}$ фундаментальная, то для любого положительного δ найдется такой номер k_δ, что неравенство $\rho(x_i, x_j) \leqslant \delta$ выполнено для всех индексов $i, j \geqslant k_\delta$. Далее, из леммы 6.1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_ε, что для всех $i, j \geqslant k_\varepsilon$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства $\rho(h^t x_i, h^t x_j) \leqslant \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что последовательность функций $t \to h^t x_i$ фундаментальная в полном метрическом пространстве $C(\mathbb{R}, \Sigma)$ с метрикой $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \rho(h^t\varkappa, h^t\varkappa_0)$. Следовательно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(h^t x_i, h^t x^*) \to 0, \quad i \to \infty.$$

Покажем, что движение $t \to h^t x^*$ почти периодично. Действительно, пусть $\tau \in \Delta(\varepsilon, x)$, тогда $\tau \in \Delta(\varepsilon, x_i)$ при любом i. Следовательно, неравенство $\rho(h^{t+\tau}x_i, h^t x_i) \leqslant \varepsilon$ выполнено при всех $t \in \mathbb{R}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получим неравенство

$$\rho(h^{t+\tau}x^*, h^t x^*) \leqslant \varepsilon,$$

из которого следует доказательство теоремы. □

Г л а в а 3. Динамическая система сдвигов и конструкция Фавара

§ 7. Динамическая система сдвигов

Локально компактная топология. Пусть X — линейное конечномерное пространство с нормой $|x|$, $\mathfrak{X}$ — линейное пространство непрерывных функций, определенных на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и принимающих значения в X. Введем на пространстве $\mathfrak{X}$ метрику Бебутова (см. [4, 5, гл. 6, § 9])

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min\Big\{ |\varphi(t) - \psi(t)|,\ |t|^{-1} \Big\}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{X}. \tag{7.1}$$

Л е м м а 7.1. *Пространство $\mathfrak{X}$ с метрикой* (7.1) *является полным сепарабельным метрическим пространством. Топология, порожденная метрикой* (7.1), *эквивалентна топологии равномерной сходимости на отрезках* (*называемой локально компактной топологией*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из определения метрики (7.1) следует, что неравенство $\rho(\varphi, \psi) \leqslant \varepsilon$ влечет за собой неравенство $|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$, выполненное для всех таких t, что $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$. Следовательно, из сходимости $\rho(\varphi^k, \varphi) \to 0$ последовательности $\{\varphi^k\}$ функций $\varphi^k \in \mathfrak{X}$ к функции $\varphi \in \mathfrak{X}$ следует сходимость $\varphi^k(t) \to \varphi(t)$, равномерная на любом отрезке $I_\vartheta \doteq [-\vartheta, \vartheta]$.

Пусть теперь заданы функциональная последовательность $\{\varphi^k\}$, где $\varphi^k \in \mathfrak{X}$, и функция $t \to \varphi(t) \in X$, определенная при всех $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что для любого отрезка I_ϑ сужение последовательности $\{\varphi^k\}$ на I_ϑ равномерно сходится к φ. Следовательно, функция $t \to \varphi(t)$ непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для каждого $k \geqslant k_0$ при всех t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$, выполнено неравенство $|\varphi^k(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$. Из этих двух неравенств, как легко заметить, при каждом t выполнено неравенство

$$\min\Big\{ |\varphi^k(t) - \varphi(t)|,\ |t|^{-1} \Big\} \leqslant \varepsilon,$$

из которого ясно, что $\rho(\varphi^k, \varphi) \leqslant \varepsilon$. Мы показали, что сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ к φ в метрике ρ эквивалентна сходимости, равномерной на отрезках.

Отметим теперь, что пространство $\mathfrak{X}$ имеет счетную базу (например, счетную базу образует множество полиномов вида

$$a_0 t^n + \cdots + a_n$$

с рациональными коэффициентами $a_0 \ldots a_n \in X$, $n = 0, 1 \ldots$). □

Пусть задано подмножество $\mathfrak{X}_0$ пространства $\mathfrak{X}$. Каждой точке φ множества $\mathfrak{X}_0$ поставим в соответствие *движение* $\tau \to g^\tau \varphi$, где

$$g^\tau \varphi \doteq \varphi_\tau(\cdot), \quad \varphi_\tau(t) \doteq \varphi(t + \tau), \quad t \in \mathbb{R},$$

и *траекторию*

$$\operatorname{orb}(\varphi) \doteq \{\, g^\tau \varphi \in \mathfrak{X}_0 : \tau \in \mathbb{R} \,\},$$

а затем замкнем её в метрике Бебутова. Объединение замыкания всех траекторий, построенных по каждой точке φ множества $\mathfrak{X}_0$, обозначим $\mathcal{R}(\mathfrak{X}_0)$ и вместе с *оператором сдвига* g^τ построим динамическую систему $(\mathcal{R}(\mathfrak{X}_0), g^\tau)$, которая называется *динамической системой сдвигов* А. А. Маркова (мл.).

Рис. 4. Михаил Валерьевич Бебутов (1913–1942)

Л е м м а 7.2. *Пара* $(\mathfrak{X}, g^\tau)$ *образует топологическую динамическую систему.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $g^\tau\varphi$ принадлежит $\mathfrak{X}$ для любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathfrak{X}$. Кроме того, $g^\tau\varphi\big|_{\tau=0} = \varphi$ и $g^{\tau+s} = g^\tau g^s$. Далее, пусть $(\tau_k, \varphi^k) \to (\tau, \varphi)$, $k \to \infty$, тогда сходимость $g^{\tau_k}\varphi^k$ к $g^\tau\varphi$ следует из неравенства

$$|\varphi^k(t+\tau_k) - \varphi(t+\tau)| \leqslant |\varphi^k(t+\tau_k) - \varphi(t+\tau_k)| + |\varphi(t+\tau_k) - \varphi(t+\tau)|.$$

Л е м м а 7.3. *Для любой ограниченной и равномерно непрерывной на прямой* $\mathbb{R}$ *функции* $t \to \varphi(t) \in X$ *замыкание* $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ *траектории*

$$\mathrm{orb}(\varphi) \doteq \{g^t\varphi \in \mathfrak{X} \colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

в метрике (7.1) *компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что семейство функций

$$\{\psi\} \doteq \{\psi \colon \mathbb{R} \to X, \quad \psi \in \overline{\mathrm{orb}}(\varphi)\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $\mathbb{R}$.

Для всякой функции ψ из этого семейства найдется последовательность $\{g^{t_k}\varphi\}$, сходящаяся к ψ в локально компактной топологии. Поэтому равномерная ограниченность семейства $\{\psi\}$ с учетом неравенства

$$|\psi(t)| \leqslant |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

следует из неравенства

$$\sup_t |\psi(t)| \leqslant \sup_t |\varphi(t)|,$$

а равностепенная непрерывность — из неравенства

$$|\psi(t+\tau) - \psi(t)| \leqslant |\psi(t+\tau) - \varphi_{t_k}(t+\tau)| + |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t+\tau) - \varphi_{t_k}(t)|, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Из этой леммы и теоремы 4.2 следует, что если функция φ равномерно непрерывна и ограничена на числовой прямой $\mathbb{R}$, то омега-предельное множество $\omega(\varphi)$ непусто, компактно и связно. Если, кроме того, движение $\tau \to g^\tau\varphi$ рекуррентно, то в силу теоремы 5.3 множество $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ минимально и

$$\omega(\varphi) = \overline{\mathrm{orb}}(\varphi) = \overline{\mathrm{orb}}_+(\varphi).$$

Рекуррентность и почти периодичность. Если омега-предельное множество $\omega(\varphi)$, отвечающее функции $\varphi \in \mathfrak{X}$, содержит эту функцию ($\varphi \in \omega(\varphi)$), то найдется такая последовательность $\{\tau_i\}$ моментов времени, что $\tau_i \to \infty$ и $\rho(\varphi_{\tau_i}, \varphi) \to 0$. Последнее означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ и любого t_0 множество

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\vartheta} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{7.2}$$

имеет непустое пересечение с полуинтервалом $[t_0, \infty)$. Функция φ, обладающая этим свойством, называется P^+-устойчивой (устойчивой по Пуассону вправо). Понятным образом вводятся P^--устойчивость и P-устойчивость (в этом последнем случае имеет место включение $\varphi \in \alpha(\varphi) \bigcap \omega(\varphi)$).

Таким образом, P^+-устойчивость характеризует некоторое свойство «повторяемости» (говорят еще «возвращаемости») траектории $\tau \to \varphi_\tau$, отвечающей функции φ: *существует бесконечно возрастающая последовательности сдвигов φ_{τ_i}, возвращающая эти сдвиги в ε-окрестность функции φ временно́й длины 2ϑ.* Рекуррентность и почти периодичность демонстрируют более сильные свойства возвращаемости.

О п р е д е л е н и е 7.1. Ограниченная и равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\varphi(t)$ со значениями в конечномерном пространстве X называется *рекуррентной*, если для любых положительных ε и ϑ множество

$$\varTheta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\vartheta} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{7.3}$$

(ε, ϑ)-почти периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$. Если же для всякого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество

$$\varTheta(\varepsilon) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\Big\} \tag{7.4}$$

ε-почти периодов, то функция $\varphi(t)$ называется *почти периодической* (в смысле Бора).

Л е м м а 7.4. *Пусть функция $t \to \varphi(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой $\mathbb{R}$. Движение $\tau \to g^\tau\varphi$ рекуррентно* (*см. определение* 5.2) *в том и только в том случае, если функция $\varphi(t)$ рекуррентна. Аналогично, движение $\tau \to g^\tau\varphi$ почти периодично* (*определение* 6.1) *в том и только в том случае, если функция $\varphi(t)$ почти периодична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось, неравенство $\rho(\varphi, \psi) \leqslant \varepsilon$ эквивалентно неравенству $|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$, выполненному для всех $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$. Поэтому если $\tau \in \varTheta(\varepsilon, \vartheta)$, то

$$\tau \in \Delta(\delta) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \rho(h^\tau\varphi, \varphi)\big\}$$

при всех $\delta \in (0, \vartheta^{-1})$. Следовательно, из рекуррентности функции $\varphi(t)$ следует рекуррентность движения $\tau \to g^\tau\varphi$.

Пусть движение $\tau \to g^\tau\varphi$ рекуррентно. По заданным $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ выберем $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенствам $\delta \leqslant \varepsilon$ и $\delta \leqslant \vartheta^{-1}$. Тогда если $\tau \in \Delta(\delta)$, то $\tau \in \varTheta(\varepsilon, \vartheta)$.

Утверждение об эквивалентности двух определений почти периодичности доказывается аналогично. $\square$

З а д а ч а 7.1. Пусть X — конечномерное пространство с нормой $|x|$, $\mathbb{S}$ — линейное пространство локально интегрируемых по Лебегу функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to X$ с метрикой

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min \left\{ \int_t^{t+1} |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds,\ \frac{1}{|t|} \right\} \tag{7.5}$$

(пространство В. В. Степанова). Метрика (7.5) порождает топологию равномерной в среднем сходимости на отрезках (которая тоже называется локально компактной топологией). Поток на $\mathbb{S}$ определим обычным образом: $g^\tau\varphi = \varphi_\tau$, где $g^\tau\varphi(t) = \varphi(\tau + t)$.

Получите аналоги лемм 7.1, 7.2 и 7.3 для динамической системы $(\mathbb{S}, g^t)$. Введите определения рекуррентности и почти периодичности, отвечающие метрике (7.5), и получите аналог леммы 7.4 для пространства $\mathbb{S}$. Докажите следующее утверждение: если пространство X состоит из непрерывных на прямой $\mathbb{R}$ функций, то сходимость в пространстве (X, ϱ) с метрикой (7.5) эквивалентна сходимости в пространстве (X, ρ) с метрикой ρ, определенной равенством (7.1).

Задача о колеблемости. Рассмотрим пример применения *динамической системы сдвигов* в задаче о колеблемости нетривиальных решений уравнения

$$\ddot{y} + p(t)y = 0 \tag{7.6}$$

с заданной функцией (см. пример 4.1 на стр. 78)

$$p(t) = \begin{cases} \sin\bigl(\ln(1+t)\bigr), & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

С этой целью построим *замыкание* $\mathcal{R}(p)$ множества сдвигов функции $p(t)$ (уравнения (7.6)) в топологии *равномерной сходимости на отрезках.*

Напомним, что уравнение (7.6) называется *колеблющимся*, если:

(1) *для каждой точки* t_0 *любое нетривиальное решение уравнения* (7.6) *имеет на интервале* (t_0, ∞) *по крайней мере один нуль*

и уравнение (7.6) называется *равномерно колеблющимся*, если:

(2) *найдётся такое число* $\ell > 0$, *что для любого* $t_0 \in R$ *всякое нетривиальное решение уравнения* (7.6) *имеет по крайней мере один нуль на отрезке времени* $[t_0, t_0 + \ell]$.

Рассмотрим соответствующую уравнению (7.6) динамическую систему $(\mathcal{R}(p), g^\tau)$ и ω-предельное множество $\Omega(p)$. Множество $\Omega(p)$ состоит из функций, тождественно равных константам $p_0(t) \equiv c$, принадлежащим отрезку $[-1, 1]$. Следовательно, среди уравнений

$$\ddot{y} + cy = 0$$

есть не только *колеблющиеся*, но и *неколеблющиеся*, а это означает, что *уравнение* (7.6) *колеблющееся, но неравномерно относительно времени* t (*этот факт нуждается в доказательстве*).

§ 8. Конструкция Фавара

Линейная система дифференциальных уравнений и соответствующая ей динамическая система. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = F(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

с *ограниченной на оси* $\mathbb{R}$ *локально интегрируемой* по Лебегу функцией $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, удовлетворяющей условию равномерной непрерывности в среднем: *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое положительное число* δ, что неравенство

$$\int_t^{t+1} |F(s+\tau) - F(s)|\, ds \leqslant \varepsilon \tag{8.2}$$

выполнено для любых $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$.

Наряду с системой (8.1) рассмотрим семейство $\mathfrak{X}(F)$ систем, полученных из F замыканием множества сдвигов F в локально компактной топологии. Сказанное означает, что включение $G \in \mathfrak{X}(F)$ выполнено в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\{\tau_i\}$, что $\varrho(F_{\tau_i}, G) \to 0$ при всех $i \to \infty$, где метрика ϱ определяется равенством (7.5), или, что эквивалентно, для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется такой номер последовательности $k_{\varepsilon\vartheta}$, что выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant \vartheta} \int_t^{t+1} |F_{\tau_i}(s) - G(s)|\, ds \leqslant \varepsilon$$

для всех $i \geqslant k_{\varepsilon\vartheta}$.

Снабдим пространство $\mathfrak{X}(F)$ метрикой (7.5) и определим поток $\{g^\tau\}$ на $\mathfrak{X}(F)$ равенством

$$g^\tau G = G_\tau, \quad G \in \mathfrak{X}(F), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

где по-прежнему $G_\tau(t) \doteq G(\tau + t)$. Тогда мы имеем возможность изучать семейство систем

$$\dot{x} = A(g^t G)x,$$

зависящих от параметра G. Здесь функция $A\colon \mathfrak{X}(F) \to \mathbb{M}(n)$ определена равенством $A(g^t G) = G(t)$. Отметим еще, что в силу условий на функцию A пространство $\mathfrak{X}(F)$ *компактно и инвариантно* и поэтому имеет непустые альфа и омега-предельные множества (см. лемму 7.3 и теорему 4.2).

Вводя привычные обозначения

$$\Sigma = \mathfrak{X}(F), \quad \sigma = G, \quad A\colon \Sigma \to \mathbb{M}(n), \quad A(g^t\sigma) = \sigma(t) = G(t),$$

полученное семейство запишем в виде

$$\dot{x} = A(g^t\sigma)x, \quad \sigma \in \Sigma, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.3}$$

где σ — параметр, пробегающий пространство Σ. Особенность системы (8.3) состоит в том, что она стационарна относительно потока. Тем самым, рассуждая формально, нестационарной системе (8.1) можно поставить в соответствие «стационарную систему» (8.3), а точнее семейство систем (с параметром σ) со стационарной относительно сдвигов правой частью.

Эту конструкцию удобно использовать в ситуации, когда сужение системы (8.3) на омега-предельное множество $\omega(\sigma_0)$, $\sigma_0 \in \Sigma$, приводит к более обозримому семейству систем

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x, \quad \sigma \in \omega(\sigma_0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.4}$$

а свойство, которое мы изучаем у системы (8.3), наследуется системой (8.4).

Простой пример: если функция $F(t)$, порождающая систему (8.1), стремится при $t \to \infty$ к T-периодической функции $t \to H(t)$ (в смысле введенной метрики ϱ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой сдвиг $F_\tau(t)$, что

$$\int_t^{t+\tau} |F_\tau(s) - H(s)|\, ds \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \in [0, T]$) и система

$$\dot{x} = H(t)x$$

экспоненциально устойчива, то система (8.3) тоже экспоненциально устойчива. Действительно, в этом случае омега-предельное множество $\{H_\tau\}$ состоит из всех функций $t \to H(\tau + t)$, где $\tau \in [0, T]$. Оно компактно и минимально, а экспоненциальная устойчивость (совпадающая в этом примере с асимптотической устойчивостью) сохраняется при малых (в метрике ϱ) возмущениях исходной периодической системы.

Можно не фиксировать систему F, а рассматривать пространство $\mathfrak{X}$ всех систем вида (8.1) с локально интегрируемыми по Лебегу функциями $t \to F(t) \in \mathbb{M}(n)$ (n фиксировано). Тогда, проводя аналогичные рассуждения, мы получим динамическую систему $(\mathfrak{X}, h^t)$, содержащую все линейные системы дифференциальных уравнений заданной размерности. Это очень «обширная» динамическая система, и, не смотря на то, что $\mathfrak{X}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, а поток $\{g^t\}$ «устроен» достаточно просто, надеяться на содержательную математическую теорию в такой ситуации не приходится. Но в $\mathfrak{X}$ есть инвариантные компактные (а следовательно, есть и минимальные, см. теорему 5.1) множества. На таких множествах можно вводить дополнительные структуры (например, инвариантные вероятностные меры), и поэтому сужение потока на такие множества уже приводит к содержательным результатам.

Нелинейная система. Отметим теперь, что аналогичную конструкцию можно повторить для нелинейной системы

$$\dot{x} = q(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M,$$

где M — область в $\mathbb{R}^n$ и правая часть q ограничена и локально интегрируема по Лебегу относительно t на прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно x на любом компакте в M. Пусть $\mathfrak{X}(q)$ — пространство систем (функций $(t, x) \to \widehat{q}(t, x)$), полученных из q замыканием множества сдвигов q_τ функции q по переменной t в локально компактной топологии. Тогда включение $\widehat{q} \in \mathfrak{X}(q)$ выполнено в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\{\tau_i\}$, что для любых $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$ и всякого компакта $K \subset M$ найдется такой номер последовательности $k = k(\varepsilon, \vartheta, K)$, начиная с которого при всех $(t, x) \in [-\vartheta, \vartheta] \times K$ выполнено неравенство

$$\int_t^{t+\tau} |q_{\tau_i}(s, x) - \widehat{q}(s, x)|\, ds \leqslant \varepsilon, \quad i \geqslant k.$$

Определив на $\mathfrak{X}(q)$ поток $\{g^t\}$ равенством $g^\tau \widehat{q} = \widehat{q}_\tau$, получим топологическую динамическую систему $(\mathfrak{X}(q), g^t)$ и семейство систем дифференциальных уравнений, которое в понятных обозначениях можно записать в виде

$$\dot{x} = v(g^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n,$$

где $\Sigma = \mathfrak{X}(q)$, $\sigma = \widehat{q}$, $g^\tau\sigma = \widehat{q}_\tau$, $v(g^t\sigma, x) = \widehat{q}(t, x)$.

З а д а ч а 8.1. Докажите, что если функция $(t,x) \to q(t,x) \in M$ ограничена и локально интегрируема по Лебегу относительно t на числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно x на любом компакте в M, то $\mathfrak{X}(q)$ — полное (в компактно открытой топологии) сепарабельное пространство (см. доказательство леммы 7.1). Более того, пространство $(\mathfrak{X}(q), \varrho)$ компактно (см. доказательство леммы 7.3).

Задача о быстродействии. Рассмотрим принцип максимума Л. С. Понтрягина (задача о быстродействии [19]) содержащий управляемую систему

$$\dot{x} = v(t,x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

с геометрическими ограничениями U на допустимые управления $u(t)$, где U — компакт. Пусть заданы дополнительные граничные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0+\tau) = x_1,$$

функционал быстродействия

$$\tau\big(u(\cdot)\big) \to \min_{u(\cdot)\in U}.$$

Тогда имеет место *принцип максимума*

$$\max_{u\in U} H(t, x(t), \psi(t), u) = H\big(t, x(t), \psi(t), u(t)\big), \quad t \in [t_0, t_0+\tau],$$

где

$$H(t,x,\psi,u) = \psi v(t,x,u) = \psi_1 v_1(t,x,u) + \dots + \psi_n v_n(t,x,u)$$

— *гамильтониан*, $\big(x(t), u(t)\big)$ — допустимая пара, оптимальная в смысле быстродействия, $\psi(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi \, \frac{\partial v\big(t, x(t), u(t)\big)}{\partial x}.$$

П р и м е р 8.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin\alpha + u, \quad |u| \leqslant 1, \end{cases} \tag{8.5}$$

описывающую колебания математического маятника, снабженного мотором в точке подвеса. Предполагаем далее, что масса m груза (точки p) равна единице, а константа ω определяется равенством $\omega = \sqrt{\ell/g}$, где ℓ — длина маятника, g — ускорение свободного падения точки p.

Отметим теперь, что естественным фазовым пространством системы (8.5) является гладкое двумерное многообразие $M = S \times \mathbb{R}$, где S — окружность. Следовательно, локальные координаты точки p рассматриваемой системы (8.5) имеют вид $(\alpha \bmod 2\pi, v)$, где α — угол отклонения точки p от вертикали, $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (точки $-\pi$ и π отождествляются), а v — угловая скорость движения точки p, $v \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что управление маятником осуществляется с помощью *допустимых* позиционных управлений $u(\alpha, v)$, а задача состоит в построении допустимого позиционного управления $u(\alpha, v)$, приводящего маятник из всякой точки (α, v) фазового пространства M в заданную точку $(\pi, 0)$ за минимальное время $T(\alpha, v)$ (задача стабилизации маятника в нижней точке подвеса).

Рис. 5. Лев Семенович Понтрягин (1908–1988)

Рассмотрим сначала поведение траекторий *свободной* системы (8.5) (то есть системы (8.5) при управлении $u(t)$, тождественно равном нулю):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \alpha. \end{cases} \tag{8.6}$$

Система (8.6) имеет две особые точки $(0,0)$ и $(\pi,0)$ (точки $(-\pi,0)$ и $(\pi,0)$ отождествляются) и две *сепаратрисы*

$$v(\alpha) = \omega\sqrt{2(\cos\alpha + 1)}, \quad v(\alpha) = -\omega\sqrt{2(\cos\alpha + 1)} \tag{8.7}$$

из седла $(\pi,0)$ в седло $(-\pi,0)$, которые являются решениями двух задач Коши

$$\frac{dv}{d\alpha} = -\omega^2\frac{\sin\alpha}{v}, \quad v(0) = 2\omega, \qquad \frac{dv}{d\alpha} = -\omega^2\frac{\sin\alpha}{v}, \quad v(0) = -2\omega.$$

Остальные траектории системы (8.6) — замкнутые кривые. Они определяются при каждом значении параметра β равенством

$$v^2 = 2(\omega^2\cos\alpha + \beta),$$

где β меняется в следующих пределах: $-\omega^2 \leqslant \beta < \infty$. Отметим еще, что особым точкам $(0,0)$ и $(\pi,0)$ системы (8.6) отвечают значения параметра $\beta = -\omega^2$ и $\beta = \omega^2$. Кроме того, легко понять, что всякая точка фазового пространства системы (8.6), двигаясь вдоль своей траектории с возрастанием времени t, движется по часовой стрелке.

Рассмотрим область G_1 многообразия M, ограниченную двумя сепаратрисами (8.7), и две области G_2, G_3, объединение которых совпадает с областью $M \setminus \overline{G}_1$. Будем считать, что нижняя граница области G_2 ограничена первой сепаратрисой (8.7), а верхняя граница области G_3 — второй сепаратрисой. Построим теперь позиционное управление

$$u(\alpha, v) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (\alpha, v) \in G_1, \\ -1, & \text{если} \quad (\alpha, v) \in G_2 \bigcup G_3. \end{cases}$$

Тогда замкнутая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin\alpha + u(\alpha, v), \end{cases} \tag{8.8}$$

и несложно заметить, что все точки фазового пространства, двигаясь по траекториям системы (8.8), приходят в точку $(\pi, 0)$ за конечное время.

З а д а ч а 8.2. Представляет интерес найти время быстродействия для системы (8.5) из произвольной точки $(\alpha, v) \in S \times \mathbb{R}$ в точку $(\pi, 0)$.

Г л а в а 4. Стандартная управляемая система

§ 9. Конечномерные гладкие многообразия

Дифференцируемым многообразием называется [6–11] конечномерное топологическое многообразие снабженное *гладким атласом.* Атлас, покрывающий многообразие, называется *дифференцируемой структурой.* Характерной особенностью многообразия является отсутствие *глобальной* системы координат.

Несколько примеров конечномерных гладких многообразий.

1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n или область G в $\mathbb{R}^n$.

2. Сфера

$$S^n \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$ и всякое множество, *диффеоморфное* сфере S^n.

3. $M^n = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon f_1(x_1 \dots x_N) = 0 \dots f_k(x_1 \dots x_N) = 0\right\}$,

$$\operatorname{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots N}} = N - k = n.$$

4. *Тор*

$$\mathbb{T}^m \doteq S^1 \times \dots \times S^1$$

размерности m, локальные координаты в $\mathbb{T}^m$ могут быть такими:

$$\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m), \quad 0 \leqslant \varphi_i < 2\pi, \quad i = 1 \dots m.$$

5. *Проективное пространство*

$$RP^n \doteq \{x_0 : x_1 : \dots : x_n\},$$

— это множество прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$.

6. *Гладкое многообразие M^n с краем* (край многообразия M^n — это гладкое многообразие M^{n-1} размерности $n-1$).

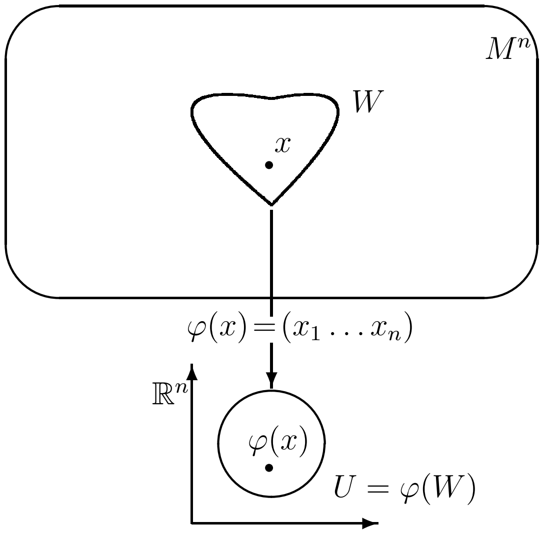


Рис. 6. Карта $(W,\varphi,\mathbb{R}^n)$ многообразия M^n

Всюду далее мы рассматриваем только такие многообразия M, которые являются *пространствами Хаусдорфа со счетной базой.*

Карты многообразий. Напомним [20], что пространство Хаусдорфа со счетной базой, это такое *топологическое* пространство M, что для каждой пары различных точек x, y существуют открытые множества X и Y пространства M такие, что

$$x\in X,\quad y\in Y\quad \text{и}\quad X\bigcap Y=\varnothing,$$

и, кроме того, существует *счетное* семейство $\mathfrak{B}(A)$ *открытых* подмножеств пространства M образующее, *базу* пространства M, то есть для любого *отрытого* множества V пространства M найдётся такое подмножество $U\in\mathfrak{B}(A)$, что $U\subset V$.

Определение 9.1 (карта многообразия (см. рис. 6)). *Карта* многообразия M^n — это область U в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности n вместе с *взаимно-однозначным* отображением $\varphi: W\to U$, где W — множество в M^n:

$$x\in W,\quad \varphi(x)=(x_1\dots x_n)\in U\subseteq\mathbb{R}^n.$$

Для записи карты $\varphi: W\to U$ могут употребляться также следующие обозначения

$$(W,\varphi,U)\quad\text{или}\quad(W,\varphi,\mathbb{R}^n).$$

Согласованность карт многообразия M^n

Определение 9.2 (см. рис. 7). Две карты (W_i,φ_i,U_i), (W_j,φ_j,U_j) многообразия M^n называются *согласованными*, если множества

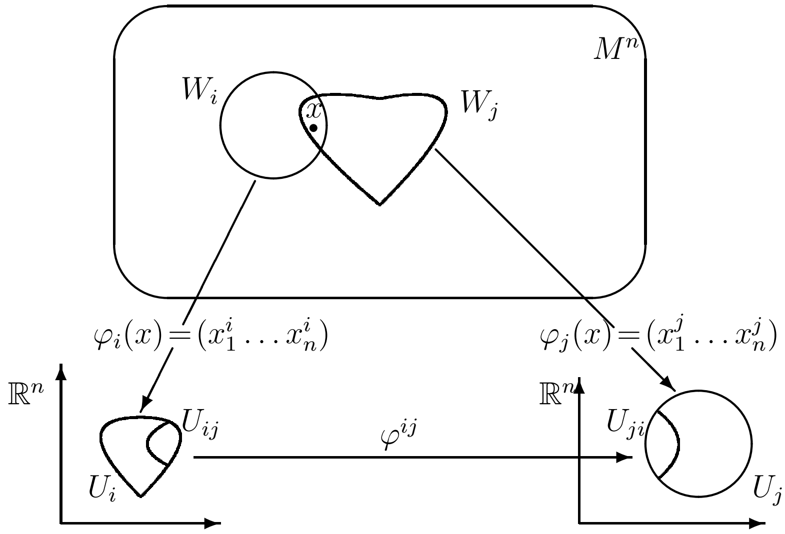
$$U_{ij}=\varphi_i\big(W_i\bigcap W_j\big)\quad\text{и}\quad U_{ji}=\varphi_j\big(W_j\bigcap W_i\big)$$

образуют области в $\mathbb{R}^n$ и при этом отображения

$$\varphi^{ij}\doteq\varphi_j\varphi_i^{-1}\colon U_{ij}\to U_{ji},\quad \varphi^{ji}\doteq\varphi_i\varphi_j^{-1}\colon U_{ji}\to U_{ij}$$

диффеоморфны:

$$\begin{cases}\varphi_1^{ij}(x_1^i\dots x_n^i)=x_1^j,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n^{ij}(x_1^i\dots x_n^i)=x_n^j,\end{cases}\qquad \det\left(\frac{\partial\varphi_k^{ij}(x_1^i\dots x_n^i)}{\partial x_s^j}\right)_{\substack{i=1\dots n\\ s=1\dots n}}\neq 0.$$



$$\varphi^{ij} \doteq \varphi_j \varphi_i^{-1} : U_{ij} \to U_{ji}, \quad \varphi_k^{ij}(x_1^i \dots x_n^i) = x_k^j, \quad k = 1 \dots n$$

Рис. 7. Согласованность карт многообразия M^n

О п р е д е л е н и е 9.3 (структура гладкого многообразия M^n). *Атлас* на M — это совокупность таких карт, что любые две карты согласованы и любая точка x множества M имеет изображение по крайней мере на одной карте.

Два атласа *эквивалентны* если любая карта одного атласа согласована с любой картой другого атласа. *Структурой* дифференцируемого многообразия M называется класс *эквивалентных* атласов.

О п р е д е л е н и е 9.4 (диффеоморфизмы класса C^k). Напомним, что функция $p\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *допустима в точке* x (принадлежит классу C^k), если $p(0) = x$ и в локальных координатах

$$t \to p(t) \doteq \bigl(p_1(t) \dots p_n(t)\bigr)$$

непрерывно дифференцируема k раз в точке $t = 0$.

Диффеоморфные многообразия. Пусть M и N — многообразия класса C^r, $r \geqslant 1$, вложенные в евклидовы пространства, и $f\colon M \to N$. Тогда по определению

$$f \quad \textit{принадлежит классу} \quad C^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \textit{в точке} \quad x \in M,$$

если для любой *допустимой* функции $t \to p(t)$ вектор-функция

$$\bigl(f_1(p_1(t) \dots p_n(t)) \dots f_n(p_1(t) \dots p_n(t))\bigr)$$

в локальных координатах непрерывно дифференцируема k раз в точке $t = 0$.

Будем говорить, что f *принадлежит классу* C^k *на многообразии* M, если f принадлежит классу C^k в каждой точке $x \in M$.

Далее, отображение $df(x)$, действующее из пространства T_xM, касательного к многообразию M в точке x, в пространство T_yN, касательное к многообразию N в точке $y = f(x)$ и определенное равенством

$$df(x)v \doteq \left(\frac{df_1\bigl(p_1(t) \dots p_n(t)\bigr)}{dt} \cdots \frac{df_n\bigl(p_1(t) \dots p_n(t)\bigr)}{dt} \right)_{t=0}$$

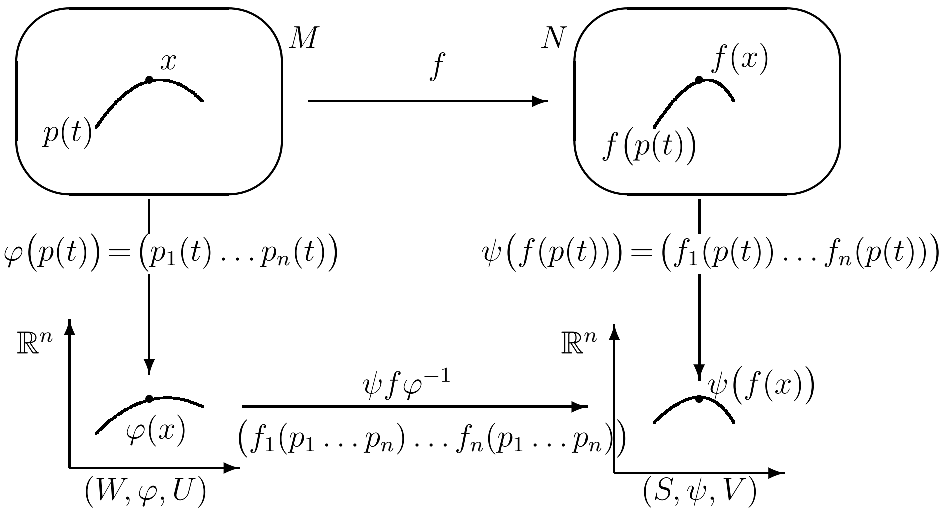


Рис. 8. Диффеоморфные многообразия

для всякой C^k-кривой

$$p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad p(0) = x, \quad \left.\frac{dp(t)}{dt}\right|_{t=0} \doteq v(x),$$

называется *производной отображения* f *в точке* x.

По определению отображение $f : M \to N$ называется C^k-*диффеоморфизмом*, где $k \geqslant 1$, если оно принадлежит классу C^k в каждой точке многообразия M и имеет обратное того же класса.

Определение 9.5 (эквивалентные кривые). Рассмотрим карту (W, φ, U) гладкого многообразия M^n и точку $x \in W$. По определению две гладкие кривые

$$t \to p_i(t) \in W, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

принадлежат одному *классу эквивалентности* в точке x, если $p_1(0) = p_2(0) = x$ и имеет место равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{\big|\varphi\big(p_1(t)\big) - \varphi\big(p_2(t)\big)\big|_{\mathbb{R}^n}}{t} = 0.$$

Теорема 9.1 (о диффеоморфных многообразиях (см. рис. 8)). *Пусть M и N — гладкие конечномерные многообразия, вложенные в евклидовы пространства, а $f \colon M \to N$ — отображение класса C^k, $k \geqslant 1$, и*

$$df(x) \colon T_x M \to T_{f(x)} N$$

— изоморфизм[5] *для каждого $x \in M$.*

Тогда отображение f является диффеоморфизмом класса C^k.

Напомним, что

1) многообразие M^n называется *ориентируемым*, если неравенства

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_k^{ij}(x_1^i \ldots x_n^i)}{\partial x_s^j} \right)_{k,s=1\ldots n} > 0$$

[5]То есть для любых $v_1, v_2 \in T_x M$ имеет место равенство $|v_1 - v_2| = |f(x)v_1 - f(x)v_2|$.

выполнены для всех карт (W_i, φ_i, U_i), (W_j, φ_j, U_j) многообразия M^n, имеющих непустое пересечение; здесь

$$\varphi^{ij} \doteq \varphi_j \varphi_i^{-1} : U_{ij} \to U_{ji}, \quad U_{ij} = \varphi_i\big(W_i \bigcap W_j\big), \quad U_{ji} = \varphi_j\big(W_j \bigcap W_i\big);$$

2) *связность* означает, что для любых двух точек x, y многообразия M найдется такой набор карт (W_i, φ_i, U_i), $i = 1 \dots k$, что $x \in W_1$, $y \in W_k$ и

$$W_{i-1} \bigcap W_i \neq \varnothing, \quad i = 2 \dots k;$$

3) *существование счетного атласа* означает, что существует атлас не более чем из счетного числа карт;

4) множество G многообразия M размерности n называется *открытым*, если его изображение $\varphi(W \bigcap G)$ на каждой карте (W, φ, U) является открытым подмножеством области U пространства $\mathbb{R}^n$;

5) подмножество K многообразия M называется *компактным*, если для каждого покрытия множества K открытыми множествами найдется *конечное* покрытие.

Т е о р е м а 9.2 (теорема Х. Уитни). *Всякое гладкое многообразие M^n со счетной базой допускает гладкое вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

§ 10. Касательное расслоение TM многообразия M

Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Тогда множество

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $2n$. Оно называется *касательным расслоением* многообразия M.

Оказывается далее, что если M — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$, то TM — многообразие класса C^{r-1}.

Каждая точка $(x_1 \dots x_n, \xi_1 \dots \xi_n)$ касательного расслоения TM имеет $2n$ координат, где $x = (x_1 \dots x_n)$ — координаты точки $x \in M$, а $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ — координаты вектора, находящегося в касательном пространстве $T_x M$ к многообразию M в точке x.

Пусть заданы карта $(W, \varphi, \mathbb{R}^n)$ многообразия M,, и локальные координаты

$$\varphi(x) = (x_1 \dots x_n)$$

точки $x \in W$. Тогда, как несложно убедиться, этой карте отвечает карта $(TW, \psi, \mathbb{R}^{2n})$, где

$$TW = \bigcup_{x \in W} T_x M, \quad \psi(x, \xi) = (x_1 \dots x_n, \xi_1 \dots \xi_n) \in W \times TW,$$

и любым двум согласованным картам многообразия M отвечают согласованные карты касательного пространства $T_x M$. Следовательно, множество TM всех касательных к многообразию M векторов имеет структуру гладкого многообразия размерности $2n$.

§ 11. Управляемые дифференциальные системы на гладких многообразиях конечной размерности

Стандартная управляемая система. Введем в рассмотрение важное для дальнейшего изложения определение так называемой *стандартной* системы. Важным свойством таких систем является свойство сохранять «стандартность» управляемой системы не только при сдвигах по времени векторного поля, но и при замыкании множества сдвигов исходной системы в топологии равномерной сходимости на компактах. Кроме того, пространство стандартных систем — это достаточно общее пространство, оно содержит многие важные для приложений объекты.

О п р е д е л е н и е 11.1. Управляемую систему

$$\dot{x} = v(t, x, u), \tag{11.1}$$

$(t, x, u) \in \mathbb{R}\times M \times U$, будем называть *стандартной*, если выполнены следующие условия.

1. Фазовое пространство M системы (11.1) — это *связное, ориентируемое многообразие размерности* n, обладающее свойством *отделимости* и имеющее *счетный атлас* [6, 7, 9]. Предполагается, кроме того, что многообразие M не имеет *края* и *гладко вложено* в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ размерности $2n+1$ (при высказанных предположениях в силу теоремы Х. Уитни [7] такое вложение всегда возможно).

2. Относительно геометрических ограничений U на допустимые управления системы (11.1) предполагается, что U — *компакт* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ конечной размерности (как правило, $m \leqslant n$, но это неравенство не предполагается).

3. Для любой абсолютно непрерывной функции $t \to x(t) \in M$ в каждой точке $\big(t, x(t)\big)$ выполнено *условие невырожденности*

$$v(t, x(t), U) \bigcap T_{x(t)}M \neq \varnothing,$$

где T_xM — евклидово *пространство, касательное к многообразию* M *в точке* $x \in M$.

4. Предположим далее, что для каждой фиксированной точки (x, u) множества $M \times U$ функция $t \to v(t, x, u)$ *локально интегрируема по Лебегу, ограничена* и *равномерно непрерывна в среднем* на числовой прямой $\mathbb{R}$ *равномерно* относительно любого множества $Z_K \doteq K \times U$, где K — произвольный компакт многообразия M.

5. Кроме того, предполагается, что функция $x \to v(t, x, u)$ удовлетворяет *локальному условию Липшица* для каждой точки (t, u) множества $\mathbb{R} \times U$.

Напомним теперь, что по определению для любой точки $(t, u) \in \mathbb{R} \times U$ функция

$$x \to v(t, x, u), \quad x \in M,$$

удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждой точки $x_0 \in M$ и всякой карты (W, σ, V) многообразия M, содержащей точку x_0, выполнено следующее условие:

для каждого компакта $K \subset W$ *такого, что* $x_0 \in K$, *найдется число* $\ell_{K}(x_0)$, *обеспечивающее для всех* $x, y \in K$ *неравенство*

$$\big|v\big(t, \sigma(x), u\big) - v\big(t, \sigma(y), u\big)\big|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \ell_{K}(x_0)\big|\sigma(x) - \sigma(y)\big|_{\mathbb{R}^n}, \tag{11.2}$$

где $\sigma(x) = (x_1 \ldots x_n)$ — *локальные координаты точки* $x \in W$, а

$$v(t, x, u) = \big(v_1(t, x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m) \ldots v_n(t, x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m)\big)$$

— координаты векторного поля $v(t,x,u)$ системы (11.1), выходящего из точки $\sigma(x)\in V$ и находящегося в пространстве T_xM, касательном к M в точке x.

Далее, напомним, что локально интегрируемая по Лебегу функция $t\to v(t,x,u)$ называется *равномерно непрерывной в среднем* на числовой прямой $\mathbb{R}$ *равномерно относительно каждого множества* $Z_K\doteq K\times U$, где K — компакт в M, если

для любого положительного ε *найдется такое число* $\beta=\beta(\varepsilon,K)>0$, *что при всех* $t\in\mathbb{R}$, $\tau\in[-\beta,\beta]$ *и любых* $(x,u)\in Z_K$ *выполнено неравенство*[6]

$$\int_t^{t+1}\bigl|v(s+\tau,x_1\dots x_n,u_1\dots u_m)-v(s,x_1\dots x_n,u_1\dots u_m)\bigr|_{\mathbb{R}^n}\,ds\leqslant\varepsilon. \tag{11.3}$$

Фиксируем удовлетворяющие условиям определения 3.1 многообразие $M=M^n$ и множество $U\subset\mathbb{R}^m$ и введем в рассмотрение *пространство* $\mathcal{S}=\mathcal{S}(M,U)$ *стандартных управляемых систем* с метрикой

$$b(v^1,v^2)\doteq\sup_{t,\,K}\min\left\{\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in Z_K}\bigl|v^1(s,x,u)-v^2(s,x,u)\bigr|_{\mathbb{R}^n}\,ds,\ \frac{1}{|t|}\right\}, \tag{11.4}$$

построенной на основе метрики М. В. Бебутова (см. [4, 5]). Здесь K — произвольный компакт многообразия M, $u=(u_1\dots u_m)\in U$,

$$\sigma(x)=(x_1\dots x_n)\in W_K\doteq\sigma\Bigl(W\bigcap K\Bigr),\quad Z_K=\Bigl(\bigcup_{(W,\sigma,\mathbb{R}^n)}W_K\Bigr)\times U, \tag{11.5}$$

где (W,σ,V) — карта многообразия M, имеющая непустое пересечение с множеством $W\bigcap K$.

Введем в рассмотрение однопараметрическую группу g^τ преобразований пространства $\mathcal{S}$ в себя, определенную равенством $g^\tau v=v_\tau$, где $v_\tau(t,x,u)\doteq v(t+\tau,x,u)$, $\tau\in\mathbb{R}$. Несложно убедиться, что

$$g^\tau v\bigr|_{\tau=0}=v,\quad g^\tau(g^s v)=g^{\tau+s}v\quad \text{и функция } (\tau,v)\to g^\tau v \text{ непрерывна.}$$

Следовательно, пара $(\mathcal{S},g^\tau)$ определяет топологическую *динамическую систему сдвигов.*

Рассмотрим теперь траекторию

$$\operatorname{orb}(v)\doteq\{g^\tau v:\tau\in\mathbb{R}\} \tag{11.6}$$

движения $\tau\to g^\tau v$ системы (11.1) и замкнем её в метрике (11.4).

Л е м м а 11.1 (о замыкании). *Пусть* $v\in\mathcal{S}$. *Включение* $\widehat{v}\in\overline{\operatorname{orb}}(v)$ *выполнено тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{\tau_i\}$ *моментов времени, удовлетворяющая следующему свойству: для любого положительного* ε *и всякого компакта* $K\subset M$ *найдется такой индекс* $i_0=i_0(\varepsilon,K)$, *что для всех* i, *удовлетворяющих неравенству* $i\geqslant i_0$, *и всех точек* (t,x,u) *множества* $[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}]\times Z_K$, *где* Z_K *определено равенством* (11.5), *выполнено неравенство*

$$\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in Z_K}|v_{\tau_i}(s,x,u)-\widehat{v}(s,x,u)|_{\mathbb{R}^n}\,ds\leqslant\varepsilon. \tag{11.7}$$

Кроме того, всякое векторное поле $\widehat{v}$, *принадлежащее* $\overline{\operatorname{orb}}(v)$, *содержится в* $\mathcal{S}$.

[6]Это неравенство следует понимать так: для каждой карты $(W,\sigma,\mathbb{R}^n)$ многообразия M, имеющей непустое пересечение с компактом K, и карты $(TW,\gamma,\mathbb{R}^{2n})$ многообразия TM неравенство (11.3) выполнено для всех $t\in\mathbb{R}$, $\tau\in[-\beta,\beta]$, $(x_1\dots x_n)\in\sigma(W\bigcap K)$, $u=(u_1\dots u_m)\in U$ и включения $\bigl(x_1\dots x_n,v_1(t,x_1\dots x_n,u_1\dots u_m)\dots v_n(t,x_1\dots x_n,u_1\dots u_m)\bigr)\in\gamma(TW)$.

Допустимый процесс. Для того чтобы выяснить условия существования *магистральных процессов*, введем в рассмотрение следующее важное для дальнейшего определение *допустимого процесса.*

Определение 11.2. Функция

$$t \to \xi(t) = \big(\varphi(t), u(t)\big) \in M \times U, \tag{11.8}$$

состоящая из управления $u(t)$ и решения $\varphi(t)$ системы

$$\dot{x} = v\big(t, x, u(t)\big), \tag{11.9}$$

называется *допустимым процессом* стандартной управляемой системы (11.1), если

1) программное управление $u\colon \mathbb{R} \to U$ *локально интегрируемо* по Лебегу и *равномерно непрерывно в среднем;*[7].

2) решение $\varphi(t)$ системы (11.9) понимается в смысле Каратеодори и предполагается, что оно *определено на прямой* $\mathbb{R}$ и *ограничено на полуоси* $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$;

3) Для процесса (11.8) при почти всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено *условие согласованности*

$$v\big(t, \varphi(t), u(t)\big) \in T_{\varphi(t)}M.$$

Если $\xi(t)$ — допустимый процесс, то $u(t)$ и $\varphi(t)$ называются *допустимыми* управлением и решением системы (11.9).

Замечание 1. В силу предположения о локальной липшицевости векторного поля $v(t, x, u)$ системы (11.1) для каждого допустимого управления $u_0(t)$ (то есть управления, входящего в допустимый процесс) решение всякой задачи Коши системы (11.9) единственно, и поэтому, в силу аналога теоремы Нагумо, это решение остается в M при каждом t из интервала существования решения.

Определение 11.3 (условия Каратеодори). Функции

$$v : \mathbb{R} \times M \times U \to TM$$

удовлетворяет условиям Каратеодори, если:

1) при каждом фиксированном t функция $(x, u) \to v(t, x, u)$ непрерывна на множестве $M \times U$, U — компакт в $\mathbb{R}^m$;

2) для любой фиксированной точки $(x, u) \in M \times U$ функция $t \to v(t, x, u)$ локально интегрируема по Лебегу;

3) для каждого компакта $K \subset M$ найдется такая локально интегрируемая по Лебегу функция $t \to m_{K}(t)$, что для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times K \times U$ в локальных координатах

$$v(t, x, u) = \big(v_1(t, x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m) \ldots v_n(t, x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m)\big)$$

выполнено неравенство

$$|v(t, x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m)| \leqslant m_{K}(t).$$

[7]Это означает, что для каждого положительного ε найдется такое положительное число $\beta = \beta(\varepsilon)$, что для всех $|\tau| \leqslant \beta$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_t^{t+1} |u_0(s+\tau) - u_0(s)|\, ds \leqslant \varepsilon$.

Рис. 9. Константин Каратеодори (1873–1950)

Глава 5. Теорема о равномерной локальной управляемости магистрального процесса

§ 12. Позиционное управление и решения управляемой системы в смысле А. Ф. Филиппова

Определение 12.1 (допустимое позиционное управление). Заданная функция

$$\mathfrak{u} : \mathbb{R} \times M \to U$$

называется *допустимым позиционным управлением* стандартной системы (11.1), если

1) для каждой точки $x \in M$ функция $t \to \mathfrak{u}(t, x)$ переменного t *локально интегрируема* по Лебегу и *равномерно непрерывна в среднем*;

2) любая ограниченная область G многообразия M состоит из конечного числа областей G^i, в каждой из которых векторное поле

$$q(t, x) \doteq v\big(t, x, \mathfrak{u}(t, x)\big) \tag{12.1}$$

замкнутой системы уравнений

$$\dot{x} = q(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \tag{12.2}$$

локально липшицево (см. (11.2)) и при приближении к любой точке $\widehat{x}$ границы области G^i векторное поле (12.1) имеет *конечный предел* [8];

[8]При высказанных условиях функция $x \to u(x)$ суперпозиционно измерима в следующем смысле: если функция $t \to x(t)$ локально измерима по Лебегу, то функция $t \to u(x(t))$ тоже локально измерима по Лебегу (см. [21]).

3) существует *допустимый процесс* $\xi(t) = \big(\varphi(t), u(t)\big)$ системы (12.2), этот процесс определяется следующим образом:

   а) $\varphi(t)$ — *определенное* на оси $\mathbb{R}$ и *ограниченное* на полуоси $\mathbb{R}_+$ решение дифференциального включения

   $$\dot{x} \in v\big(t, x, \mathcal{U}(t, x)\big),$$

   где
   $$\mathcal{U}(t, x) \doteq \overline{\mathrm{co}}\{\mathfrak{u}(t, x)\}, \tag{12.3}$$
   а $\{\mathfrak{u}(t, x)\}$ — множество предельных точек функции $x \to \mathfrak{u}(t, x)$ при фиксированном x и всевозможных $y \to x$;

   б) $u(t)$ — такое *допустимое* программное управление, что $u(t) \in \mathcal{U}\big(t, \varphi(t)\big)$ при всех t и для каждого t выполнено *условие согласованности*

   $$v\big(t, \varphi(t), u(t)\big) \in T_{\varphi(t)}M.$$

Если $\mathfrak{u} : \mathbb{R} \times M \to U$ — *допустимое* позиционное управление, а система (11.1) стандартная, то систему
$$\dot{x} = q(t, x), \tag{12.4}$$
где $q(t, x) = v\big(t, x, \mathfrak{u}(t, x)\big)$, тоже будем называть *стандартной.*

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что в силу компактности множества U допустимое программное управление $u(t)$ ограничено на прямой $\mathbb{R}$. Кроме того, из определения *допустимого* процесса, условий 1–4 определения *стандартной* управляемой системы и известной теоремы о локальном существовании и единственности решения задачи Коши

$$\dot{x} = v\big(t, x, u(t)\big), \quad x(0) = x_0, \tag{12.5}$$

следует, что решение $\varphi(t)$ задачи (12.5) на максимальном интервале его существования не покидает фазовое пространство [9] системы (12.2), заданное многообразием M.

Напомним формальное определение решения в смысле А. Ф. Филиппова [1] системы дифференциальных уравнений (12.2) с разрывным по фазовым переменным векторным полем $q(t, x)$. Решением (в смысле Филиппова) системы (12.2) называется всякое абсолютно непрерывное решение включения

$$\dot{x} \in Q(t, x), \tag{12.6}$$

правая часть $Q(t, x)$ которого определена равенством

$$Q(t, x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mathrm{mes}\, \mu = 0} \overline{\mathrm{co}}\, q(t, \mathcal{O}_\varepsilon(x) \setminus \mu). \tag{12.7}$$

Здесь векторное поле $q(t, x)$ системы (12.2) в локальных координатах многообразия M имеет представление

$$q(t, x) = \big(q_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots q_n(t, x_1 \ldots x_n)\big),$$

mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $\overline{\mathrm{co}}A$ — замыкание выпуклой оболочки множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

[9] Есть простые примеры систем дифференциальных уравнений, не обладающих свойством единственности решения задачи Коши, на особых многообразиях которых (то есть на многообразиях, не обладающих свойством единственности решения задачи Коши) существуют решения, покидающие гладкое многообразие M, на котором рассматривается система.

Отметим [1, с. 40–42], что в силу условия 2 определения позиционного управления для каждой точки $x \in M$ непрерывности векторного поля $q(t,x)$ множество (12.7) состоит из одной точки, совпадающий с $q(t,x)$; если же $\widehat{x}$ — точка разрыва функции $x \to q(t,x)$ (в этом случае $\widehat{x}$ находится на границе объединения областей $\{G^i\}$), то правая часть $Q(t,x)$ включения (12.6) в точке $x = \widehat{x}$ представляет собой выпуклый многогранник, образованный из всех таких точек $q^i(t,\widehat{x})$, для которых выполнено условие

$$q^i(t,\widehat{x}) = \lim_{\substack{x\to\widehat{x}\\ x\in G^i}} q(t,x).$$

Из сказанного следует, что в рассматриваемом случае представление множества $Q(t,x)$ упрощается: $Q(t,x) = q(t,x)$, если x — точка непрерывности векторного поля $q(t,x)$, если же $\widehat{x}$ — точка разрыва векторного поля, то

$$Q(t,\widehat{x}) = \overline{\text{co}}\{q^i(t,\widehat{x})\},$$

где $\{q^i(t,\widehat{x})\}$ — множество предельных точек векторного поля $q(t,x)$ при всевозможных $x \to \widehat{x}$.

§ 13. Теорема о равномерной локальной управляемости допустимого процесса

Пусть заданы *стандартная* управляемая система

$$\dot{x} = v(t,x,u), \tag{13.1}$$

допустимое позиционное управление $\mathfrak{u}(t,x)$ и *допустимый процесс* $\xi(t) \doteq \big(\varphi(t),u(t)\big)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = v\big(t,x,\mathfrak{u}(t,x)\big). \tag{13.2}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$(t,x) \to \psi(t,x) \doteq \big(q(t,x),\xi(t)\big), \tag{13.3}$$

которую будем называть *полным допустимым процессом.* Здесь

$$q(t,x) \doteq v\big(t,x,\mathfrak{u}(t,x)\big).$$

Если процесс (13.3) является полным, но не обязательно допустимым в том смысле, что $v(t,x,u)$ — *стандартное* векторное поле, $\mathfrak{u}(t,x)$ — *допустимое* позиционное управление, но процесс $\xi(t) = \big(x(t),u(t)\big)$ не предполагается допустим, то такой процесс мы называем *полным процессом* пропуская слово «допустимый».

Будем рассматривать пространство $\Psi = \big\{\big(q(t,x),\xi(t)\big)\big\}$ полных процессов с метрикой, определенной равенством

$$b(\psi^1,\psi^2) = \sup_{t,K}\min\bigg\{\int_t^{t+1}\max_{x\in K}\Big(\big|q^1(s,x)-q^2(s,x)\big|_{\mathbb{R}^n} + \\ + \big|\mathfrak{u}^1(s,x)-\mathfrak{u}^2(s,x)\big|_{\mathbb{R}^n} + \big|u^1(s)-u^2(s)\big|_{\mathbb{R}^n}\Big)\,ds + \big|\varphi^1(t)-\varphi^2(t)\big|_{\mathbb{R}^n},\ \frac{1}{|t|}\bigg\}, \tag{13.4}$$

где $q^i(t,x) = v^i\big(t,x,\mathfrak{u}^i(t,x)\big)$, $\xi^i(t) = \big(\varphi^i(t),u^i(t)\big)$, $i=1,2$, K — произвольный компакт в M. Такая метрика, как несложно убедиться, порождает топологию равномерной сходимости на компактах $[-\vartheta,\vartheta]\times K$.

Далее, для *полного допустимого процесса* (13.3) и каждой точки $x\in M$ построим положительную полутраекторию

$$\operatorname{orb}_+(\psi,x) = \{\psi_\tau(\cdot,x) : \tau\geqslant 0\}$$

движения $\tau\to\psi_\tau$ процесса ψ, где

$$\psi_\tau(t,x) \doteq \big(q(t+\tau,x),\xi(t+\tau)\big),$$

и замкнем $\operatorname{orb}_+(\psi,x)$ в метрике (13.4).

В силу высказанных ранее условий о стандартном векторном поле $v(t,x,u)$, допустимом позиционном управлении $\mathfrak{u}(t,x)$ и допустимом процессе $\xi(t)$ и с помощью соответствующего утверждения Бебутова [4, теорема 1] несложно доказать, что при всех $x\in M$ пространство $\overline{\operatorname{orb}}_+(\psi,x)$ компактно в метрике (13.4). Следовательно, для любой фиксированной точки x динамическая система $\big(\overline{\operatorname{orb}}_+(\psi,x),g^\tau\big)$, где $g^\tau\widehat{\psi} = \widehat{\psi}_\tau$ — оператор сдвига по времени τ, имеет для каждого полного процесса $\widehat{\psi}$, принадлежащего фазовому пространству $\overline{\operatorname{orb}}_+(\psi,x)$, омега-предельное множество $\Omega(\widehat{\psi})$; оно компактно и инвариантно относительно сдвигов по переменной τ.

О п р е д е л е н и е 13.1 (равномерно управляемого полного процесса). Фиксируем допустимый процесс $\xi_0(t) = \big(\varphi_0(t),u_0(t)\big)$ и обозначим $\varphi(t,x_1)$ решение системы (13.2) с начальным условием $\varphi(0,x_1)=x_1\in M$. Фиксируем полный допустимый процесс (13.3). Тогда *множеством управляемости* $\mathcal{D}_\vartheta(\psi)$ решения $\varphi_0(t)$ системы (13.2) на отрезке $[0,\vartheta]$ называется множество

$$\mathcal{D}_\vartheta(\psi) \doteq \Big\{x_1\in M : \varphi(t,x_1)\big|_{t=\vartheta} = \varphi_0(t)\big|_{t=\vartheta}\Big\}. \tag{13.5}$$

Предполагается далее, что для всех $t\in[0,\vartheta]$ выполнено условие согласованности

$$v\big(t,\varphi(t,x_1),u(t,x_1)\big)\in T_{\varphi(t,x_1)}M,$$

где $u(t,x_1)\in\mathcal{U}\big(t,\varphi(t,x_1)\big)$, множество $\mathcal{U}(t,x)$ определено равенством (12.3), а управление $u(t,x_1)$ таково, что пара $\big(\varphi(t,x_1),u(t,x_1)\big)$ вместе с векторным полем $v(t,x,u)$ и позиционным управлением $\mathfrak{u}(t,x)$ образуют *полный допустимый процесс* замкнутой системы (13.2).

Далее, положительная полутраектория

$$\operatorname{orb}_+(\varphi_0) = \{\varphi_0(\cdot+\tau) : \tau\geqslant 0\}$$

решения $\varphi_0(t)$ системы (13.2) полного допустимого процесса (13.3) называется *равномерно локально управляемой*, если найдутся такие положительные числа ε,ϑ, что для всех $\widehat{\psi}\in\overline{\operatorname{orb}_+}(\psi)$ имеет место вложение $O_\varepsilon\big(\widehat{\varphi}_0(0)\big)\subseteq\mathcal{D}_\vartheta(\widehat{\psi})$.

Из сказанного в определении 13.1 следует, что если $\psi(t,x)$ — управляемый полный допустимый процесс, то при каждом неотрицательном конечном τ процесс $\psi(t+\tau,x)$ тоже является управляемым полным допустимым процессом, но, как показывают простые примеры, в омега-предельном множестве $\Omega(\psi)$ динамической системы $\big(\overline{\operatorname{orb}}_+(\psi),g^\tau\big)$, отвечающей управляемому полному допустимому процессу, наряду с управляемыми процессами могут появиться и полные неуправляемые процессы. Отсюда следует, что из условия управляемости полного допустимого процесса $\psi(t,x)$ автоматически не следует его равномерная локальная управляемость.

Интересно, что есть и такие примеры: исходный полный процесс $\psi(t,x)$ при каждом фиксированном $x \in M$ недопустим, но в омега-предельном множестве динамической системы $(\overline{\mathrm{orb}}_+(\psi,x), g^\tau)$ наряду с полными процессами, которые являются недопустимыми, есть и допустимые полные процессы. Рассмотрим по этому поводу следующий пример.

Пример 13.1. Рассмотрим стандартную управляемую систему

$$\dot{x} = a(t)u, \quad a(t) = \begin{cases} \sin\big(\ln(t+1)\big) - 0.5 & \text{при } t \geqslant 0, \\ -0.5 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1,$$

допустимое позиционное управление

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ \ \ x & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \ \ 1 & \text{при} \quad 1 \leqslant x \end{cases}$$

и допустимый процесс $\xi(t) = \big(x_0(t), u_0(t)\big)$, где $x_0(0) = \varepsilon \exp\big(-(2+\sqrt{3})/4\big)$, $\varepsilon \in (0,1)$,

$$x_0(t) = x_0(0)\exp\Big(0.5(t+1)\big[\sin\big(\ln(t+1)\big) - \cos\big(\ln(t+1)\big)\big] - 0.5t + 0.5\Big), \quad u_0(t) = u\big(x_0(t)\big),$$

при всех $t \geqslant 0$. Так как решение $x_0(t)$ уравнения $\dot{x} = a(t)u(x)$, как несложно убедиться, удовлетворяет неравенству

$$|x_0(t)| \leqslant \varepsilon \exp(-\lambda t), \quad \text{где} \quad \lambda = (2-\sqrt{3})/4,$$

то при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $|x_0(t)| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $u_0(t) \equiv x_0(t)$.

Мы показали, что при $\lambda = (2-\sqrt{3})/4$ функция $\psi(t,x) = \big(a(t)u(x), \xi(t)\big)$ образует допустимый полный процесс. Покажем теперь, что в омега-предельном множестве $\Omega(\psi)$ полного процесса $\psi(t,x)$ наряду с допустимыми полными процессами есть недопустимые.

$\xi(t) = \big(x_0(t), u_0(t)\big)$ напомним обозначение

$$q(t,x) = v\big(t,x,u(t,x)\big)$$

и рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы (13.2), удовлетворяющее при заданном положительном ε включению [10] $x(0) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(0)\big)$. Далее рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = q\big(t,x\big) - q\big(t, x_0(t)\big)$$

и такое решение $x(t)$ этой системы, что $x(0) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(x_0(0)\big)$.

Для того чтобы сформулировать теорему 1, по *допустимому* процессу $\xi_0(t) = \big(x_0(t), u_0(t)\big)$ введём в рассмотрение две функции, которые будем называть тоже *допустимыми*.

[10] Уместно напомнить, что поскольку рассматривая система (13.2) определена на многообразии M, то предполагается, что найдется область B, содержащая точку $x(0)$ и находящаяся на одной карте $(W, \phi, \mathbb{R}^n)$ многообразия M. Следовательно, найдется такое положительное ε, что выполнено включение $\mathcal{O}\big(x_0(0)\big) \subseteq \phi(B)$.

1. Скалярная функция $L(t, y_1 \dots y_n)$ переменных $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ при каждом y *абсолютно непрерывна* по t и *ограничена* на полуоси $\mathbb{R}_+$ вместе с производными $\dfrac{\partial}{\partial t}L(t, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}L(t, y)$, и при почти всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство $L\big(t, \sigma(\varphi_0(t))\big) \equiv 0$[11].

2. Функция $a(t)$ локально интегрируема по Лебегу, *ограничена*, и при заданном положительном ϑ выполнено неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \int_t^{t+\vartheta} a(s)\, ds < 0.$$

Т е о р е м а 13.1. *Пусть заданы допустимая управляемая система* (13.1)*, допустимое позиционное управление* $\mathfrak{u}(t, x)$*, допустимый процесс* $\xi_0(t) \doteq \big(\varphi_0(t), u_0(t)\big)$*, отвечающий системе* (13.2) *и управлению* $\mathfrak{u}(t, x)$*, положительные числа* ϑ*,* ε*, допустимые функции* $L(t, x)$ *и* $a(t)$ *и омега-предельное множество* $\Omega(\eta)$ *траектории* $\mathrm{orb}(\eta)$*, где*

$$\eta(t, x, y) = \big(v\big(t, x, \mathfrak{u}(t, x)\big), L(t, y), a(t)\big).$$

Тогда если для всех $\widehat{\eta} \in \Omega(\eta)$*,* $t \in [0, \vartheta]$ *и* $x \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\widehat{x}(0)\big)$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{L}\big(t, \widehat{y}(t, x)\big) + \Big\langle \frac{\partial}{\partial x}\widehat{L}\big(t, \widehat{y}(t, x)\big), \widehat{v}\big(t, \widehat{\varphi}(t, x), \widehat{u}(t, x)\big) - \widehat{v}\big(t, \widehat{\varphi}_0(t), \widehat{u}_0(t)\big) \Big\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{a}(t) \operatorname{sgn}\big(\widehat{L}(t, \widehat{y}(t, x))\big),$$

где $\widehat{y}(t, x) = \sigma(\widehat{\varphi}(t, x)) - \sigma\big(\widehat{\varphi}_0(t)\big)$*, то положительная полутраектория*

$$\mathrm{orb}_+(\varphi_0) = \{\varphi_0(\cdot + \tau) : \tau \geqslant 0\}$$

равномерно локально управляема.

§ 14. Линейная управляемая система

Линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{14.1}$$

будем называть *стандартной*, если функция $t \to \big(A(t), B(t)\big)$ *локально интегрируема* по Лебегу и *ограничена* на числовой прямой $\mathbb{R}$, а множество U, задающее геометрические ограничения на *допустимые* управления, *компактно*. В дальнейшем будем рассматривать только стандартную управляемую систему.

О п р е д е л е н и е 14.1 (**задача быстродействия**). Задача быстродействия состоит в отыскании интегрируемого по Лебегу *программного* управления

$$u_0(t) = u(t; t_0, x_0) \in U$$

и так называемого *времени быстродействия* τ, то есть времени, минимизирующего скорость выполнения второго из условий краевой задачи

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \tau) = 0. \tag{14.2}$$

[11] Уместно напомнить, что поскольку система (13.2) определена на многообразии M, то найдется карта (W, σ, V), $V = \sigma(W) \subset \mathbb{R}^n$, многообразия M, содержащая точку $\varphi_0(0)$, и, следовательно, найдутся такие положительные ϑ, ε, что $\mathcal{O}_\varepsilon\big(\sigma(\varphi_0(t))\big) \subseteq V$ при всех $t \in [0, \vartheta]$, $\sigma(\varphi) = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$.

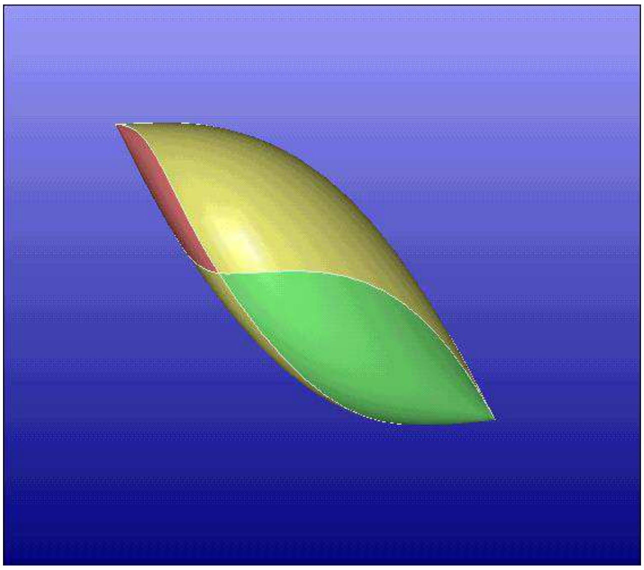


Рис. 10. Множество управляемости $D_{3\pi}(0)$ системы (14.6)

Таким образом, время быстродействия $\tau(t_0, x_0)$ задачи (14.1), (14.2) определяется равенством

$$\tau(t_0, x_0) = \min_{|u(\cdot)| \leqslant 1} \bigl\{ \tau \geqslant 0 : x\bigl(t_0 + \tau; t_0, x_0, u(\cdot)\bigr) = 0 \bigr\}. \tag{14.3}$$

Если для некоторой точки (t_0, x_0) нет конечного времени $\tau(t_0, x_0)$, обеспечивающего выполнение второго условия задачи (14.2), то по определению полагаем, что $\tau(t_0, x_0) = \infty$.

Будем изучать задачу быстродействия для стандартной управляемой системы (14.1) и ее *множество управляемости* на заданном отрезке времени. В связи с этим имеет смысл изучать два *множества управляемости*:

1) множество управляемости

$$\mathcal{D}(t_0, x_0) = \bigl\{ y \in \mathbb{R}^n : \tau(t_0, y) \leqslant \tau(t_0, x_0) \bigr\} \tag{14.4}$$

при заданном *времени быстродействия* $\tau(t_0, x_0)$;

2) множество управляемости

$$D_\vartheta(t_0) = \bigl\{ x \in \mathbb{R}^n : \tau(t_0, x) \leqslant \vartheta \bigr\} \tag{14.5}$$

на заданном *отрезке времени* $[t_0, t_0 + \vartheta]$.

Из определений множеств управляемости (14.4) и (14.5) системы (14.1) следует, что в *эффективной* области существования функции быстродействия $\tau(t, x)$ имеют место равенства

$$\partial\mathcal{D}(t, x) = \tau(t, x), \quad \mathcal{D}(t, x) = D_{(t,x)}(t),$$

где $\partial\mathcal{D}(t, x)$ — граница множества $\mathcal{D}(t, x)$. Кроме того, имеет место равенство

$$D_\vartheta(t_0) = -\int_0^\vartheta X_{t_0}(0, t) B_{t_0}(t) U \, dt.$$

На рисунке 10 показано множество управляемости $D_{3\pi}(0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \quad |u| \leqslant 1, \end{cases} \tag{14.6}$$

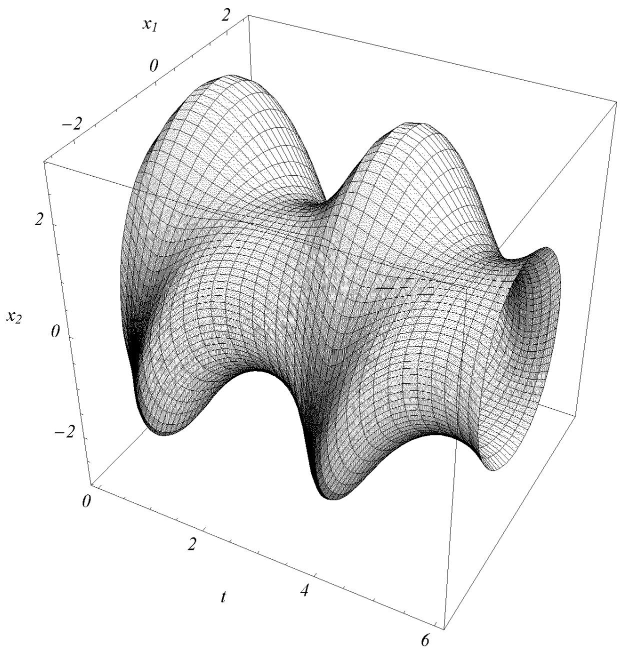


Рис. 11. Фрагмент расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}_\vartheta$ системы (14.7) при $\vartheta = 6$

на отрезке времени времени $[0, 3\pi]$ (построенное Н. В. Миличем [15]). Тонкими линиями отделены многообразия, в которых оптимальное управление начинается с плюс единицы или минус единицы.

Наряду с множествами управляемости (14.4) и (14.5) имеет смысл при рассмотрении задачи быстродействия (14.1), (14.2) ввести в обиход два *расширенных* множества управляемости:

1) расширенное множество управляемости $\mathfrak{D}(x) \doteq \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big(t, D(t,x)\big)$ при *заданном* времени быстродействия $(t,x) \to \tau(t,x)$;

2) расширенное множество управляемости $\mathfrak{D}_\vartheta \doteq \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big(t, D_\vartheta(t)\big)$ на *отрезке заданной длины* ϑ.

На рисунке 11 в качестве примера построено расширенное множество управляемости системы управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(1 + 0.5\sin 2t)x_1 + u, \quad |u| \leqslant 1, \end{cases} \tag{14.7}$$

построенное С. Ф. Николаевым.

§ 15. Неосцилляция

О п р е д е л е н и е 15.1. Управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u \tag{15.1}$$

будем называть *докритической в точке* t_0 (а интервал $\big[t_0, t_0+\sigma(t_0)\big)$ — *докритическим*), если найдется такое число $\sigma(t_0) > 0$, что функции

$$\xi_1(t) \doteq \varphi_1(t)b(t) \ldots \xi_n(t) \doteq \varphi_n(t)b(t),$$

Рис. 12. Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894)

где $\varphi_1(t) \ldots \varphi_n(t)$ — базис решений системы

$$\dot{\varphi} = -\varphi A(t),$$

образуют на интервале $\big[t_0, t_0 + \sigma(t_0)\big)$ систему функций П. Л. Чебышева.

Это означает, что *всякая нетривиальная линейная комбинация функций* $\xi_1(t) \ldots \xi_n(t)$ *имеет на интервале* $\big[t_0, t_0 + \sigma(t_0)\big)$ *не более* $n-1$ *геометрически различных нулей.*

Если $\sigma_0 = \infty$, то полуось $[t_0, \infty)$ называется *докритической.*

Определение 15.2 (Условие (A)). Предположим, что система (15.1) *докритическая* в каждой точке t_0 прямой $\mathbb{R}$. Максимальную длину интервала $[t_0, t_0+\sigma)$ докритичности в точке t_0 обозначим $\sigma(t_0)$. Мы говорим, что выполнено *условие* (A) если имеет место неравенство

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \sigma(t) \doteq \sigma_0 > 0$$

(если $\sigma_0 = \infty$, то система (15.1) называется *докритической* на прямой $\mathbb{R}$).

Теорема 15.1 (о структуре множества управляемости). *Пусть выполнено условие* (A). *Для каждой точки* (t, x) *такой, что* $\tau(t, x) \leqslant \vartheta$ ($\vartheta = \sigma_0$, *если* $\sigma_0 < \infty$, *и* ϑ *— любое, если* $\sigma_0 = \infty$) *граница множества управляемости управляемой системы*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{15.2}$$

имеет вид

$$\partial D(t,x) = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{M}^{n-1}_{+}(t,x)\bigcup \mathfrak{M}^{n-1}_{-}(t,x)\right),$$

где

$$\mathfrak{M}^{k-1}_{+}(t,x) = \mathcal{M}^{k-1}_{+}(t,x)\bigcup \mathcal{M}^{k-2}_{-}(t,x)\bigcup\cdots\bigcup \mathcal{M}^{0}_{\pm}(t,x),$$

$$\mathfrak{M}^{k-1}_{-}(t,x) = \mathcal{M}^{k-1}_{-}(t,x)\bigcup \mathcal{M}^{k-2}_{+}(t,x)\bigcup\cdots\bigcup \mathcal{M}^{0}_{\mp}(t,x),$$

$k = 1 \ldots n$. *Кроме того, для любого* $k \in \{1 \ldots n\}$ *каждое из многообразий* $\mathfrak{M}^{k-1}_{+}(t,x)$, $\mathfrak{M}^{k-1}_{-}(t,x)$ *слабо инвариантно и многообразие* $\mathfrak{M}^{k-1}_{+}(t,x)\bigcup\mathfrak{M}^{k-1}_{-}(t,x)$ *является общим краем многообразий* $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}^{k}_{+}(t,x)$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}^{k}_{-}(t,x)$.

Т е о р е м а 15.2 (теорема 15.1 (bic)). *Пусть выполнено условие* (A). *Для каждой точки* (t,x) *такой, что* $\tau(t,x) \leqslant \vartheta$ ($\vartheta = \sigma_0$, *если* $\sigma_0 < \infty$, *и* ϑ — *любое, если* $\sigma_0 = \infty$), *граница множества управляемости системы* (15.2) *имеет вид*

$$\partial D_\vartheta(t) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{M}^{n-1}_{\vartheta+}(t) \bigcup \mathcal{M}^{n-1}_{\vartheta-}(t)\right), \text{ где}$$

$$\mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta+}(t) = M^{k-1}_{\vartheta+}(t) \bigcup M^{k-2}_{\vartheta-}(t) \bigcup \cdots \bigcup M^{0}_{\vartheta\pm}(t),$$

$$\mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta-}(t) = M^{k-1}_{\vartheta-}(t) \bigcup M^{k-2}_{\vartheta+}(t) \bigcup \cdots \bigcup M^{0}_{\vartheta\mp}(t),$$

$k = 1 \ldots n$. *Кроме того, для любого* $k \in \{1 \ldots n\}$ *каждое многообразие* $\mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta+}(t)$, $\mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta-}(t)$ *слабо инвариантно, а многообразие* $\mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta+}(t) \bigcup \mathcal{M}^{k-1}_{\vartheta-}(t)$ *является общим краем многообразий* $\mathrm{cl}\,\mathcal{M}^{k}_{\vartheta+}(t)$ *и* $\mathrm{cl}\,\mathcal{M}^{k}_{\vartheta-}(t)$.

Важное замечание. Если в условии (A) имеет место равенство

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \sigma(t) = \infty,$$

то в теореме о структуре границы $\partial D(t,x)$ множества управляемости $D(t,x)$, так же как и в теореме о структуре границы $\partial\mathfrak{D}(x)$ расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}(x) \doteq \big(t, D(t,x)\big)$, следует рассматривать множества

$$D_\vartheta(t) \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : \tau(t,x) \leqslant \vartheta\big\}$$

и $\mathfrak{D}_\vartheta \doteq \big(t, D_\vartheta(t)\big)$ для любого конечного $\vartheta \geqslant 0$. Аналоги этих теорем для множеств $D_\vartheta(t)$, $\mathfrak{D}_\vartheta$ тоже верны (см. теоремы 15.1 и 15.2).

Т е о р е м а 15.3 (о структуре расширенного множества управляемости). *Пусть выполнено условие* (A). *Для каждой точки* (t,x) *такой, что* $\tau(t,x) \leqslant \vartheta$ ($\vartheta = \sigma_0$, *если* $\sigma_0 < \infty$, *и* ϑ — *любое, если* $\sigma_0 = \infty$), *граница расширенного множества управляемости системы* (15.2) *имеет вид* $\partial\mathfrak{D}(x) = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{N}^n_+(x) \bigcup \mathfrak{N}^n_-(x)\right)$,

$$\mathfrak{N}^k_+(x) = \mathcal{N}^k_+(x) \bigcup \mathcal{N}^{k-1}_-(x) \bigcup \mathcal{N}^{k-2}_+(x) \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1_\pm(x),$$
$$\mathfrak{N}^k_-(x) = \mathcal{N}^k_-(x) \bigcup \mathcal{N}^{k-1}_+(x) \bigcup \mathcal{N}^{k-2}_-(x) \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{N}^1_\mp(x),$$

$1 \leqslant k \leqslant n$. *Далее, для каждого* $k \in \{1 \ldots n\}$ *многообразия* $\mathfrak{N}^k_+(x)$, $\mathfrak{N}^k_-(x)$ *слабо инвариантны и многообразие* $\mathfrak{N}^{k-1}_+(x) \bigcup \mathfrak{N}^{k-1}_-(x)$ *является общим краем многообразий* $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}^k_+(x)$, $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}^k_-(x)$.

Т е о р е м а 15.4 (Теорема 15.3 (bic)). *Пусть выполнено условие* (A). *Для каждой точки* (t,x) *такой, что* $\tau(t,x) \leqslant \vartheta$ ($\vartheta = \sigma_0$, *если* $\sigma_0 < \infty$, *и* ϑ — *любое, если* $\sigma_0 = \infty$), *граница расширенного множества управляемости системы* (15.2) *имеет вид* $\partial\mathcal{D}_\vartheta = \mathrm{cl}\left(\mathcal{N}^n_{\vartheta+} \bigcup \mathcal{N}^n_{\vartheta-}\right)$,

$$\mathcal{N}^k_{\vartheta+} = N^k_{\vartheta+} \bigcup N^{k-1}_{\vartheta-} \bigcup N^{k-2}_{\vartheta+} \bigcup \cdots \bigcup N^1_{\vartheta\pm},$$

$$\mathcal{N}^k_{\vartheta-} = N^k_{\vartheta-} \bigcup N^{k-1}_{\vartheta+} \bigcup N^{k-2}_{\vartheta-} \bigcup \cdots \bigcup N^1_{\vartheta\mp},$$

$k = 1 \ldots n$. *Далее, для каждого* $k \in \{1 \ldots n\}$ *многообразия* $\mathcal{N}^k_{\vartheta+}$, $\mathcal{N}^k_{\vartheta-}$ *слабо инвариантны и многообразие* $\mathcal{N}^{k-1}_{\vartheta+} \bigcup \mathcal{N}^{k-1}_{\vartheta-}$ *является общим краем многообразий* $\mathrm{cl}\,\mathcal{N}^k_{\vartheta+}$ *и* $\mathrm{cl}\,\mathcal{N}^k_{\vartheta-}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \quad |u| \leqslant 1. \end{cases} \tag{15.3}$$

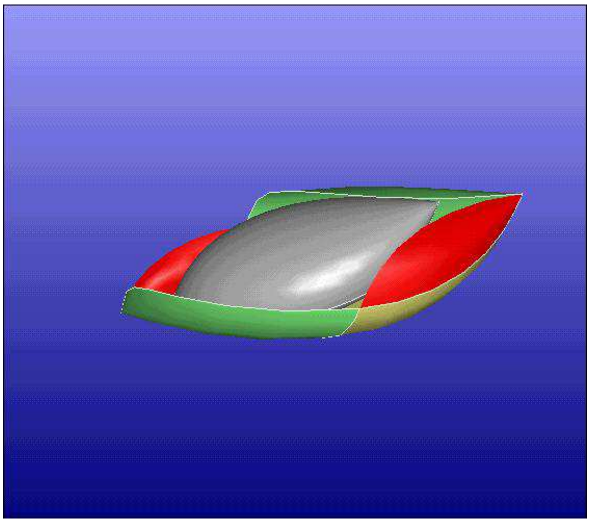


Рис. 13. Множества управляемости $D_{3\pi}(0)$ и $D_{2\pi}(0)$ системы (15.3) (Н. В. Милич)

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Биркгоф Д. Динамические системы. Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 407 с.
3. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
4. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень Института математики МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1-52.
5. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
6. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: УРСС, 1986. 759 с.
8. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 35. 1989. 240 с.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
10. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. Крейн С.Г., Яцкин Н.И. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. Воронеж: Воронежский государственный университет, 1980. 131 с.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.
13. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 361 с.
14. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
15. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
16. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
17. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
18. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 1978. 204 с.

19. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
20. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
21. Скворцов В.А. Борелевское множество // Математическая энциклопеция. М.: Советская энциклопеция, 1977. Т. 1. С. 535.
22. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л., 1937.
23. Милич Н.В. Структура множества управляемости и позиционное управление линейной нестационарной системой: дис. … канд. физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 2000. 117 с. `http://minimax.school.udsu.ru/files/1275393018.pdf`
24. Николаев С.Ф. Свойства функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой: дис. … канд. физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 1998. 117 с. `http://minimax.school.udsu.ru/files/1275393020.pdf`

Поступила в редакцию 01.04.2014

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: eltonkov@udm.ru

E. L. Tonkov
Turnpike motions of control systems (I)

Keywords: dynamic systems, finite-dimensional smooth manifolds, ordinary differential equations, control systems, turnpike motions.

MSC: 34-00

This paper is intended primarily for graduate students specializing in differential equations. It covers the applications to control systems of the well-developed theory of classical dynamic systems, methods of differential geometry and the theory of differential inclusions, mainly developed by A. F Filippov. The main content of the paper is the study of the so-called standard control system. The phase space of such a system is a finite-dimensional smooth manifold. This assumption is very important from the point of view of applications. In addition, it is assumed that the vector field of the system is locally Lipschitz, and the geometric constraints on the controlled parameters are compact. Admissible control functions can be program and / or positional. In the first case, we arrive at the so-called systems of Caratheodory equations. In the second case, if the vector field is discontinuous with respect to phase variables, we arrive at Filippov's differential inclusions. Serious attention is given to the study of the conditions under which specified properties of the control system continue to hold after closing the set of shifts (in the topology of uniform convergence on compact sets) of the initial standard control system.

REFERENCES

1. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
2. George D. Birkhoff, *Dynamical systems*, New York: American Mathematical Society, 1927, 295 p. Translated under the title *Dinamicheskie sistemy*, Izhevsk: Udmurt State Universuty, 1999, 408 p.
3. Katok A., Hasselblat B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1997, 802 p. Translated under the title *Vvedenie v sovremennuyu teoriyu dinamichesckikh sistem*, Moscow: Faktorial, 1999, 768 p.
4. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52 (in Russian).
5. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Qualitative theory of differential equations*, Courier Dover Publications, 1989, 523 p.

6. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. *Geometricheskaya teoriya upravleniya* (Geometric control theory), Moscow: Fizmatlit, 2005, 391 p.
7. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. *Modern geometry — methods and applications: Part I: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Springer, 1992, 470 p.
8. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dostizh.*, vol. 35, Moscow: VINITI, 1989, 240 p.
9. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1971, 239 p.
10. Arnol'd V.I. *Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Additional chapters of the theory of ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1978, 304 p.
11. Krein S.G., Yatskin N.I. *Lineinye differentsial'nye uravneniya na mnogoobraziyakh* (Linear differential equations on manifolds), Voronezh: Voronezh State University, 1980, 131 p.
12. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Moscow: Nauka, 1965, 331 p.
13. Myshkis A.D. *Lineinye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* (Linear differential equations with the retarded argument), Moscow: Nauka, 1972, 361 p.
14. Hale J. *Theory of functional differential equations*, Berlin: Springer-Verlang, 1977, 231 p.
15. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems in the theory of stability of motion), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 211 p.
16. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
17. Levitan B.M. *Pochti-periodicheskie funktsii* (Almost periodic functions), Moscow: Gostekhizdat, 1953, 396 p.
18. Levitan B.M., Zhikov V.V. *Almost periodic functions and differential equations*, CUP Archive, 1982, 211 p.
19. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of optimal processes), Moscow: Nauka, 1969, 384 p.
20. Engel'king R. *Obshchaya topologiya* (General Topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.
21. Skvortsov V.A. Borel set, *Mathematical encyclopedia*, Moscow: Soviet Encyclopedia, 1977, vol. 1, p. 535.
22. Hausdorff F. *Set theory*, American Mathematical Soc., 1957, 352 p.
23. Milich N.V. Structure of the set of control and position control of a linear nonstationary system, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Izhevsk, 2000, 117 p (in Russian). `http://minimax.school.udsu.ru/files/1275393018.pdf`
24. Nikolaev S.F. Properties of the speed function and position control of a linear nonstationary system, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Izhevsk, 1998, 117 p (in Russian). `http://minimax.school.udsu.ru/files/1275393020.pdf`

Received 01.04.2014

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru