УДК 517.977

© *Д. А. Серков*

МИНИМИЗАЦИЯ РИСКА ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ ПОМЕХУ[1]

В обзоре изложены вопросы применения критерия Ниханса–Сэвиджа к задачам управления в условиях динамических помех: дается мотивация и постановка задачи минимизации риска при различных функциональных ограничениях на помеху; приводятся непосредственные соотношения, связывающие результаты при различных ограничениях и классах разрешающих стратегий; даны примеры решения различных задач управления с этим критерием оценки; сопоставляются результаты, получаемые с применением критерия Ниханса–Сэвиджа, с результатами, базирующимися на классическом минимаксном критерии; исследуются условия неулучшаемости стратегий с полной памятью; дается представление функции оптимального риска как предела итерационной программной конструкции для функционала сожаления и условие регулярности этого функционала; приводятся другие условия на рассматриваемую управляемую систему, обеспечивающие возможность численной реализации оптимальной по риску стратегии.

Ключевые слова: стратегия с полной памятью, критерий Сэвиджа, функциональные ограничения на помеху.

Содержание

Введение 4

1. Постановка задачи 6
- 1.1. Критерий Ниханса–Сэвиджа в стационарном случае . . . 6
- 1.2. Динамика системы . . . 8
- 1.3. Стратегии и движения . . . 9
- 1.4. Пошаговые движения для помех каратеодориевского типа . . . 11
- 1.5. Конструктивные движения . . . 12
- 1.6. Задача минимизации риска в терминах конструктивных движений . . . 16
  - 1.6.1. Формализация в терминах пошаговых движений . . . 17
- 1.7. Задача минимизации риска в классе квазистратегий . . . 19

2. Отдельные свойства и непосредственные соотношения 19
- 2.1. Пример: изменение оптимального риска при изменении класса помех . . . 20
- 2.2. Пример оптимальной по риску стратегии . . . 24
- 2.3. Сравнение оптимальной гарантии и минимального риска . . . 34

3. Неулучшаемость по риску стратегий с полной памятью 41
- 3.1. Определение стратегий $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ . . . 42
- 3.2. Риск-оптимальность стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ . . . 45
  - 3.2.1. Доказательство теоремы 3.1 . . . 48

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 12–П–1–1002), а также при поддержке РФФИ (проект № 12–01–00290-а).

4. Программные итерации функции сожаления 57
4.1. Определения, начальные свойства 57
4.2. Представление оптимального риска в форме предела программных итераций 62

5. Конструктивные варианты риск-оптимальных стратегий 64
5.1. Определение стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ 64
5.2. Риск-оптимальность стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ 67
5.2.1. Доказательство теоремы 5.1 73
5.3. Случай конечного набора «тестовых» управлений 73
5.3.1. Схема доказательства теоремы 5.2 74
5.4. Случай регулярности программного максимина 75
5.4.1. Условие риск-регулярности 76
5.4.2. Примеры риск-регулярных задач 79

6. Отдельные результаты для случая терминального показателя качества 80
6.1. Интегральная форма функции оптимального риска 80
6.2. Локальное свойство оптимального результата в регулярном случае 84

7. Приложение 86

Введение

В теории дифференциальных игр [1–5] рассматривается ситуация активного противодействия помехи намерениям управляющей стороны. В этих условиях естественным образом возникают предположения о наличии стороны, осуществляющей формирование помехи исходя из целей, противоположных целям управления, а также об осведомленности этой стороны о состоянии управляемой системы и/или о действиях управляющей стороны. Такая характеристика помехи с необходимостью влечет конструкцию оценки действий управляющей стороны на основе минимаксного критерия. Этот тип задач управления хорошо изучен в рамках указанной теории, для него построены эффективные решения.

Вместе с тем известны многочисленные задачи управления, в которых помеха заведомо не имеет антагонистического характера. Иначе говоря,

(а) поведение помехи не связано со значениями рассматриваемого показателя качества;

(б) поведение помехи не зависит от состояния управляемой системы или действий управляющей стороны.

К таким задачам относятся, например,

— задачи управления материальными системами при наличии природных воздействий (управление транспортными средствами, управление ирригационными, гидроэнергетическими системами, локализация пожаров, наводнений, техногенных загрязнений и т. п.);

— задачи управления малыми (не имеющими доминирующего положения) экономическими объектами в изменяющихся макроэкономических условиях.

В этих задачах также можно строить оптимальный гарантированный результат управления, но приписывание помехе возможности реагировать на состояние объекта управления, на управляющие воздействия и/или противодействовать управляющей стороне может ухудшить этот результат, отвечающий содержанию исходной задачи управления.

Отметим в этой связи, что между антагонистической помехой и наихудшей помехой имеется существенное различие. Эти понятия часто отождествляют, полагая, что более жесткие предположения о характере помехи — предположение об антагонистическом характере ее поведения — не изменят решение исходной задачи, а лишь дадут «дополнительные гарантии». В отдельных случаях такая подмена характера помехи объяснима повышенными требованиями к гарантированному результату, сложным или не до конца изученным механизмом взаимодействия контролируемых и неконтролируемых параметров управляемой системы. Однако, чем бы ни диктовалась такая подмена характера помехи, во многих случаях это приводит к качественному изменению задачи управления. А именно, существенно изменяется значение оптимального результата. Как следствие, в новой задаче гарантированный результат, отвечающий исходной задаче управления, не достигается.

Таким образом, задачи управления при неантагонистической помехе имеют самостоятельное значение и содержательные предпосылки.

Свойство антагонистичности можно понимать как способность помехи изменяться в зависимости от действий управляющей стороны и/или состояния управляемой системы. Отталкиваясь от такого понимания, в качестве формального описания «нейтрального» поведения помехи можно рассматривать те или иные ограничения на ее изменение в зависимости от изменения фазового состояния системы или управления. В отличие от «ресурсных» ограничений, выражаемых обычно мгновенными геометрическими или интегральными ограничениями на неконтролируемые параметры управляемой системы, эти ограничения носят функциональный характер. Простейшим ограничением такого рода является предположение о программном поведении помехи, то есть предположение о том, что помеха описывается некоторой заранее неизвестной, но фиксированной функцией времени. Другой естественный с точки зрения приложений вариант дают помехи, порождаемые некоторой неизвестной функцией каратеодориевского типа, то есть функцией непрерывной по пространственной переменной и измеримой по временно́й.

Наиболее «широкое» из рассматриваемых здесь функциональных ограничений предложено и рассмотрено в работе А. В. Кряжимского [6] в связи с изучением свойств стратегий с полной памятью. Предполагалось, что реализации помехи содержатся в некотором неизвестном L_{p}-компактном подмножестве заранее заданного множества допустимых помех (далее задачи с таким ограничением на помехи, будут именоваться задачами с «L_{p}-компактными ограничениями на помеху»). Для этого вида ограничений в указанной работе при весьма общих предположениях об управляемой системе и показателе качества устанавливается, в частности, равенство оптимальных результатов, достигаемых в классе стратегий с полной памятью [3, § 95] и в классе квазистратегий.

Задачи управления с функционально ограниченной помехой исследовались как вспомогательный инструмент (см. [2,3] и библиографию в этих книгах) для решения задачи в случае помехи общего вида, а также в качестве самостоятельной проблемы [6–8].

Так, в конструкции программного максимина Н. Н. Красовского [3,4,9] программные помехи используются для нахождения оптимального гарантированного результата и оптимальных позиционных стратегий в задаче с «произвольными» помехами. Для широкого круга задач управления стохастический программный максимин [5], в котором действуют неупреждающие стохастические программные помехи, дает цену соответствующей дифференциальной игры.

В работах Н. Н. Барабановой и А. И. Субботина [7, 8] в рамках изучения дифференциальных игр для линейных управляемых систем исследовались множества программного поглощения [10, 11] для случаев, когда помеха формируется непрерывной позиционной стратегией либо посредством полунепрерывного сверху многозначного отображения, определенного на расширенном фазовом пространстве управляемой системы. Было установлено, что указанные множества поглощения совпадают с исходным множеством, формируемым программной помехой.

Еще одним направлением в исследовании задач управления с неантагонистической помехой является переход от классического — минимаксного — критерия оценки управления к другой конструкции этой оценки, возможно в большей степени отвечающей сути рассматриваемой задачи. Минимаксный критерий качества отражает эффективность управления при наиболее неблагоприятных помехах, практически не реагируя на качество управления в случаях, когда действия помехи нейтральны или благоприятны по отношению к целям управления. В этих случаях (случаях нейтрального поведения помехи) управление, оптимальное в смысле минимаксного критерия, может, вообще говоря, «упускать возможности» улучшения результата. Модельные примеры такого рода эффектов приводятся ниже (см. п. 2.3). В 1948 г. в работе Ю. Ниханса [12] и в 1951 г. у Л. Дж. Сэвиджа [13] введено новое понятие оптимального решения в игре двух лиц, которое по своей конструкции существенно отличается от минимаксного решения. В литературе этот подход обычно именуется критерием Сэвиджа.

Говоря неформально, традиционный минимаксный критерий качества отражает эффективность управления при наиболее неблагоприятных помехах, практически не реагируя на качество управления в случаях, когда действия помехи нейтральны или благоприятны по отношению к целям управления.

В литературе можно встретить различные названия данного критерия. В дальнейшем для его обозначения будем использовать термин «критерий минимального риска». Стратегию, оптимальную в смысле Ниханса–Сэвиджа, для краткости мы будем называть оптимальной по риску, а величину соответствующего риска (сожаления) — оптимальным риском.

Критерий Сэвиджа, именуемый как minimax Time–Loss, использовался в работе [14], посвященной задаче быстродействия при наличии помех.

1. Постановка задачи

1.1. Критерий Ниханса–Сэвиджа в стационарном случае

Дадим определение оптимального решения в смысле Ниханса–Сэвиджа на примере матричной игры.

Пусть имеется матричная игра, в которой множество альтернатив (управления) задано множеством $\mathbf{U} := \{u_1, u_2\}$, множество неопределенностей (помех) определено как $\mathbf{V} := \{v_1, v_2, v_3\}$ и результат игры оценивается матрицей исходов $\varphi(\cdot)$:

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} \ni (u, v) \mapsto \varphi(u, v) \in \mathbb{N}.$$

Распоряжаясь выбором альтернативы (управления), следует минимизировать эту оценку при неизвестном заранее значении неопределенности (помехи).

Обозначим $\mathbf{U}_{mm}$ множество решений этой задачи при минимаксном критерии:

$$\mathbf{U}_{mm} := \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} \max_{v \in \mathbf{V}} \varphi(u, v);$$

величина $\varphi{\Uparrow}(u) := \max_{v \in \mathbf{V}} \varphi(u, v)$ — гарантированный результат при выборе альтернативы $u \in \mathbf{U}$.

Обозначим $\mathbf{U}_{or}$ множество решений при использовании критерия минимального риска:

$$\mathbf{U}_{or} := \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} \max_{v \in \mathbf{V}} \{\varphi(u, v) - \min_{u' \in \mathbf{U}} \varphi(u', v)\};$$

здесь

$\min_{u\in\mathbf{U}} \varphi(u,v)$ — *оптимальный результат* при реализации $v \in \mathbf{V}$;

$\varphi(u,v) - \min_{u\in\mathbf{U}} \varphi(u,v)$ — *сожаление* о выборе альтернативы u при реализации неопределенности v;

$\max_{v\in\mathbf{V}}\{\varphi(u,v) - \min_{u\in\mathbf{U}} \varphi(u,v)\}$ — *риск* при выборе альтернативы u

и, наконец,

$\min_{u\in\mathbf{U}} \max_{v\in\mathbf{V}}\{\varphi(u,v) - \min_{u\in\mathbf{U}} \varphi(u,v)\}$ — *оптимальный (минимальный) риск.*

Таким образом, в постановкеНиханса–Сэвиджа требуется найти альтернативу с минимальным (оптимальным) риском и величину этого риска.

Далее приведен ряд матричных игр, показывающих независимость этих двух способов оценки выбора альтернативы. Под независимостью понимается отсутствие какого-либо общего отношения, связывающего решения одной и той же задачи оптимального выбора при этих двух критериях оценки.

Последняя колонка в табличках указывает риск при выборе альтернативы, предпоследняя — ее гарантированный результат. В последней строке таблицы показан оптимальный результат при реализации помехи v. Остальные ячейки таблицы показывают заданные значения исхода $\varphi(u,v)$ при выборе альтернативы $u \in \mathbf{U} := \{u_1, u_2\}$ и реализации неопределенности $v \in \mathbf{V} := \{v_1, v_2, v_3\}$.

	v_1	v_2	v_3	$\varphi\Uparrow(u)$	$\Phi\Uparrow(u)$
u_1	3	5	4	5	1
u_2	4	4	4	4	1
$\varphi\Downarrow(v)$	3	4	4		

$$\mathbf{U}_{mm} = \{u_2\}, \quad \mathbf{U}_{or} = \{u_1, u_2\},$$
$$\mathbf{U}_{mm} \subset \mathbf{U}_{or} = \mathbf{U}$$

	v_1	v_2	v_3	$\varphi\Uparrow(u)$	$\Phi\Uparrow(u)$
u_1	2	5	5	5	1
u_2	4	4	5	5	2
$\varphi\Downarrow(v)$	2	4	5		

$$\mathbf{U}_{mm} = \{u_1, u_2\}, \quad \mathbf{U}_{or} = \{u_1\},$$
$$\mathbf{U}_{or} \subset \mathbf{U}_{mm} = \mathbf{U}$$

	v_1	v_2	v_3	$\varphi\Uparrow(u)$	$\Phi\Uparrow(u)$
u_1	2	5	4	5	1
u_2	4	4	4	4	2
$\varphi\Downarrow(v)$	2	4	4		

$$\mathbf{U}_{mm} = \{u_2\}, \quad \mathbf{U}_{or} = \{u_1\},$$
$$\mathbf{U}_{mm} \cap \mathbf{U}_{or} = \varnothing$$

	v_1	v_2	v_3	$\varphi\Uparrow(u)$	$\Phi\Uparrow(u)$
u_1	4	5	4	5	1
u_2	4	4	4	4	0
$\varphi\Downarrow(v)$	4	4	4		

$$\mathbf{U}_{mm} = \{u_2\}, \quad \mathbf{U}_{or} = \{u_2\},$$
$$\mathbf{U}_{mm} = \mathbf{U}_{or} \neq \mathbf{U}$$

	v_1	v_2	v_3	$\max_v$	$\Phi\Uparrow(u)$
u_1	3	5	5	5	1
u_2	4	4	5	5	1
$\varphi\Downarrow(v)$	3	4	5		

$$\mathbf{U}_{mm} = \{u_1, u_2\}, \quad \mathbf{U}_{or} = \{u_1, u_2\},$$
$$\mathbf{U}_{mm} = \mathbf{U}_{or} = \mathbf{U}$$

Как видно из приведенных примеров, множества решений матричной игры, определяемые минимаксным критерием и критерием минимального риска, в зависимости от целевой функции φ могут находиться друг относительно друга в любых теоретико-множественных отношениях.

Указанные свойства критерия Ниханса–Сэвиджа делают целесообразным его применение в ситуациях, когда помеха заведомо не имеет антагонистического характера. В литературе можно встретить различные названия этого критерия. В дальнейшем для его обозначения будет использоваться термин «критерий минимального риска».

1.2. Динамика системы

В данном пункте даются описание динамики рассматриваемой управляемой системы и используемые в дальнейшем обозначения отдельных множеств и объектов.

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T := [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где «$:=$» означает «равно по определению». Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Борелю функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям

$$u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q, \quad \tau \in T. \tag{1.2}$$

Множества всех таких реализаций управления и помехи обозначим соответственно как $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть компакты в соответствующих евклидовых пространствах.

В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что

— она определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;

— локально липшицева по второй переменной:

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f(S)\|x_1 - x_2\|, \tag{1.3}$$

где $(\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S$, $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$ и S — любое компактное подмножество из $\mathbb{R}^{n+1}$; $L_f(S)$ — константа Липшица, зависящая от множества S;

— удовлетворяет условию подлинейного роста:

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant K(1 + \|x\|), \quad K \geqslant 0,$$

при любых $(\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

При указанных условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ и единственно при любых реализациях управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ (см. [15, II.4]). Для всех $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (1.1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим следующее подмножество пространства состояний системы (1.1):

$$G := \mathbf{cl}_{T\times\mathbb{R}^n} \Big\{(\tau, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \mid x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\Big\}.$$

Проверяется, что в силу определения и свойств управляемой системы (1.1), (1.2) множество G компактно в $\mathbb{R}^{n+1}$ и при любых $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $(t_*, z_*) \in G$ движение $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ не покинет G вплоть до момента ϑ. Обозначим максимум нормы правой части системы (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ через $\varkappa(G)$:

$$\varkappa(G) := \max_{\substack{(\tau,x)\in G\\ u\in\mathcal{P}, v\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau, x, u, v)\|. \tag{1.4}$$

Будем говорить, что для системы (1.1) выполняется *условие седловой точки* [3], если для всех $(\tau, x) \in G$, $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\min_{u\in\mathcal{P}} \max_{v\in\mathcal{Q}} \langle s, f(\tau, x, u, v)\rangle = \max_{v\in\mathcal{Q}} \min_{u\in\mathcal{P}} \langle s, f(\tau, x, u, v)\rangle. \tag{1.5}$$

1.3. Стратегии и движения

В этом пункте определяются множество стратегий управления и пучки конструктивных движений, порожденных стратегией, при тех или иных ограничениях на помеху. Приводятся свойства этих пучков. В частности, устанавливается отношение включения между пучками движений при каратеодориевских помехах и компактных множествах помех, отношение равенства между пучками движений $\mathcal{X}^+_{\mathrm{p}}(z_0, \mathbb{U})$ и $\mathcal{X}_{\mathrm{c}}(z_0, \mathbb{U})$; показана стабильность интегральных воронок, порождаемых пучками движений при программных и при произвольных помехах. Эти свойства используются в дальнейших построениях и оценках. Построения в основном следуют идее конструктивных движений [3] — пределов пошаговых решений уравнения (1.1) при кусочно-постоянных реализациях управления.

Для произвольных $(t_*, z_*) \in G$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ введем следующие обозначения:

$$X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot)) := \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)} \big\{x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\big\}, \tag{1.6}$$

$$X(t_*, z_*, u(\cdot), \mathcal{V}) := \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)} \big\{x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \mid v(\cdot) \in \mathcal{V}\big\}, \tag{1.7}$$

$$X(G_0) := \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)} \bigcup_{\substack{z_0 \in G_0 \\ v(\cdot) \in \mathcal{V}}} X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{cl}_X Z$ обозначает замыкание множества $Z \subseteq X$ в топологии пространства X, а $C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ — множество непрерывных функций из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой равномерной сходимости.

В дальнейшем для $z_0 \in G_0$ будут также использоваться обозначения

$$\begin{aligned} X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) &:= X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \\ X(z_0, u(\cdot), \mathcal{V}) &:= X(t_0, z_0, u(\cdot), \mathcal{V}), \\ X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) &:= \bigcup_{z_0 \in G_0} X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)). \end{aligned}$$

Пусть

$$\Delta_T := \left\{ \Delta \in 2^T \setminus \{\varnothing\} \;\middle|\; |\Delta| < \infty,\ \min_{\tau \in \Delta} \tau = t_0,\ \max_{\tau \in \Delta} \tau = \vartheta \right\};$$

здесь $|\Delta|$ обозначает количество элементов во множестве Δ. Для всякого $\Delta \in \Delta_T$ определим единственный кортеж

$$(\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta} \in T^{|\Delta|}, \quad n_\Delta := |\Delta| - 1,$$

сохраняющий естественный порядок в T ($\tau_i > \tau_{i-1}$, $i \in 1..n_\Delta$), и числа

$$\mathrm{D}(\Delta) := \max_{i \in 1..n_\Delta} \tau_i - \tau_{i-1}, \quad \mathrm{d}(\Delta) := \min_{i \in 1..(n_\Delta - 1)} \tau_i - \tau_{i-1}.$$

Отметим, что длина интервала $[\tau_{n_\Delta - 1}, \tau_{n_\Delta})$ не участвует в определении величины $\mathrm{d}(\Delta)$. Элементы множества Δ_T будем называть *разбиениями* отрезка T. Каждое разбиение Δ порождает дизъюнктное покрытие интервала $[t_0, \vartheta)$ системой интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $\tau_{i-1}, \tau_i \in \Delta$, $i \in 1..n_\Delta$. Для всех $\Delta \in \Delta_T$ и $t \in T$ определим $i_t := \max\{i \in 0..n_\Delta \mid \tau_i \leqslant t\}$; таким образом, выполняется включение $t \in [\tau_{i_t}, \tau_{i_t + 1})$.

Лемма 1.1. *Всякое разбиение $\Delta := (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$ можно «проредить» до некоторого разбиения $\Delta' \in \Delta_T$ так, что полученное разбиение Δ' будет удовлетворять условиям*

$$\Delta' \subseteq \Delta, \qquad \mathrm{D}(\Delta') \leqslant 3 \min\{\mathrm{d}(\Delta'), \mathrm{D}(\Delta)\}.$$

Доказательство. Процедура перехода от Δ к Δ' с указанными свойствами может быть определена, например, следующим образом:

$$\Delta' := \big\{\tau'_{n_{\Delta'}} := \vartheta, \tau'_i := \operatorname{argmin}\{\tau \in \Delta \mid \tau \geqslant i 2\,\mathrm{D}(\Delta)\},\\ i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant i \leqslant (\vartheta - t_0)/(2\,\mathrm{D}(\Delta))\big\}. \quad (1.9)$$

После этого не трудно проверить неравенства

$$\mathrm{D}(\Delta') \leqslant 3\,\mathrm{d}(\Delta'), \qquad \mathrm{D}(\Delta') \leqslant 3\,\mathrm{D}(\Delta)\,.$$

□

Следуя [6], определим множество стратегий с полной памятью.

Назовем *обратной связью с полной памятью на разбиении* $\Delta = (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$ и обозначим $\mathbf{U}^\Delta := (\mathbf{U}_i^\Delta(\cdot))_{i \in 0..(n_\Delta - 1)}$ всякое конечное семейство операторов вида

$$\mathbf{U}_i^\Delta(\cdot) : C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{U}|_{[\tau_i, \tau_{i+1})}, \qquad i \in 0..(n_\Delta - 1).$$

Назовем *позиционной стратегией с полной памятью* и обозначим $\mathbb{U}$ всякое семейство $(\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta \in \Delta_T}$ обратных связей с полной памятью, определенных на всех разбиениях $\Delta \in \Delta_T$. Множество всех позиционных стратегий с полной памятью обозначим $\mathbf{S}$.

Назовем *пошаговым движением* из $z_0 \in \mathbb{R}^n$ и *реализацией управления* при обратной связи $\mathbf{U}^\Delta = (\mathbf{U}_i^\Delta(\cdot))_{i \in 0..(n_\Delta - 1)}$ на разбиении Δ при помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и обозначим, соответственно,

$$x(\cdot) := x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \quad (1.10)$$

и

$$u(\cdot) := u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)) \in \mathcal{U} \quad (1.11)$$

функции, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & x(t, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), \\ u(t) & = & \mathbf{U}_{i_t}^\Delta(x(\cdot)|_{[t_0, \tau_{i_t}]})(t), \qquad t \in T. \end{array}$$

Из данных определений непосредственно следует, что пошаговые движения и соответствующие реализации управления удовлетворяют следующему *свойству неупреждаемости*: для любых $z_0 \in G_0$, $\Delta \in \Delta_T$, $\tau \in T$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, $\mathbf{U}^\Delta \in \mathbb{U}$ и $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы равенства

$$x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot))|_{[t_0, \tau]} = x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, (v, v')_\tau(\cdot))|_{[t_0, \tau]}, \quad (1.12)$$

$$u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot))|_{[t_0, \tau)} = u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, (v, v')_\tau(\cdot))|_{[t_0, \tau)}. \quad (1.13)$$

Здесь и далее для непустого множества S, функций $p, q : T \mapsto S$ и $t' \in [t, \vartheta]$ символами $(p, q)_{t'}(\cdot)$ обозначена следующая функция из T в S:

$$(p, q)_{t'}(\tau) := \begin{cases} p(\tau), & \tau \in [t_0, t'), \\ q(\tau), & \tau \in [t', \vartheta]. \end{cases}$$

1.4. Пошаговые движения для помех каратеодориевского типа

Обратимся к определению пошаговых движений в случае, когда помеха формируется некоторой функцией каратеодориевского типа: пусть V — некоторая функция Каратеодори из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathcal{Q}$ (см. [15, п. II.2]), то есть функция, измеримая по первому аргументу при произвольном значении второго и непрерывная по второму при почти всех значениях первого аргумента. Множество всех таких функций обозначим $\mathbf{V}_{\text{CAR}}$. Опираясь на известные теоремы существования (см. [15, теорема II.4.3]), можно установить, что при любом выборе такой функции V и произвольной реализации управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ существует (возможно, не единственное) решение в смысле Каратеодори следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), V(\tau, x(\tau))), \quad \tau \in T, \tag{1.14}$$

с начальным условием $x(t_0) = z_0$. Множество всех решений уравнения (1.14) с таким начальным условием обозначим $X(z_0, u(\cdot), V)$. В силу [15, теорема I.5.25] множество реализаций помехи

$$\mathbf{V}(z_0, u(\cdot), V) := \{v(\tau) = V(\tau, x(\tau)), \tau \in T \mid x(\cdot) \in X(z_0, u(\cdot), V)\},$$

возникающее из движений $X(z_0, u(\cdot), V)$, удовлетворяет включению

$$\mathbf{V}(z_0, u(\cdot), V) \subseteq \mathcal{V}.$$

Таким образом, для любых $z_0 \in G_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$ и $v(\cdot) \in \mathbf{V}(z_0, u(\cdot), V)$ выполняются соотношения

$$v(\tau) = V(\tau, x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))), \quad \tau \in T.$$

Определим пучок пошаговых движений $X(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)$, порождаемый обратной связью с полной памятью $\mathbf{U}^\Delta$ на разбиении $\Delta \in \Delta_T$ и помехами, возникающими при выборе функции $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$, индуктивно: на первом интервале разбиения Δ положим управление равным

$$u(\tau) = \mathbf{U}_0^\Delta(x(\cdot))(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1).$$

Получим пучок движений $X(z_0, u(\cdot), V) \subset C([\tau_0, \tau_1]; \mathbb{R}^n)$ и множество реализаций управления

$$U(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V) := \{u(\cdot)\} \subseteq \mathcal{U}_{[\tau_0, \tau_1)},$$

пока состоящее из единственного элемента.

Пусть к моменту $\tau_i \in \Delta$, $i \in 1..(n_\Delta - 1)$, построено множество реализаций управления

$$U(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)|_{[\tau_0, \tau_i)} \subseteq \mathcal{U}|_{[\tau_0, \tau_i)}$$

и для каждой реализации $u(\cdot) \in U(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)|_{[\tau_0, \tau_i)}$ определено множество соответствующих движений системы

$$X(z_0, u(\cdot), V)|_{[\tau_0, \tau_i]} \subset X(z_0, u(\cdot), \mathcal{V})|_{[\tau_0, \tau_i]}.$$

Исходя из множеств $U(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)|_{[\tau_0, \tau_i)}$ и $X(z_0, u(\cdot), V)|_{[\tau_0, \tau_i]}$, определим множества пошаговых движений и соответствующих реализаций управления на интервале $[\tau_0, \tau_{i+1})$:

$$X(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)|_{[\tau_0, \tau_{i+1}]} := \bigcup_{u(\cdot) \in U(z_0, \mathbf{U}^\Delta, V)|_{[\tau_0, \tau_{i+1})}} X(z_0, u(\cdot), V)|_{[\tau_0, \tau_{i+1}]},$$

$$U(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)|_{[\tau_0,\tau_{i+1}]} := \big\{(u(\cdot),u'(\cdot))_{\tau_i} \mid u(\cdot)\in U(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)|_{[\tau_0,\tau_i)},$$
$$u'(\tau) := \mathbf{U}_i^\Delta(x(\cdot)|_{[\tau_0,\tau_i]})(\tau), \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}), x(\cdot)\in X(z_0,u(\cdot),V)|_{[\tau_0,\tau_i]}\big\}. \quad (1.15)$$

В итоге к моменту $\tau_{n_\Delta} = \vartheta$ получим множества $X(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)$ пошаговых движений, а также множества $U(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)\subset\mathcal{U}$ и $\mathbf{V}(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)\subset\mathcal{V}$ соответствующих реализаций управления и помехи при разбиении Δ, связанные соотношениями

$$X(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V) = \bigcup_{u(\cdot)\in U(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)} X(z_0,u(\cdot),V), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{V}(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V) = \bigcup_{u(\cdot)\in U(z_0,\mathbf{U}^\Delta,V)} \mathbf{V}(z_0,u(\cdot),V). \quad (1.17)$$

1.5. Конструктивные движения

Теперь, когда во всех требуемых случаях определены пошаговые движения, перейдем к определению на их основе конструктивных движений (см. [3]), порожденных выбранной стратегией при тех или иных функциональных ограничениях на помеху.

Пусть имеются $z_0\in G_0$, $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$, $V\in\mathbf{V}_{\text{CAR}}$ и произвольное подмножество $\mathbf{V}\subseteq\mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$\{(z_{0k},v_k(\cdot),\Delta_k,\mathbf{U}^{\Delta_k})\in G_0\times\mathbf{V}\times\Delta_T\times\mathbb{U} \mid k\in\mathbb{N}\}, \quad (1.18)$$

удовлетворяющие условиям

$$\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x(\cdot) - x(\cdot,z_{0k},\mathbf{U}^{\Delta_k},v_k(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (1.19)$$

Определим пучок движений $X^+(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V})$ как множество всех $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности вида

$$\{(z_{0k},v_k(\cdot),\Delta_k,\mathbf{U}^{\Delta_k})\in G_0\times\mathcal{V}\times\Delta_T\times\mathbb{U} \mid k\in\mathbb{N}\}, \quad (1.20)$$

удовлетворяющие условиям (1.19) и условию

$$\lim_{k\to\infty} \|v(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0$$

при некотором $v(\cdot)\in\mathbf{V}$.

Определим пучок $X^{\text{CAR}}(z_0,\mathbb{U},V)$ конструктивных движений, порождаемых стратегией $\mathbb{U}$ и функцией $V\in\mathbf{V}_{\text{CAR}}$, как множество всех элементов $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности вида

$$\{(z_{0k},v_k(\cdot),\Delta_k,\mathbf{U}^{\Delta_k})\in G_0\times\mathbf{V}(z_{0k},\mathbf{U}^{\Delta_k},V)\times\Delta_T\times\mathbb{U} \mid k\in\mathbb{N}\}, \quad (1.21)$$

удовлетворяющие условиям (1.19).

Замечание 1. Из свойства неупреждаемости пошаговых движений (1.12) будут следовать свойства неупреждаемости пучков движений $X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})$ и $X^+(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})$: для любых $z_0\in G_0$, $\tau\in[t_0,\vartheta]$, $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$, $v(\cdot),v'(\cdot)\in\mathcal{V}$ справедливы равенства

$$X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})|_{[t_0,\tau]} = X(z_0,\mathbb{U},\{(v,v')_\tau(\cdot)\})|_{[t_0,\tau]}, \quad (1.22)$$
$$X^+(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})|_{[t_0,\tau]} = X^+(z_0,\mathbb{U},\{(v,v')_\tau(\cdot)\})|_{[t_0,\tau]}.$$

Отметим два важных в дальнейшем свойства введенных пучков движений и соответствующих релизаций помехи. Обозначим $\mathbf{comp}_{L_\mathrm{p}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ — семейство всех подмножеств $\mathcal{V}$, компактных в сильной топологии пространства $L_2(T;\mathbb{R}^n)$.

Л е м м а 1.2. *Для любых $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ выполнено равенство*

$$\bigcup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}) = \bigcup_{\mathbf{V}\in\mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})} X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}). \tag{1.23}$$

Доказательство. Включение $\subseteq$ следует из включения

$$\{v_k(\cdot) \in \mathcal{V} \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V}),$$

справедливого для сходящихся в $L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)$ последовательностей из $\mathcal{V}$.

Докажем обратное включение. Пусть $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$. Тогда, по определению множества $X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$, существует последовательность вида (1.18) такая, что выполняются равенства (1.19). В силу компактности в $L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^n)$ множества $\mathbf{V}$ найдутся $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ и подпоследовательность индексов $\{k_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ такие, что выполнится равенство

$$\lim_{i\to\infty} \|v(\cdot) - v_{k_i}(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Понятно, что для соответствующих подпоследовательностей

$$\{(z_{0k_i}, v_{k_i}(\cdot), \Delta_{k_i}, \mathbf{U}^{\Delta_{k_i}}) \in G_0 \times \mathbf{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U} \mid i \in \mathbb{N}\},$$

$$\{x(\cdot, z_{0k_i}, \mathbf{U}^{\Delta_{k_i}}, v_{k_i}(\cdot)) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

будут верны соотношения

$$\lim_{k\to\infty} z_{0k_i} = z_0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\Delta_{\mathrm{k_i}}) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x(\cdot) - x(\cdot, z_{0k_i}, \mathbf{U}^{\Delta_{k_i}}, v_{k_i}(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0,$$

отвечающие условиям (1.19). Значит, по определению множества $X^+(z_0,\mathbb{U}, \{v(\cdot)\})$, выполняется включение

$$x(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}).$$

Таким образом, при любом $\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ верны включения

$$X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}) \subseteq \bigcup_{v(\cdot)\in\mathbf{V}} X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}) \subseteq \bigcup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}).$$

Из этих соотношений следует обратное включение $\supseteq$, которое влечет искомое равенство (1.23). □

Л е м м а 1.3 (см. [16]). *Для всякой функции $V \in \mathbf{V}_{\mathrm{CAR}}$ множество реализаций, порождаемых этой функцией $V(X(G_0)) \subset \mathcal{V}$,*

$$V(X(G_0)) := \{v(\cdot) \in \mathcal{V} \mid v(\tau) := V(\tau, x(\tau)), x(\cdot) \in X(G_0)\}$$

предкомпактно в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием компактности множества в пространстве $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ (теорема Колмогорова [17, с. 460]): ограниченность множества $V(X(G_0))$ сразу следует из компактности мгновенных геометрических ограничений на реализации помехи. Установим, что функции Стеклова $v_h(\cdot)$ при $h \to +0$ сходятся в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ к соответствующим функциям $v(\cdot) \in V(X(G_0))$ равномерно на $V(X(G_0))$.

Пусть $x(\cdot) \in X(G_0)$, $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$. Продолжим движение $x(\cdot)$ и функцию V на интервал $[t_0 - 1/2, \vartheta + 1/2]$ константами

$$x(\tau) := \begin{cases} x(t_0), & \tau \in [t_0 - 1/2, t_0], \\ x(\tau), & \tau \in [t_0, \vartheta], \\ x(\vartheta), & \tau \in [\vartheta, \vartheta + 1/2], \end{cases}$$

$$V(\tau, x) := \begin{cases} 0, & \tau \in [t_0 - 1/2, t_0], x \in \mathbb{R}^n, \\ V(\tau, x), & \tau \in [t_0, \vartheta], x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \tau \in [\vartheta, \vartheta + 1/2], x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

и при произвольном $h \in (0, 1/2)$ положим

$$v(\tau) := V(\tau, x(\tau)), \quad v_h(\tau) := \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \frac{v(s)}{2h} ds, \qquad \tau \in T.$$

Оценим величину $\|v_h(\cdot) - v(\cdot)\|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}$:

$$\|v_h(\cdot) - v(\cdot)\|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^q)} := \int\limits_T \|v_h(\tau) - v(\tau)\|^2 d\tau = \int\limits_T \Big\| \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \frac{v(s)}{2h} ds - v(\tau) \Big\|^2 d\tau =$$

$$= \int\limits_T \Big\| \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \frac{v(s) - v(\tau)}{2h} ds \Big\|^2 d\tau \leqslant \int\limits_T \frac{1}{2h} \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2 ds d\tau. \quad (1.24)$$

Известно [15, теорема I.5.26] (обобщение теоремы Лузина), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое измеримое подмножество $E_\varepsilon \subseteq T$, что $\lambda(T \backslash E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и сужение $V|_{E_\varepsilon \times \bar{G}}$ функции $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$ на множество $E_\varepsilon \times \bar{G}$ непрерывно. Здесь

$$\bar{G} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\tau, x) \in G, \tau \in T\}.$$

Обозначим $\Omega_\varepsilon(\cdot) : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty]$ модуль непрерывности функции V на компактном множестве $E_\varepsilon \times \bar{G}$. Обозначим E'_ε множество точек плотности E_ε. В силу замкнутости E_ε и теоремы Лебега о точках плотности измеримого множества (см. теорему 7.2 из приложения) будут выполнены соотношения

$$E'_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon, \quad \lambda(T \backslash E'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \quad (1.25)$$

Продолжим оценки (1.24), используя разложение T на E'_ε и дополнение к нему:

$$= \int\limits_{T \backslash E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2 ds d\tau + \int\limits_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2 ds d\tau.$$

В силу (1.25) имеем оценку (продолжаем выкладки):

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2 + \int\limits_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2 ds d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2 + \int\limits_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{[\tau-h, \tau+h] \backslash E'_\varepsilon} \|v(s) - v(\tau)\|^2 ds d\tau +$$

$$+ \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{[\tau-h,\tau+h]\cap E'_\varepsilon} \|v(s)-v(\tau)\|^2 ds d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot \max_{v\in\mathcal{Q}} \|v\|^2 + \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{2\cdot\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E'_\varepsilon)\cdot \max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2}{h} d\tau +$$

$$+ \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{[\tau-h,\tau+h]\cap E'_\varepsilon} \|v(s)-v(\tau)\|^2 ds d\tau.$$

Воспользуемся равенством $\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon) = \lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E'_\varepsilon)$, которое также следует из упомянутой выше теоремы Лебега, и представлением реализации $v(\cdot)$ (продолжаем выкладки):

$$= 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2 \left(\varepsilon + \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h} d\tau\right) +$$

$$+ \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int\limits_{[\tau-h,\tau+h]\cap E'_\varepsilon} \|V(s,x(s))-V(\tau,x(\tau))\|^2 ds d\tau.$$

Используя модуль непрерывности $\Omega_\varepsilon(\cdot)$ функции V на множестве $E_\varepsilon\times\bar{G}$ оценим внутренний интеграл во втором слагаемом (продолжаем выкладки):

$$\leqslant 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2 \left(\varepsilon + \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h} d\tau\right) +$$

$$+ \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{\lambda([\tau-h,\tau+h]\cap E'_\varepsilon)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h+\max_{|s|\leqslant h}\|x(\tau+s)-x(\tau)\|)}{2h} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2 \left(\varepsilon + \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h} d\tau\right) +$$

$$+ (\vartheta - t_0)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h\cdot(1+\varkappa)).$$

Здесь $\varkappa$ — мажоранта нормы правой части системы (1.1) в области $G\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q}$. В силу определения множества E'_ε выражение под знаком интеграла в первом слагаемом при всех $\tau\in E'_\varepsilon$ стремится к нулю, когда $h\to 0$. Следовательно, при этом и весь интеграл также стремится к нулю.

Таким образом, для произвольных $v(\cdot)\in V(X(G_0))$, $h\in(0,1/2)$ и $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\|v_h(\cdot)-v(\cdot)\|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^q)} \leqslant \Psi(\varepsilon,h)$, а для функции

$$\Psi(\varepsilon,h) := 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2 \left(\varepsilon + \int\limits_{T\cap E'_\varepsilon} \frac{\lambda([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h} d\tau\right) + (\vartheta-t_0)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h\cdot(1+\varkappa))$$

справедливо соотношение $\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{h\to+0}\Psi(\varepsilon,h)=0$. Это эквивалентно искомой равномерной сходимости. $\square$

1.6. Задача минимизации риска в терминах конструктивных движений

Качество движения системы (1.1) будем оценивать функционалом

$$\gamma(\cdot) : C(T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

непрерывным в топологии равномерной сходимости пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$. Сторона, формирующая управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, стремится минимизировать показатель качества (1.26).

Введем формализации задачи управления в условиях динамических помех на основе критерия Ниханса–Сэвиджа в зависимости от заданного семейства функциональных ограничений. Для управляемой системы (1.1) и показателя качества (1.26) вначале определим величины оптимального результата и сожаления, которые участвуют в этом критерии.

Пусть заданы начальное состояние $z_0 \in G_0$, помеха $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и движение $x(\cdot)$ из пучка $X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ всех движений системы (1.1) при реализации помехи $v(\cdot)$ (см. (1.6), с. 9). Этими данными определены величина $\rho(z_0, v(\cdot))$ *оптимального результата*,

$$\rho(z_0, v(\cdot)) := \inf_{x'(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))} \gamma(x'(\cdot)), \tag{1.27}$$

и величина $\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot))$ *сожаления*,

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) := \gamma(x(\cdot)) - \rho(x(t_0), v(\cdot)), \tag{1.28}$$

при выборе движения $x(\cdot)$ и реализации помехи $v(\cdot)$.

Как видно из определения критерия Ниханса–Сэвиджа, для оценки той или иной стратегии следует выделить пучок движений — откликов этой стратегии на каждую из допустимых реализаций помехи. Затем следует взять супремум значений функционала сожаления по всем таким реализациям при заданном ограничении и еще один супремум по всевозможным ограничениям из рассматриваемого класса функциональных ограничений.

Наиболее просто это реализуется в случае программных ограничений: *сожаление при выборе стратегии* $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ *и реализации помехи* $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ определяется величиной

$$\sup_{x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)),$$

где $X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})$ — пучок движений, порожденных стратегией $\mathbb{U}$ при программной помехе $v(\cdot)$ из начального состояния z_0 (см. (1.18), с. 12).

Замечание 2. К такому определению величины сожаления приводит рассмотрение величин сожаления (1.28) на последовательностях пошаговых движений, порожденных стратегией $\mathbb{U}$ при измельчающихся разбиениях интервала управления (см. п. 1.3, с. 9). В силу непрерывности в $C(T, \mathbb{R}^n)$ показателя качества γ и непрерывности по первому аргументу функционала ρ (см. (3.22), с. 46) величины сожаления на указанных пошаговых движениях сходятся к величинам сожалений на соответствующих конструктивных движениях.

Соответственно, *риск* $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U}$ *при программных ограничениях на помеху* определим величиной

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{1.29}$$

а *оптимальный риск* $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0)$ *при программных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0 — величиной

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}). \tag{1.30}$$

Если помеха порождается некоторой неизвестной функцией $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$ типа Каратеодори, то в силу аналогичных рассуждений приходим к следующим определениям *риска* $\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ *и минимального риска* $\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0)$ *при помехах, порождаемых функциями Каратеодори* для начального состояния z_0:

$$\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}} \\ x(\cdot) \in X^{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}, V) \\ v(\tau) = V(\tau, x(\tau)), \tau \in T}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{1.31}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}). \tag{1.32}$$

Здесь $X^{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}, V)$ — пучок движений, порожденных стратегией $\mathbb{U}$ и функцией Каратеодори V из начального состояния z_0 (с. 12).

Не столь очевидны подходы к определению в случае, когда реализации помехи ограничены некоторым заранее не известным подмножеством $\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\text{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$. В предыдущих двух случаях мы отталкивались от явной привязки всякого конструктивного движения к некоторой реализации помехи, которую и ставили в паре с этим движением в показатель сожаления $\gamma_{\mathbf{s}}$. Для пучка движений $X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$ при $\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\text{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ эта зависимость в явном виде отсутствует. Но мы можем воспользоваться леммой 1.2 для «разбиения» всей совокупности возможных ситуаций

$$(\mathbf{V}, X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})), \qquad \mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\text{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V}),$$

на ситуации вида

$$\big(v(\cdot), X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})\big), \qquad v(\cdot) \in \mathcal{V}.$$

Затем, также отталкиваясь от значений сожаления (1.28) на соответствующих пошаговых движениях и переходя к верхним пределам этих величин, придем к следующему определению *риска* $\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U}$ и *минимального риска* $\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0)$ *при* L_{p}*-компактных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0:

$$\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{1.33}$$

$$\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}), \tag{1.34}$$

где $X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})$ — пучок движений, порожденных стратегией $\mathbb{U}$ из начального состояния z_0 (см. с. 12).

Стратегию $\mathbb{U}_0 \in \mathbf{S}$ будем называть *оптимальной по риску* (или *риск-оптимальной*) *при программных ограничениях на помеху* (*при* L_{p}*-компактных ограничениях на помеху* или *при ограничениях на помеху типа Каратеодори*) для начального состояния $z_0 \in G_0$, если выполняется равенство $\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0)$ ($\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0)$ или $\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0)$ соответственно).

Будем говорить, что оптимальная по риску (при каком-либо функциональном ограничении на помеху) стратегия является *универсальной в области* G_0, если соответствующее равенство выполняется для всех начальных состояний из области G_0.

1.6.1. Формализация в терминах пошаговых движений

При произвольных помехах, не связанных компактными в L_{p} функциональными ограничениями, данные выше определения непосредственно не реализуются. Это связано с тем, что конструктивные движения могут порождаться последовательностями пошаговых движений для помех, не имеющих сильного предела в $L_{\text{p}}(T, \mathbb{R}^q)$.

Для распространения критерия минимального риска на более широкие классы функциональных ограничений (включая и случай отсутствия функциональных ограничений, если такая практическая потребность возникнет) можно использовать два пути. Первый — расширить пространство реализаций помехи до мерозначных функций времени, в которых уже всякая последовательность будет иметь предельные элементы. Второй — перенести предельный переход на значения функционала сожаления при измельчении разбиений в пошаговых движениях. Проиллюстрируем последний подход.

Пусть $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, $\delta > 0$, $V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}$ и $\mathbf{V} \subset \mathcal{V}$. Определим пучки пошаговых движений, порожденных стратегией $\mathbb{U}$ из δ-окрестности начального состояния z_0, при разбиениях с диаметрами, не превосходящими δ:

$$XV_\delta(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}) := \{(x(\cdot, z, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)), v(\cdot)) \mid \|z - z_0\| \leqslant \delta, \mathrm{D}(\Delta) \leqslant \delta, \mathbf{U}^\Delta \in \mathbb{U}, v(\cdot) \in \mathbf{V}\},$$

$$\begin{aligned} XV_\delta(z_0, \mathbb{U}, V) := \{(x(\cdot), v(\cdot)) \mid \|z - z_0\| \leqslant \delta, \mathrm{D}(\Delta) \leqslant \delta, \mathbf{U}^\Delta \in \mathbb{U},& \\ x(\cdot) \in X(z, u(\cdot), V), v(\tau) = V(\tau, x(\tau)), \tau \in T, u(\cdot) \in \mathbf{U}(z, \mathbf{U}^\Delta, V)\},& \end{aligned}$$

положим

$$\mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}) := \sup_{(v(\cdot), x(\cdot)) \in XV_\delta(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{1.35}$$

$$\mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, V) := \sup_{(v(\cdot), x(\cdot)) \in XV_\delta(z_0, \mathbb{U}, V)} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{1.36}$$

В этих обозначениях риск стратегии $\mathbb{U}$ и оптимальный риск в классе $\mathbf{S}$ при функциональных ограничениях, заданных произвольным семейством

$$\mathbf{H} \subset 2^{\mathcal{V}}, \qquad \mathcal{V} = \cup_{H \in \mathbf{H}} H,$$

выражаются с помощью (1.35) следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{H}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{H \in \mathbf{H}} \limsup_{\delta \to +0} \mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, H), \qquad \mathbf{r}_{\mathbf{H}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathbf{H}}(z_0, \mathbb{U}). \tag{1.37}$$

В частности, для риска стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и для оптимального риска в классе стратегий $\mathbf{S}$ при отсутствии функциональных ограничений получаем выражения: $\mathbf{H}_\emptyset = \{\mathcal{V}\}$ и

$$\mathbf{r}_{\mathbf{H}_\emptyset}(z_0, \mathbb{U}) := \limsup_{\delta \to +0} \mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, \mathcal{V}), \qquad \mathbf{r}_{\mathbf{H}_\emptyset}(z_0) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathbf{H}_\emptyset}(z_0, \mathbb{U}). \tag{1.38}$$

Кроме того, проверяется, что ранее введенные посредством конструктивных (пределов пошаговых) движений значения риска стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ при различных видах функциональных ограничений записываются в этих терминах следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0, \mathbb{U}) = \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} \limsup_{\delta \to +0} \mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}),$$

$$\mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0, \mathbb{U}) = \sup_{V \in \mathbf{V}_{\text{CAR}}} \limsup_{\delta \to +0} \mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, V),$$

$$\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}) = \sup_{\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_{\mathrm{p}}(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})} \limsup_{\delta \to +0} \mathbf{r}_\delta(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V}).$$

1.7. Задача минимизации риска в классе квазистратегий

Определение оптимального риска в классе квазистратегий целесообразно как для оценки наилучшего результата, достижимого посредством неупреждающих способов управления, так и для построения позиционных законов управления.

Следуя [4, с. 24], назовем *квазистратегией* всякое отображение $\alpha(\cdot)\colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ такое, что для любых $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ таких, что $v(\cdot)_{[t_0,\tau]} = v'(\cdot)_{[t_0,\tau]}$, выполняется $\alpha(v(\cdot))_{[t_0,\tau]} = \alpha(v'(\cdot))_{[t_0,\tau]}$. Пусть $\mathbf{Q}$ — множество всех квазистратегий. Определим оптимальный риск $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0)$ для начального состояния $z_0 \in G_0$ в классе $\mathbf{Q}$ квазистратегий управления:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) := \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}} \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)), \tag{1.39}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)) := \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)), v(\cdot)).$$

Как идеальные объекты, квазистратегии управления не нуждаются в посредстве конструкций пошаговых движений и соответствующих предельных переходов для определения движений-ответов на произвольную помеху. Именно поэтому определение минимального риска в классе квазистратегий при L_{p}-компактных ограничениях на помехи или при помехах, порожденных функциями типа Каратеодори, приведет к той же величине: квазистратегии с точки зрения величины оптимального риска нечувствительны к функциональным ограничениям на помехи.

2. Отдельные свойства и непосредственные соотношения

В этом пункте приводятся соотношения, связывающие величины оптимальных рисков при различных функциональных ограничениях, а также примеры, характеризующие отдельные свойства таких задач управления.

Т е о р е м а 2.1. *Для каждого $z_0 \in G_0$ справедливы соотношения*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{CAR}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathbf{H}_\emptyset}(z_0). \tag{2.1}$$

Доказательство. Последнее неравенство сразу вытекает из записи соответствующих величин в терминах пошаговых движений (см п.1.6.1).

Два предпоследних неравенства следуют из включения

$$X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}) \subset X^{\mathrm{CAR}}(z_0, \mathbb{U}, V),$$

справедливого при всех $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ при $V = v(\cdot)$, и леммы 1.3 (с. 13).

Для обоснования первого неравенства вновь обратимся к классу $\tilde{\mathbf{Q}}$ многозначных квазистратегий $\alpha : \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0,\vartheta]\}}$ на пространстве обобщенных управлений (см. [18; 4, гл. IV]).

Для всякой стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ рассмотрим многозначное отображение

$$\alpha_{\mathbb{U}} \colon \mathcal{V} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0,\vartheta]\}}$$

вида

$$\mathcal{V} \ni v(\cdot) \mapsto \alpha_{\mathbb{U}}(v(\cdot)) := \{\eta \in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\} \mid \varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))\},$$

где $\{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\}$ — множество всех допустимых программных управлений, согласованных на интервале $[t_0, \vartheta]$ с сосредоточенной помехой $v(\cdot)$ (см. [4, гл. IV, § 2, с. 162]).

Тогда отображение $\alpha_{\mathbb{U}}$ является многозначной квазистратегией на пространстве обобщенных управлений, определенной на подмножестве $\mathcal{V} \subset \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}$. Из определения $\alpha_{\mathbb{U}}$ сразу получим неравенство

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_{\mathbb{U}}) := \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ \eta\in\alpha_{\mathbb{U}}(v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta), v(\cdot)) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}),$$

откуда в силу произвольного выбора $\mathbb{U}$ вытекают неравенства

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) := \inf_{\alpha\in\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha) \leqslant \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_{\mathbb{U}}) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0).$$

С другой стороны, исходя из непрерывности по первой переменной функционала $\gamma_{\mathbf{s}}$ и плотности при каждом $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ пучка движений $X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, порожденного сосредоточенными программными управлениями, в пучке программных движений $\{\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \mid \eta \in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\}\}$, порожденных программными управлениями η, согласованными с помехой $v(\cdot)$ (см. [4, гл. IV]), можно установить равенство

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0). \tag{2.2}$$

Из последних двух соотношений следует искомое неравенство. □

2.1. Пример: изменение оптимального риска при изменении класса помех

В данном пункте на известном примере задачи оптимального управления [4, гл. VI, § 1] показано, что оптимальный риск может существенно изменяться при введении функциональных (в данном примере — программных) ограничений на помеху. Кроме того, для случая программных ограничений приведен явный вид соответствующей риск-оптимальной стратегии.

Рассмотрим скалярную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau)\cdot v(\tau), & x(0) = 0, \\ u(\tau) \in \mathcal{P},\ v(\tau) \in \mathcal{Q}, & \tau \in T := [0,1],\ \mathcal{P} := \mathcal{Q} := \{-1, 1\}, \end{cases} \tag{2.3}$$

и показатель качества вида

$$\gamma(x(\cdot)) := x(1), \tag{2.4}$$

очевидно непрерывный в $C(T, \mathbb{R})$. Заметим, что в этом примере не выполнено условие (1.5) седловой точки в маленькой игре.

Множества измеримых по Борелю функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ на промежутке управления T, удовлетворяющих ограничениям (2.3), как обычно, обозначим $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

1. По построению $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, следовательно, для любой стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и любого разбиения $\Delta \in \Delta([0,1])$ при формировании пошагового движения можно на каждом шаге разбиения выбрать $v_{u(\cdot)}(\cdot)$ исходя из условия

$$v_{u(\cdot)}(\tau) := u(\tau), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in 0..(n(\Delta) - 1),$$

где $u(\cdot)$ — реализация управления при данном пошаговом движении. В этом случае будет выполнено равенство

$$\dot{x}(\tau, 0, \mathbf{U}^\Delta, v_{u(\cdot)}(\cdot)) = 1, \quad \tau \in [0,1].$$

Нетрудно проверить, что в этой задаче для произвольных $z_0 \in G_0$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ значение оптимального результата $\rho(z_0, v(\cdot))$ дается выражением

$$\rho(z_0, v(\cdot)) = z_0 - 1. \tag{2.5}$$

Значит, оптимальный риск в классе стратегий $\mathbf{S}$ при произвольных помехах имеет величину

$$\mathbf{r}_{\mathbf{H}_{\emptyset}}(0) = 1 - (-1) = 2. \tag{2.6}$$

2. Теперь построим стратегию $\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}$, которая при программных ограничениях на помехи существенно улучшает результат (2.6).

Для всех $(x_1, x_2, u') \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathcal{P}$ определим значение обратной связи $\bar{\mathbf{U}}^{\Delta} \in \bar{\mathbb{U}}$ индуктивно:

— для произвольного $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R})$ положим $\bar{\mathbf{U}}_0(x(\cdot)) := u_0 \in \mathcal{P}$;

— пусть для некоторого $i \in 0..(n_{\Delta} - 2)$ при всех $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R})$ определено значение $\bar{\mathbf{U}}_i(x(\cdot))$ i-того элемента обратной связи $\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}$, тогда для всех $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i+1}], \mathbb{R})$ определим значение $\bar{\mathbf{U}}_{i+1}(x(\cdot))$ условием

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1}(x(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u \frac{x(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)}{\bar{\mathbf{U}}_i(x(\cdot)|_{[t_0, \tau_i]})}.$$

Вначале проведем рассмотрение для случая равномерных разбиений:

$$\Delta_k := \{\tau_{ki} := i \cdot h_k : i \in 0..k, h_k := k^{-1}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть даны какая-либо помеха $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, последовательность начальных состояний $\{z_k \in \mathbb{R}^1 \mid \lim_{k \to \infty} z_k = 0\}$ (понятно, что $\lim_{k \to \infty} \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}) = 0$). Рассмотрим соответствующие пошаговые движения и порождающие их реализации управления (см. (1.10), (1.11)):

$$\begin{aligned} x_k(\cdot) &:= x(\cdot, z_k, \bar{\mathbf{U}}^{\Delta_k}, v(\cdot)), \\ u_k(\cdot) &:= u(\cdot, z_k, \bar{\mathbf{U}}^{\Delta_k}, v(\cdot)), \\ x_k(\cdot) &= x(\cdot, 0, z_k, u_k(\cdot), v(\cdot)). \end{aligned}$$

Обозначим

$$u_{ki} := u_k(\tau), \qquad \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{ki+1}).$$

Значение управления

$$u_{kk} \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u \frac{x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})}{\bar{\mathbf{U}}_{k-1}(x_k(\cdot)|_{[t_0, \tau_{k-1}]})}$$

определено только для дальнейших оценок и не влияет на движение $x_k(\cdot)$. Таким образом, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$x_k(1) = z_k + \int_0^1 u_k(s) v(s)\, ds = z_k + \sum_{i=0}^{k-1} u_{ki} \int_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\, ds.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим вспомогательные величины

$$y_k(1) := z_k + \sum_{i=0}^{k-1} u_{ki+1} \int_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\, ds.$$

По определению управлений u_{ki},

$$u_{ki+1} \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u \int_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\, ds,$$

откуда при всех $k \in \mathbb{N}$ следуют равенства

$$y_k(1) = z_k - \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int\limits_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\, ds \right|. \tag{2.7}$$

Для оценки $y_k(1)$ введем множества

$$T_+ := \{\tau \in [0,1] \mid v(\tau) = 1\}, \quad T_- := \{\tau \in [0,1] \mid v(\tau) = -1\},$$

удовлетворяющие соотношениям

$$T_+ \cap T_- = \varnothing, \quad \lambda(T_+ \cup T_-) = 1,$$

где $\lambda(A)$ означает величину меры Бореля $\lambda(\cdot)$ (измеримого) подмножества $A \subseteq [0,1]$. Обозначим T'_+, T'_- множества точек плотности множеств T_+ и T_- соответственно, то есть подмножества точек $\tau \in [0,1]$, удовлетворяющих равенствам

$$\begin{gathered}\lim_{h_1,h_2 \to +0} \frac{\lambda(T_+ \cap [\tau - h_1, \tau + h_2])}{h_1 + h_2} = 1,\\ \lim_{h_1,h_2 \to +0} \frac{\lambda(T_- \cap [\tau - h_1, \tau + h_2])}{h_1 + h_2} = 1.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Согласно теореме Лебега о точках плотности (см. теорему 7.2) два этих множества также удовлетворяют равенствам

$$T'_+ \cap T'_- = \varnothing, \quad \lambda(T'_+ \cup T'_-) = 1. \tag{2.9}$$

Рассмотрим последовательность кусочно-постоянных функций $\{\nu_k \colon [0,1] \mapsto [0,1], k \in \mathbb{N}\}$ вида

$$\nu_k(\tau) := (\tau_{ki+1} - \tau_{ki})^{-1} \left| \int\limits_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\, ds \right|, \quad \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{ki+1}), \quad i \in 0..(k-1).$$

Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \nu_k(\tau) = 1, \quad \tau \in T'_+ \cup T'_-.$$

Предположим противное: нашлись момент $\bar\tau \in T'_+ \cup T'_-$, подпоследовательность

$$\{(a_j, b_j) \mid \bar\tau \in (a_j, b_j) \subseteq [0,1], j \in \mathbb{N}, \lim_{j \to \infty}(b_j - a_j) = 0\}$$

последовательности интервалов $\{(\tau_{ki}, \tau_{ki+1}) \mid \bar\tau \in (\tau_{ki}, \tau_{ki+1}), k \in \mathbb{N}\}$ и $c \in [0,1)$ такие, что

$$\left| \int\limits_{a_j}^{b_j} v(s)\, ds \right| \leqslant c(b_j - a_j), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Пусть, например, $\bar\tau \in T'_+$. Тогда из неравенств (2.10) следуют неравенства

$$\lambda(T_+ \cap [a_j, b_j]) \leqslant \frac{1+c}{2}(b_j - a_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

противоречащие первому из равенств (2.8), и, значит, $\bar\tau$ не может принадлежать множеству T'_+. Аналогичными рассуждениями покажем невозможность включения $\bar\tau \in T'_-$, что противоречит предположению $\bar\tau \in T'_+ \cup T'_-$.

Так как функции $\nu_k(\cdot)$ измеримы, ограничены в совокупности и сходятся почти всюду на $[0,1]$ к функции $\nu(\cdot) := 1$ (см. (2.9)), то интегралы этих функций на интервале $[0,1]$ также сходятся к интегралу от функции $\nu(\cdot)$ на интервале $[0,1]$ (см. [15, п. I.4.18]). А именно,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^1 \nu_k(s)\,ds = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int\limits_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\,ds\right| = \int\limits_0^1 \nu(s)\,ds = 1.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.7), мы получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} y_k(1) = -1, \tag{2.11}$$

справедливое для произвольной $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

Теперь, используя постоянность шага разбиения, оценим величины $|y_k(1) - x_k(1)|$:

$$\begin{aligned} |y_k(1) - x_k(1)| &\leqslant \left|\sum_{i=0}^{k-1}(u_{ki+1} - u_{ki})\int\limits_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} v(s)\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant 2h_k + \left|\sum_{i=0}^{k-2} u_{ki+1}\int\limits_{\tau_{ki}}^{\tau_{ki+1}} (v(s) - v(s+h_k))\,ds\right| \leqslant \\ &\leqslant 2h_k + \int\limits_0^{1-h_k} |v(s) - v(s+h_k)|\,ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В силу непрерывности в целом измеримых функций (см. (7.2), с. 86) последняя величина при любом $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ стремится к нулю, если h_k стремится к нулю. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} |y_k(1) - x_k(1)| = 0. \tag{2.13}$$

Соотношения (2.11) и (2.13) дают равенство $x(1) = -1$ для произвольного движения $x(\cdot) \in X(0, \bar{\mathbb{U}}, v(\cdot))$ и любого $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. И следовательно, оптимальный риск в классе $\mathbf{S}$ при программных ограничениях на помеху имеет величину $\mathbf{r}_{\text{P}}(0) = -1 - (-1) = 0$.

Отметим необходимые модификации в построении стратегии $\bar{\mathbb{U}}$ и в рассуждениях для случая произвольных разбиений. Пусть имеется произвольная последовательность разбиений $\{\Delta_k \in \Delta([0,1])\colon k \in \mathbb{N}\}$ промежутка управления T с измельчающимся шагом:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}) = 0. \tag{2.14}$$

Обозначим через $m(\Delta_k)$ наименьшее натуральное число, превосходящее $1/\sqrt{\mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k})}$, и положим $h_k := 1/m(\Delta_k)$. Наряду с разбиениями Δ_k используем разбиения $\bar{\Delta}_k \subseteq \Delta_k$ следующего вида:

$$\bar{\Delta}_k := \bigl\{\bar{\tau}_{ki} \mid \bar{\tau}_{ki} := \min\{\tau \in \Delta_k \mid \tau \geqslant i\cdot h_k\}, i \in 0..m(\Delta_k)\bigr\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Разбиения $\bar{\Delta}_k$ удовлетворяют условию $\lim_{k\to\infty}\mathrm{D}(\bar{\Delta}_\mathrm{k}) = 0$ и являются «почти равномерными»: суммы отклонений их моментов от ближайших моментов равномерных разбиений $\{il_k\colon i \in 0..m(\Delta_k)\}$ стремятся к нулю при возрастании индекса k. Формирование управлений $u_k(\cdot)$ будет производиться по тем же правилам, но только уже на подмножествах $\bar{\Delta}_k$ узлов разбиений Δ_k:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1}(x(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{P}} u \cdot \frac{x(\bar{\tau}_{i+1}) - x(\bar{\tau}_i)}{\bar{\mathbf{U}}_i(x(\cdot)|_{[t_0,\bar{\tau}_i]})}, \qquad x(\cdot) \in C([t_0, \bar{\tau}_{i+1}], \mathbb{R}^n).$$

При этом соотношение (2.11) останется справедливым, так как его вывод не использовал какой-либо специфики разбиений, кроме условия (2.14). Вместо неравенств (2.12) можно получить удовлетворительные аналоги

$$|y_k(1) - x_k(1)| \leqslant C \cdot \mathrm{D}(\bar{\Delta}_\mathrm{k}) + \int\limits_0^{1-\mathrm{D}(\bar{\Delta}_\mathrm{k})} \big|v(s) - v(s + \mathrm{D}(\bar{\Delta}_\mathrm{k}))\big|\, ds,$$

$$k \in \mathbb{N},\ C = \mathrm{const},$$

следующие из ограничений (2.3) и способа построения разбиений $\bar{\Delta}_k$.

Итак, в данной задаче установлено неравенство $\mathbf{r}_\mathrm{P}(0) < \mathbf{r}_{\mathbf{H}_\emptyset}(0)$.

2.2. Пример оптимальной по риску стратегии

Рассмотрим на простейшем примере введенные определения. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau) + v(\tau), & \tau \in [t_0, \vartheta] := T, \\ x(t_0) = z_0 \in G_0, & G_0 := [-a_0, a_0], \quad a_0 \in (0, +\infty). \end{cases} \tag{2.15}$$

Измеримые реализации управления и помехи при почти всех $\tau \in T$ стеснены ограничениями

$$u(\tau) \in \mathcal{P} := [-a, a], \qquad v(\tau) \in \mathcal{Q} := [-b, b] \tag{2.16}$$

при

$$a < b. \tag{2.17}$$

Произвольное компактное множество G начальных позиций системы (2.15), обладающее требуемыми свойствами, предполагаем выбранным, и все приводимые ниже построения и оценки без дальнейших оговорок относятся к позициям и движениям, содержащимся в этом множестве. Для произвольных $t \in T$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим

$$\mathbf{u}(t) := \int\limits_t^\vartheta u(s)\, ds, \qquad \mathbf{v}(t) := \int\limits_t^\vartheta v(s)\, ds.$$

В этих обозначениях

$$x(\vartheta, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) = z_* + \mathbf{u}(t_*) + \mathbf{v}(t_*)$$

для произвольных $(t_*, z_*) \in G$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

Показатель качества выберем в виде

$$\gamma(x(\cdot)) := |x(\vartheta)|. \tag{2.18}$$

Для дальнейших выкладок удобно ввести в рассмотрение следующую величину, связанную с оптимальным результатом:

$$\rho(t_*, z_*, v(\cdot)) := \min_{x(\cdot)\in X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot))} \gamma(x(\cdot)), \quad (t_*, z_*) \in G, \quad v(\cdot) \in \mathcal{V}. \tag{2.19}$$

Можно проверить, что в начальной позиции $(t_*, z_*) \in G$ для помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполняется равенство

$$\rho(t_*, z_*, v(\cdot)) = \begin{cases} |z_* + \mathbf{v}(t_*)| - a(\vartheta - t_*), & |z_* + \mathbf{v}(t_*)| \geqslant a(\vartheta - t_*), \\ 0, & |z_* + \mathbf{v}(t_*)| \leqslant a(\vartheta - t_*). \end{cases} \tag{2.20}$$

Введем следующие подмножества расширенного пространства позиций:

$$\begin{gathered} A_{b+a} := \{(\tau, x) \in G \mid \tau \leqslant \vartheta, |x| \geqslant (b+a)(\vartheta - \tau)\}, \\ A_{b-a} := \{(\tau, x) \in G \mid \tau \leqslant \vartheta, |x| \leqslant (b-a)(\vartheta - \tau)\}, \\ A_{b\pm a} := A_{b+a} \cup A_{b-a}, \\ A_{(t_*, z_*)} := \big\{(\tau, x) \in G \mid \tau \in [t_*, \vartheta],\ |x| \leqslant \max\{0, b(\tau_* - \tau)\}\big\}, \\ \tau_* := \tau_*(t_*, z_*) := \begin{cases} t_* + \frac{b-a}{b}(\vartheta - t_*), & (t_*, z_*) \in A_{b-a}, \\ t_* + \frac{(b-a)(\vartheta - t_*) + |z_*|}{2b}, & (t_*, z_*) \in G \setminus A_{b\pm a}, \\ \vartheta, & (t_*, z_*) \in A_{b+a}. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.21}$$

Для каждой начальной позиции $(t_*, z_*) \in G$ определим следующую величину:

$$\lambda(t_*, z_*) = \begin{cases} \frac{b-a}{b} a(\vartheta - t_*), & (t_*, z_*) \in A_{b-a}, \\ \frac{b-a}{b} \cdot \frac{(b+a)(\vartheta - t_*) - |z_*|}{2}, & (t_*, z_*) \in G \setminus A_{b\pm a}, \\ 0, & (t_*, z_*) \in A_{b+a}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Утверждение 2.1. *В задаче управления* (2.15), (2.16), (2.18) *функция минимального риска при программных помехах удовлетворяет равенству*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) = \lambda(t_0, z_0), \quad z_0 \in G_0. \tag{2.23}$$

Стратегия $\bar{\mathbb{U}} := (\bar{\mathbf{U}}^\Delta)_{\Delta \in \Delta_T} \in \mathbf{S}$, *в которой все элементы* $\bar{\mathbf{U}}_i$ *обратной связи с полной памятью* $\bar{\mathbf{U}}^\Delta := (\bar{\mathbf{U}}_i)_{i \in 0..(n_\Delta - 1)}$ *на произвольном разбиении* Δ *имеют вид*

$$\bar{\mathbf{U}}_i(x(\cdot)) := \begin{cases} 0, & (\tau_i, x(\tau_i)) \in A_{(t_0, x(t_0))}, \\ -a \operatorname{sign}(x(\tau_i)), & (\tau_i, x(\tau_i)) \in G \setminus A_{(t_0, x(t_0))}, \end{cases}$$

является оптимальной по риску при программных помехах для начальной позиции z_0.

На рис. 1 изображен график функции $\lambda(\cdot)$ при $a = 0.2$, $b = 1$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 25$.

На рисунках 2–4 изображен вид обратной связи $\bar{\mathbf{U}}_i$ при $a = 0.2$, $b = 1$, $(t_0, z_0) = (0, 5)$, $\vartheta = 25$ в зависимости от значений текущих состояний движения $(\tau_i, x(\tau_i))$ и начальных состояний:

на рисунке 2 — в случае $|z_0| \leqslant (b - a)(\vartheta - t_0)$,

на рисунке 3 — в случае $(b - a)(\vartheta - t_0) \leqslant |z_0| \leqslant (b + a)(\vartheta - t_0)$,

на рисунке 4 — в случае $|z_0| \geqslant (b + a)(\vartheta - t_0)$.

Доказательство. Схема доказательства утверждения следующая. Вначале утверждение доказывается для случая $(t_0, z_0) \in A_{b+a}$. Для оставшихся начальных позиций строятся две специфические помехи, которые для произвольной стратегии из $\mathbf{S}$ «обеспечивают» величину риска не меньшую, чем значение функции $\lambda(t_0, z_0)$. Таким образом, оптимальный риск оценивается снизу этой величиной. Затем показывается, что стратегия $\bar{\mathbb{U}}$ имеет риск, не превосходящий величину $\lambda(t_0, z_0)$. Следовательно, оптимальный риск совпадает с величиной $\lambda(t_0, z_0)$, а стратегия U_{z_0} является оптимальной по риску.

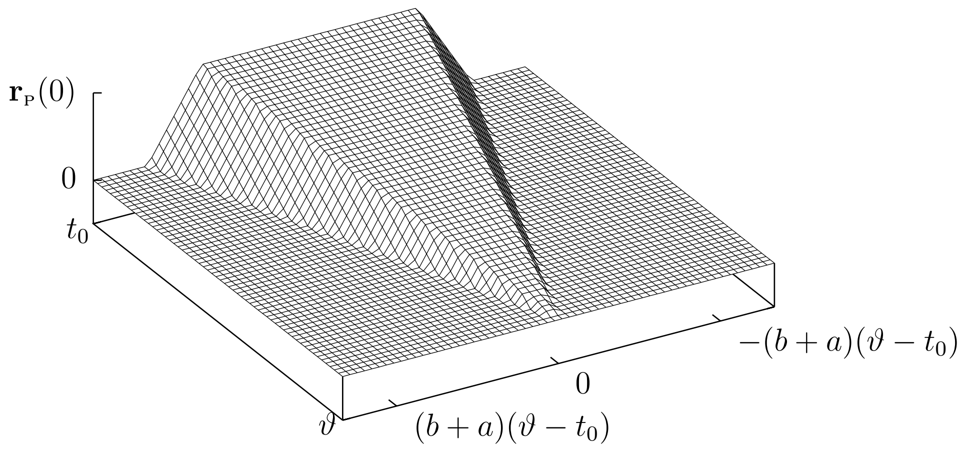

Рис. 1. Вид функции $\lambda(\cdot)$ при $a = 0.2$, $b = 1$, $t_0 = 0$, $\vartheta = 25$

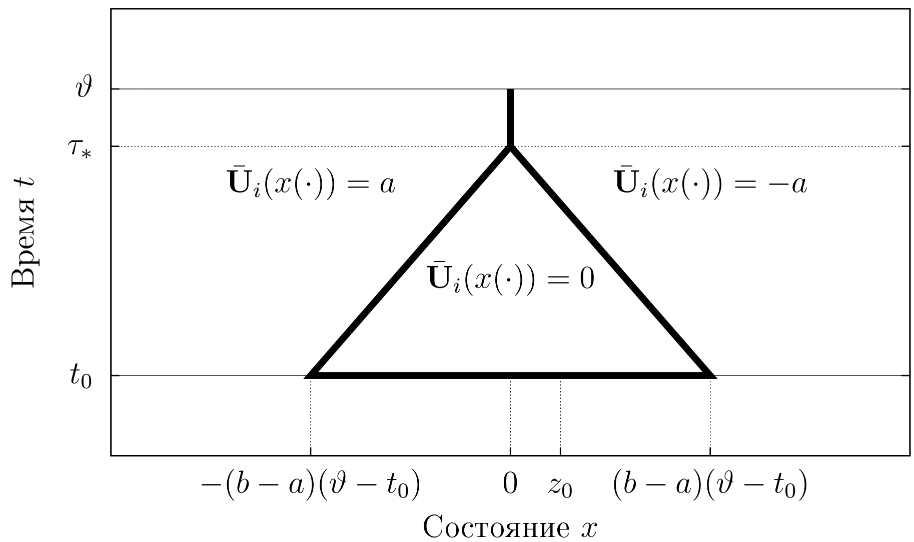

Рис. 2. Вид обратной связи $\bar{\mathbf{U}}_i$ в случае $|z_0| \leqslant (b-a)(\vartheta - t_0)$

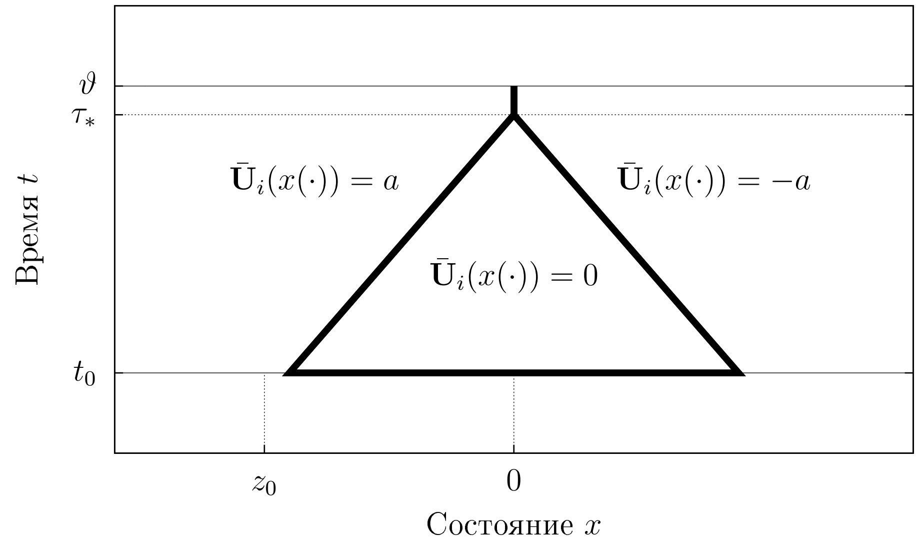

Рис. 3. Вид обратной связи $\bar{\mathbf{U}}_i$ в случае $(b-a)(\vartheta-t_0) \leqslant |z_0| \leqslant (b+a)(\vartheta-t_0)$

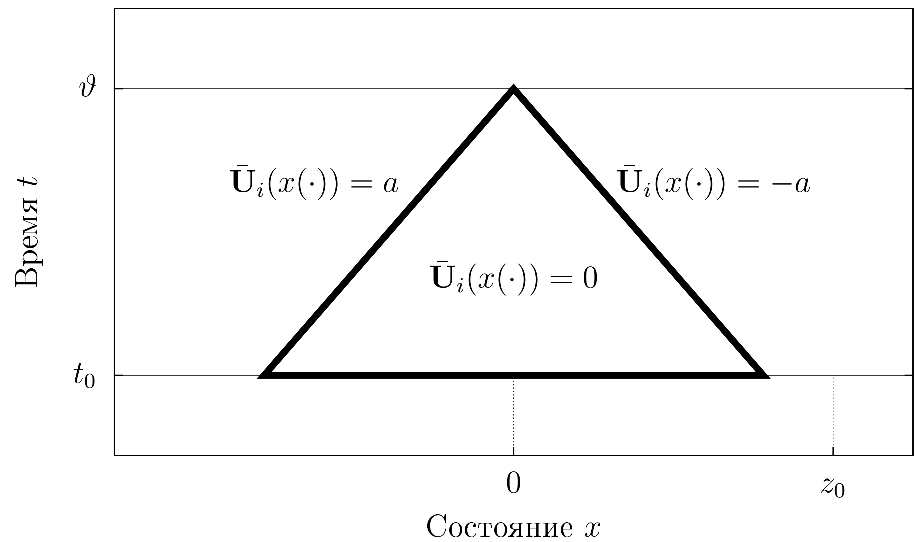

Рис. 4. Вид обратной связи $\bar{\mathbf{U}}_i$ в случае $|z_0| \geqslant (b+a)(\vartheta-t_0)$

1. **Для любых** $(t_0, z_0) \in A_{b+a}$**,** $v(\cdot) \in \mathcal{V}$**,** $x(\cdot) \in X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, v(\cdot))$ **выполнено равенство**

$$\gamma(x(\cdot)) = \rho(z_0, v(\cdot)). \tag{2.24}$$

Пусть $z_0 \geqslant (b+a)(\vartheta - t_0)$, тогда из ограничений на управление и помеху (2.16) для движения $x(\cdot)$ следуют неравенства

$$|x(\tau) + \mathbf{v}(\tau)| = |z_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau} u(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v(s)\,ds| \geqslant$$

$$\geqslant (b+a)(\vartheta - t_0) - \left|\int\limits_{t_0}^{\tau} u(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v(s)\,ds\right| \geqslant (b+a)(\vartheta - t_0) - \left|\int\limits_{t_0}^{\tau} u(s)\,ds\right| - \left|\int\limits_{t_0}^{\vartheta} v(s)\,ds\right| \geqslant$$

$$\geqslant (b+a)(\vartheta - t_0) - a(\tau - t_0) - b(\vartheta - t_0) = a(\vartheta - \tau).$$

Из этого неравенства при $(t_0, z_0) \in A_{b+a}$ для всех управлений $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, помех $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ и $\tau \in T$ вытекают соотношения

$$|x(\tau)| = \operatorname{sign}(z_0) x(\tau), \tag{2.25}$$

$$|x(\tau) + \mathbf{v}(\tau)| = \operatorname{sign}(z_0)(x(\tau) + \mathbf{v}(\tau)), \tag{2.26}$$

а величина оптимального результата (2.20) в силу (2.26) для всех $\tau \in T$ примет вид

$$\rho(\tau, x(\tau), v(\cdot)) = \operatorname{sign}(z_0)(x(\tau) + \mathbf{v}(\tau)) - a(\vartheta - \tau). \tag{2.27}$$

Пусть выбрано произвольное разбиение $\Delta \in \Delta_T$. Обозначим

$$x(\cdot) := x(\cdot, z_0, \bar{\mathbf{U}}^{\Delta}, v(\cdot)), \qquad u(\cdot) := u(\cdot, z_0, \bar{\mathbf{U}}^{\Delta}, v(\cdot))$$

пошаговое движение и соответствующую реализацию управления, порождаемые обратной связью $\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}$ на разбиении Δ при помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Пусть момент $\tau \in T$ и приращение $\varepsilon > 0$ выбраны так, что интервал $[\tau, \tau + \varepsilon)$ целиком содержится в одном из интервалов, порождаемых разбиением Δ. Из определения стратегии $\bar{\mathbb{U}}$ и равенств (2.25), (2.27) получим соотношения

$$\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v(\cdot)) =$$

$$= \operatorname{sign}(z_0)\Big(x(\tau) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} (u(s) + v(s))\,ds + \mathbf{v}(\tau + \varepsilon)\Big) - a(\vartheta - (\tau + \varepsilon)) =$$

$$= \operatorname{sign}(z_0)\Big(x(\tau) - \varepsilon a \operatorname{sign}(x(\tau)) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} v(s)\,ds + \mathbf{v}(\tau + \varepsilon)\Big) - a(\vartheta - (\tau + \varepsilon)) =$$

$$= \operatorname{sign}(z_0)(x(\tau) + \mathbf{v}(\tau)) - \varepsilon a - a(\vartheta - \tau) + \varepsilon a = \rho(\tau, x(\tau), v(\cdot)).$$

Отсюда следует, что (2.24) выполняется при любой помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и любом разбиении Δ для пошаговых движений, порождаемых стратегией $\bar{\mathbb{U}}$. В силу непрерывности функционала качества это равенство будет выполняться и для элементов из множества $X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, v(\cdot))$. Отсюда с учетом (2.24) получим соотношения

$$0 \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, v(\cdot))}} \gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) = 0.$$

Таким образом, для начальных значений $(t_0, z_0) \in A_{b+a}$ выполнено равенство (2.23) и стратегия $\bar{\mathbb{U}}$ оптимальна по риску.

2. **Для произвольной начальной позиции** $(t_0, z_0) \in G \backslash A_{b+a}$ **выполняется неравенство**

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) \geqslant \lambda(t_0, z_0).$$

Пусть $(t_0, z_0) \in G \setminus A_{b+a}$, положим

$$v^-_{(t_0,z_0)}(\tau) = \begin{cases} -\frac{z_0}{\tau_* - t_0}, & \tau \in [t_0, \tau_*), (t_0, z_0) \in A_{b-a}, \\ -b\,\mathrm{sign}(z_0), & \tau \in [t_0, \tau_*), (t_0, z_0) \notin A_{b-a}, \\ -b, & \tau \in [\tau_*, \vartheta], \end{cases}$$

$$v^+_{(t_0,z_0)}(\tau) = \begin{cases} -\frac{z_0}{\tau_* - t_0}, & \tau \in [t_0, \tau_*), (t_0, z_0) \in A_{b-a}, \\ -b\,\mathrm{sign}(z_0), & \tau \in [t_0, \tau_*), (t_0, z_0) \notin A_{b-a}, \\ b, & \tau \in [\tau_*, \vartheta]. \end{cases}$$

Из определения момента $\tau_* := \tau_*(t_0, z_0)$ (см. (2.21), с. 25) следует, что для данных функций при всех начальных позициях $(t_0, z_0) \in G \setminus A_{b+a}$ выполнено включение $v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot), v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot) \in \mathcal{V}$. Установим справедливость равенств

$$\rho(t_0, z_0, v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot)) = \rho(t_0, z_0, v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot)) = 0. \tag{2.28}$$

С этой целью, исходя из выражения для оптимального результата (см. (2.20), с. 25), проверим справедливость соотношений

$$\left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v^-_{(t_0,z_0)}(s)\,ds \right| \leqslant a(\vartheta - t_0), \quad \left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v^+_{(t_0,z_0)}(s)\,ds \right| \leqslant a(\vartheta - t_0).$$

Пусть $(t_0, z_0) \in A_{b-a}$. Тогда

$$\left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v^+_{(t_0,z_0)}(s)\,ds \right| = \left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} v^+_{(t_0,z_0)}(s)\,ds + \int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} v^+_{(t_0,z_0)}(s)\,ds \right| =$$

$$= \left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} \frac{-z_0}{t_0 - \tau_*} ds + \int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} b ds \right| = b(\vartheta - \tau_*) = a(\vartheta - t_0).$$

Аналогично проверяется неравенство

$$\left| z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} v^-_{(t_0,z_0)}(s)\,ds \right| \leqslant a(\vartheta - t_0).$$

Следовательно, равенства (2.28) выполнены в случае $(t_0, z_0) \in A_{b-a}$. Для начальных позиций $(t_0,z_0)\in G\setminus A_{b\pm a}$ имеем (используется тождество $|x| = x\,\mathrm{sign}(x)$)

$$
\begin{aligned}
z_0+\int\limits_{t_0}^{\vartheta} v^{+}_{(t_0,z_0)}(s)\,ds &= z_0-\int\limits_{t_0}^{\tau_*} b\,\mathrm{sign}(z_0)\,ds+\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} b ds=\\
&= z_0-b\,\mathrm{sign}(z_0)\frac{(b-a)(\vartheta-t_0)+|z_0|}{2b}+b\left(\vartheta-t_0-\frac{(b-a)(\vartheta-t_0)+|z_0|}{2b}\right)=\\
&= z_0-\mathrm{sign}(z_0)\frac{(b-a)(\vartheta-t_0)+|z_0|}{2}+\frac{(b+a)(\vartheta-t_0)-|z_0|}{2}=\\
&= \frac{z_0+(b+a)(\vartheta-t_0)-\mathrm{sign}(z_0)(z_0+(b-a)(\vartheta-t_0))\pm 2a(\vartheta-t_0)}{2}=\\
&= \frac{z_0+(b-a)(\vartheta-t_0)-\mathrm{sign}(z_0)(z_0+(b-a)(\vartheta-t_0))}{2}+a(\vartheta-t_0)=\\
&= \frac{(1-\mathrm{sign}(z_0))(z_0+(b-a)(\vartheta-t_0))}{2}+a(\vartheta-t_0).
\end{aligned}
$$

Дробь в последнем выражении при $|z_0|>(b-a)(\vartheta-t_0)$ не превосходит нуля. Схожими рассуждениями эта оценка выводится для помехи $v^{-}_{(t_0,z_0)}(\cdot)$. Следовательно, равенства (2.28) выполнены и в случае $(t_0,z_0)\in G\setminus A_{b\pm a}$.

Теперь для произвольной стратегии $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$ оценим значения $\gamma(x^-(\cdot))$, $\gamma(x^+(\cdot))$ показателя качества для движений вида

$$
x^-(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v^{-}_{(t_0,z_0)}(\cdot)\}),\quad x^+(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v^{+}_{(t_0,z_0)}(\cdot)\}).
$$

Так как стратегия $\mathbb{U}$ является неупреждающей, а помехи $v^{-}_{(t_0,z_0)}(\cdot)$, $v^{+}_{(t_0,z_0)}(\cdot)$ совпадают на отрезке $[t_0,\tau_*]$, то по крайней мере одно из неравенств

$$
x^-(\tau_*)\leqslant 0,\quad x^+(\tau_*)\geqslant 0
$$

будет выполнено. Пусть выполнено, например, правое неравенство. Тогда, с учетом равенств (2.28), получим

$$
\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},v(\cdot))}}\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))\geqslant\gamma(x^+(\cdot))-\rho(t_0,z_0,v^{+}_{(t_0,z_0)}(\cdot))\geqslant(\vartheta-\tau_*)(b-a),
$$

откуда, в силу определения момента τ_* (см. (2.21), с. 25), следуют соотношения

$$
\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},v(\cdot))}}\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))\geqslant(b-a)(\vartheta-\tau_*)=\lambda(t_0,z_0).
$$

В силу произвольного выбора $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$ получим

$$
\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0):=\inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}}\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(t_0,z_0,U,v(\cdot))}}\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))\geqslant\lambda(t_0,z_0).
$$

3. **Для любой начальной позиции** $(t_0,z_0)\in G\setminus A_{b+a}$ **выполнено неравенство**

$$
\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0,\bar{\mathbb{U}}):=\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(z_0,\bar{\mathbb{U}},\{v(\cdot)\})}}\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))\leqslant\lambda(t_0,z_0). \tag{2.29}
$$

З а м е ч а н и е 3. В силу определения множества $A_{(t_0,z_0)}$ и стратегии $\bar{\mathbb{U}}$ всякое движение $x(\cdot) \in X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, \{v(\cdot)\})$ до момента τ_* не может пересекаться с множествами

$$B^+_{(t_0,z_0)} := \{(\tau, x) \in G \setminus A_{(t_0,z_0)} \mid \tau \in [t_0, \tau_*], x > 0\},$$
$$B^-_{(t_0,z_0)} := \{(\tau, x) \in G \setminus A_{(t_0,z_0)} \mid \tau \in [t_0, \tau_*], x < 0\}$$

одновременно. То есть одно из множеств

$$B^+_{(t_0,z_0)} \cap \{(\tau, x(\tau)) \mid \tau \in [t_0, \tau_*]\}, \quad B^-_{(t_0,z_0)} \cap \{(\tau, x(\tau)) \mid \tau \in [t_0, \tau_*]\}$$

пусто, и если обозначить T_- меру множества моментов $\tau \in [t_0, \tau_*]$ таких, что $(\tau, x(\tau)) \in B^-_{(t_0,z_0)}$, а T_+ — таких, что $(\tau, x(\tau)) \in B^+_{(t_0,z_0)}$, то по крайне мере одна из этих величин будет равняться нулю.

З а м е ч а н и е 4. Отметим также, что если указанное движение $x(\cdot)$ пересекается со множеством $\{(\tau, 0) \mid \tau \in [\tau_*, \vartheta]\}$, то выполняется неравенство

$$|x(\vartheta)| \leqslant (b - a)(\vartheta - \tau_*). \tag{2.30}$$

З а м е ч а н и е 5. В силу линейности рассматриваемой системы и выпуклых ограничений на управление для произвольного движения $x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\})$ существует реализация $u(\cdot) := u(\cdot, t_0, z_0, \bar{\mathbb{U}}, v(\cdot)) \in \mathcal{U}$, для которой выполнено равенство $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$, а в области постоянства обратной связи $\bar{\mathbf{U}}^\Delta$ — соотношения $u(\tau) = \bar{\mathbf{U}}_i(x(\tau_i))$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Из последних равенств и замечания 4, следует, что если на интервале $[\tau_*, \vartheta]$ значение управления $u(\cdot)$ изменяется, то будет выполнено (2.30).

Из замечаний 4, 5 следует, что если при некотором $\tau' \in [\tau_*, \vartheta]$ выполняется $x(\tau) = 0$, то имеет место оценка

$$\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) \leqslant |x(\vartheta)| \leqslant (b - a)(\vartheta - \tau_*) = \lambda(t_0, z_0).$$

Исходя из этого, далее будем предполагать, что при всех $\tau \in [\tau_*, \vartheta]$ величина $x(\tau)$ сохраняет знак.

Пусть $(t_0, z_0) \in G \setminus A_{b+a}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, \{v(\cdot)\})$ и выполнено неравенство

$$|x(\tau_*)| \leqslant \rho(t_0, z_0, v(\cdot)).$$

Складывая это неравенство с неравенством $|x(\vartheta)| \leqslant |x(\tau_*)| + (b - a)(\vartheta - \tau_*)$, получим соотношение

$$\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) \leqslant (b - a)(\vartheta - \tau_*) = \lambda(t_0, z_0). \tag{2.31}$$

Теперь пусть выполняется обратное неравенство: $|x(\tau_*)| > \rho(t_0, z_0, v(\cdot))$. Так как функция $\rho(\cdot)$ неотрицательна, из последнего неравенства следует $|x(\tau_*)| > 0$. Для определенности будем считать $x(\tau_*) > 0$. Тогда, в силу замечания 3 и определения стратегии $\bar{\mathbb{U}}$, $T_- = 0$, $T_+ > 0$.

Рассмотрим случай, когда $\rho(t_0, z_0, v(\cdot)) = 0$, то есть

$$|z_0 + \mathbf{v}(t_0)| \leqslant a(\vartheta - t_0). \tag{2.32}$$

Имеем

$$\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) = |x(\vartheta)| = |z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u(s) + v(s))\, ds| =$$
$$= |z_0 + \mathbf{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} u(s)\, ds + \int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} u(s)\, ds| =$$
$$= z_0 + \mathbf{v}(t_0) - aT_+ - a(\vartheta - \tau_*) \leqslant a(\vartheta - \tau_*) - aT_+ - a(\vartheta - \tau_*).$$

Таким образом,
$$\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) \leqslant a(\tau_* - t_0 - T_+). \tag{2.33}$$
Это же неравенство можно проверить и в случае, когда предположение (2.32) не выполнено, то есть в случае, когда
$$|z_0 + \mathbf{v}(t_0)| > a(\vartheta - t_0). \tag{2.34}$$
В самом деле, исходя из последнего неравенства и неравенств
$$z_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} v(s)\,ds > z_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} v(s)\,ds - aT_+ = x(\tau_*) > 0,$$
проверяется соотношение $z_0 + \mathbf{v}(t_0) > a(\vartheta - t_0)$. Тогда выполняются равенства
$$\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) = |x(\vartheta)| - |z_0 + \mathbf{v}(t_0)| + a(\vartheta - t_0) =$$
$$= |z_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u(s) + v(s))\,ds| - z_0 - \mathbf{v}(t_0) + a(\vartheta - t_0) =$$
$$= z_0 + \mathbf{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\tau_*} u(s)\,ds + \int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} u(s)\,ds - z_0 - \mathbf{v}(t_0) + a(\vartheta - t_0) =$$
$$= -aT_+ - a(\vartheta - \tau_*) + a(\vartheta - t_0) = a(\tau_* - T_+ - t_0).$$

Покажем теперь, что из (2.33) следует искомое неравенство. При $(t_0, z_0) \in A_{b-a}$, подставляя выражение для τ_* (см. (2.21), с. 25), получим
$$a(\tau_* - t_0 - T_+) \leqslant a(\tau_* - t_0) = a\frac{b-a}{b}(\vartheta - t_0) = \lambda(t_0, z_0), \quad (t_0, z_0) \in A_{b-a}.$$
При $(t_0, z_0) \in G \setminus A_{b\pm a}$, используя неравенство $T_+ \geqslant \frac{|z_0| - b(\tau_* - t_0)}{a}$ и определение τ_* (см. (2.21), с. 25), получим
$$a(\tau_* - t_0 - T_+) \leqslant a\left(t_0 + \frac{(b-a)(\vartheta - t_0) + |z_0|}{2b} - t_0 - \frac{|z_0| - b(\tau_* - t_0)}{a}\right) =$$
$$= \frac{a((b-a)(\vartheta - t_0) + |z_0|)}{2b} - |z_0| + \frac{(b-a)(\vartheta - t_0) + |z_0|}{2} =$$
$$= \frac{a(b-a)(\vartheta - t_0) + a|z_0| - 2b|z_0| + b(b-a)(\vartheta - t_0) + b|z_0|}{2b} =$$
$$= \frac{(b-a)((b+a)(\vartheta - t_0) - |z_0|)}{2b} = \lambda(t_0, z_0), \quad (t_0, z_0) \in G \setminus A_{b\pm a}.$$
Таким образом, для произвольного начального состояния $(t_0, z_0) \in G \setminus A_{b+a}$ справедливы неравенства
$$\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X(z_0, \bar{\mathbb{U}}, \{v(\cdot)\})}} \gamma(x(\cdot)) - \rho(t_0, z_0, v(\cdot)) \leqslant \lambda(t_0, z_0),$$
из которых получим искомые неравенства (2.29). Этим завершается доказательство данного пункта и утверждения 2.1. □

На рисунках 5, 6 красным и прерывистым зеленым изображены движения, порожденные стратегией $\bar{\mathbb{U}}$ и помехами $v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot)$, $v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot)$ из позиций $(t_0, z_0) = (0, -25)$, $(t_0, z_0) = (0, 7)$. Темно-синим цветом указаны контуры множества нулевого уровня функций $\rho(\cdot, v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot))$ и $\rho(\cdot, v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot))$.

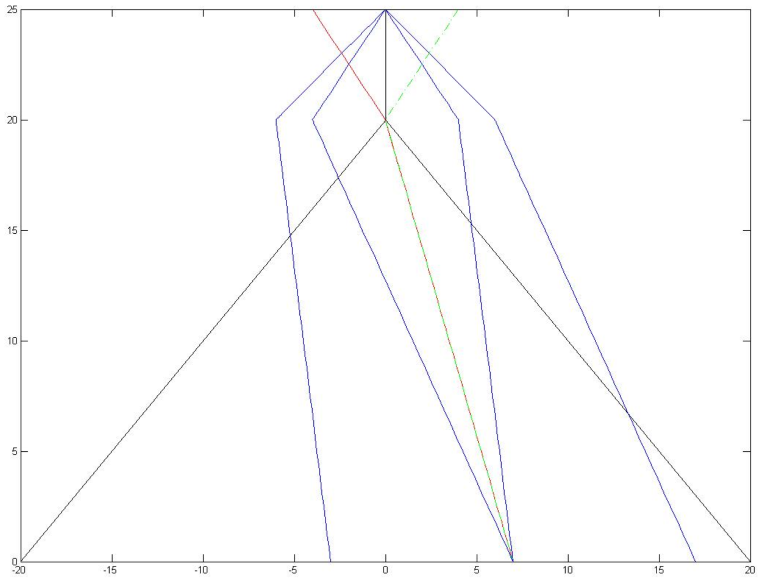

Рис. 5. Движения системы, порожденные стратегией $\bar{\mathbb{U}}$ из начальной позиции $(t_0, z_0) = (0, 7)$ при помехах $v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot)$, $v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot)$

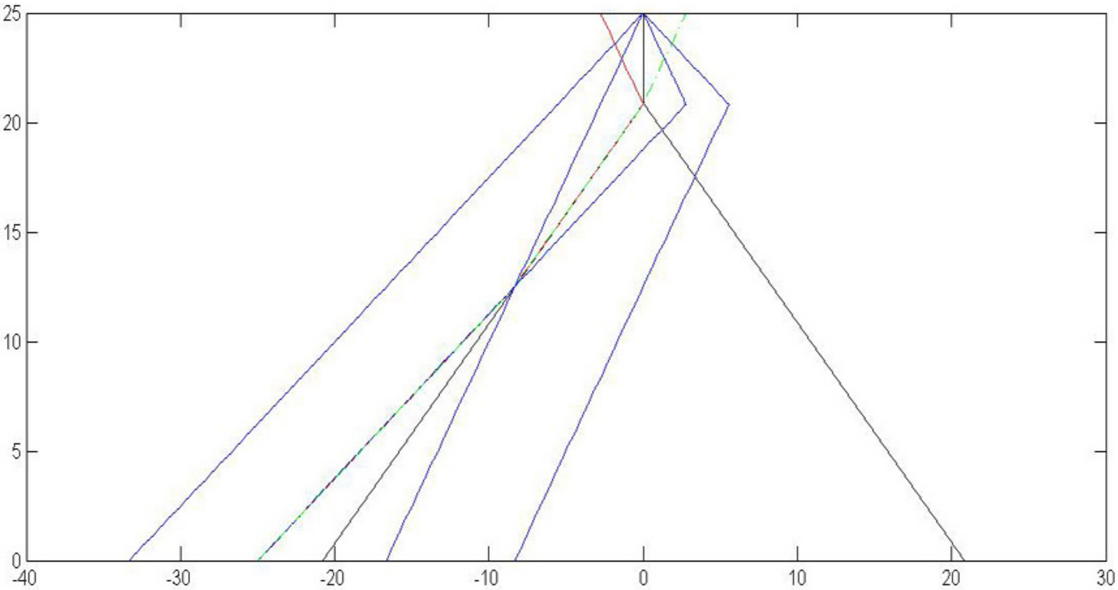

Рис. 6. Движения системы, порожденные стратегией $\bar{\mathbb{U}}$ из начальной позиции $(t_0, z_0) = (0, -25)$ при помехах $v^-_{(t_0,z_0)}(\cdot)$, $v^+_{(t_0,z_0)}(\cdot)$

2.3. Сравнение оптимальной гарантии и минимального риска

В этом пункте на примере задачи управления системой с простыми движениями и терминальным показателем качества иллюстрируются различия в результатах, доставляемых оптимальными позиционными стратегиями и риск-оптимальными стратегиями.

Для всех $\varepsilon > 0$, $(t_*, z_*) \in G$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ обозначим

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X(t_*,z_*,\mathbb{U},v(\cdot))}} \{\gamma(x(\cdot)) - \rho(t_*, z_*, v(\cdot))\}, \qquad \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \mathbb{U})$$

($X(t_*, z_*, \mathbb{U}, v(\cdot))$ — пучок конструктивных движений из начальной позиции (t_*, z_*), порожденный стратегией $\mathbb{U}$ при программной помехе $v(\cdot)$, определяется аналогично пучку $X(t_0, z_0, \mathbb{U}, v(\cdot)) = X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))$, см. п. 1.5),

$$\mathbf{S}^{\varepsilon}(t_*, z_*) := \{\mathbb{U} \in \mathbf{S} \mid \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \mathbb{U}) \leqslant \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*) + \varepsilon\}$$

и сформулируем вспомогательное утверждение.

Л е м м а 2.1. *Пусть для некоторой вещественной функции $\zeta : G \to [0, +\infty)$, стратегии $\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}$ и начальной позиции $(t_*, z_*) \in G$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \bar{\mathbb{U}}) \leqslant \zeta(t_*, z_*). \tag{2.35}$$

Тогда верны соотношения

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*) \leqslant \zeta(t_*, z_*), \tag{2.36}$$

$$\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}^{\zeta(t_*,z_*)}(t_*, z_*), \tag{2.37}$$

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \bar{\mathbb{U}}) \leqslant \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \mathbb{U}) + \zeta(t_*, z_*), \quad \mathbb{U} \in \mathbf{S}. \tag{2.38}$$

Доказательство. Пусть для $\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}$ выполнены условия леммы. Тогда в силу определения $\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*)$ имеем

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*) \leqslant \mathbf{r}_{\text{P}}(t_*, z_*, \bar{\mathbb{U}}) \leqslant \zeta(t_*, z_*).$$

Включение (2.37) следует из (2.36), (2.35) и неравенства $\mathbf{r}(t_*, z_*) \geqslant 0$. Неравенство (2.38) получается из неравенства (2.35):

$$\max_{x(\cdot)\in X(t_*,z_*,\bar{\mathbb{U}},v(\cdot))} \gamma(x(\cdot)) \;\leqslant\; \rho(t_*, z_*, v(\cdot)) + \zeta(t_*, z_*) \;\leqslant\; \max_{x(\cdot)\in X(t_*,z_*,\mathbb{U},v(\cdot))} \gamma(x(\cdot)) + \zeta(t_*, z_*).$$

□

Пусть управляемая система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau) + v_1(\tau), \\ \dot{x}_2(\tau) = u_2(\tau) + v_2(\tau), \quad \tau \in [t_*, \vartheta] \subseteq [t_0, \vartheta] := T, \\ x(t_*) := (x_1(t_*), x_2(t_*)) = (z_{*1}, z_{*2}) := z_*, \quad (t_*, z_*) \in G \subset T \times \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.39}$$

Измеримые реализации управления и помехи при почти всех $\tau \in [t_*, \vartheta]$ стеснены следующими ограничениями:

$$u(\tau) := (u_1(\tau), u_2(\tau)) \in \mathcal{P},$$

$$\mathcal{P} := \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a|u_1| + (a+b)|u_2| \leqslant a(a+b)\right\},$$

$$a > 0,\; b > 0,\; a + b < 1, \tag{2.40}$$

$$v(\tau) := (v_1(\tau), v_2(\tau)) \in \mathcal{Q} := \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |v_1| + |v_2| \leqslant 1\right\}. \tag{2.41}$$

Положим $G_0 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Показатель качества выберем в виде

$$\gamma(x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))) = \sigma(x(\vartheta, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))) := |x_1(\vartheta)| + x_2(\vartheta). \tag{2.42}$$

Для произвольных $u(\cdot) := (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) := (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{V}$ обозначим

$$\mathbf{u}[t_*] := (\mathbf{u}_1[t_*], \mathbf{u}_2[t_*]) := \left(\int\limits_{t_*}^{\vartheta} u_1(s)\,ds, \int\limits_{t_*}^{\vartheta} u_2(s)\,ds\right),$$

$$\mathbf{v}[t_*] := (\mathbf{v}_1[t_*], \mathbf{v}_2[t_*]) := \left(\int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_1(s)\,ds, \int\limits_{t_*}^{\vartheta} v_2(s)\,ds\right).$$

В этих обозначениях

$$x(\vartheta, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \; = \; z_* + \mathbf{u}[t_*] + \mathbf{v}[t_*] := (z_{*1} + \mathbf{u}_1[t_*] + \mathbf{v}_1[t_*], z_{*2} + \mathbf{u}_2[t_*] + \mathbf{v}_2[t_*]). \tag{2.43}$$

Покажем, что в дифференциальной игре [3, § 18; 4, гл. I, § 6; 19, § 11] для системы (2.39) и показателя качества (2.42) существует цена игры [3, § 8; 4, гл. I, § 6; 19, § 11.3] $\rho(\cdot)\colon G \to \mathbb{R}$ и она удовлетворяет равенству

$$\rho(t_*, z_*) = \begin{cases} |z_{*1}| + z_{*2} + (1 - a - b)(\vartheta - t_*), & |z_{*1}| \geqslant (a+b)(\vartheta - t_*), \\ \dfrac{a}{a+b}|z_{*1}| + z_{*2} + (1-a)(\vartheta - t_*), & |z_{*1}| \leqslant (a+b)(\vartheta - t_*). \end{cases} \tag{2.44}$$

Существование цены дифференциальной игры (2.39), (2.42) сразу следует из вида системы и показателя качества (см. [3, теорема 18.1; 4, теорема 2.7.1; 19, теорема 11.4]). Функция (2.44) выпукла, конечна и глобально липшицева. Значит, эта функция принадлежит классу **LD** локально липшицевых функций, дифференцируемых по любому направлению $(1, y)$ $y \in \mathbb{R}^2$, и для нее справедлива теорема 6.5.1 [4, гл. VI, § 5], устанавливающая критерий равенства функции из **LD** цене дифференциальной игры. С помощью указанной теоремы можно проверить [20], что функция (2.44) есть цена дифференциальной игры для системы (2.39) и показателя качества (2.42).

Оптимальная позиционная стратегия [3, § 6; 4, гл. I, § 3; 19, § 11.2] для дифференциальной игры (2.39)–(2.42) может быть построена в виде экстремального сдвига на сопутствующую точку [5]:

$$U(\tau, x, \varepsilon) \in \operatorname*{argmax}_{u \in \mathcal{P}} \langle w(\tau, x, \varepsilon) - x, u\rangle, \tag{2.45}$$

$$w(\tau, x, \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_{|w - x| \leqslant \varepsilon} \rho(\tau, w). \tag{2.46}$$

Из условий (2.45)–(2.46), используя (2.44), получим

$$U(\tau, x, \varepsilon) \in \begin{cases} (-\operatorname{sign}(x_1)(a+b), 0), & |x_1| > \varepsilon_{ab} + (a+b)(\vartheta - \tau), \\ \{(-\operatorname{sign}(x_1)(a+b)(1-\mu), -\mu a) | \mu \in [0,1]\}, & \\ & |x_1| \in [\varepsilon_{ab}, \varepsilon_{ab} + (a+b)(\vartheta - \tau)], \\ (0, -a), & |x_1| < \varepsilon_{ab}, \end{cases}$$

где $\varepsilon_{ab} = a\varepsilon/\sqrt{a^2 + (a+b)^2}$, $\varepsilon > 0$.

В частности, этим условиям удовлетворяет позиционная стратегия

$$\hat{U}(\tau,x,\varepsilon)=\begin{cases}(-\operatorname{sign}(x_1)(a+b),0), & |x_1|>a\varepsilon/\sqrt{a^2+(a+b)^2},\\ (0,-a), & |x_1|\leqslant a\varepsilon/\sqrt{a^2+(a+b)^2}.\end{cases}$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что любая из семейства стратегий

$$U_\lambda(\tau,x)=\begin{cases}(-\operatorname{sign}(x_1)(a+b),0), & |x_1|>\lambda(a+b)(\vartheta-\tau),\\ (0,-a), & |x_1|\leqslant\lambda(a+b)(\vartheta-\tau),\end{cases}\tag{2.47}$$

где $\lambda\in(0,1]$, является оптимальной позиционной стратегией.

Выписывая условия экстремального сдвига на сопутствующую точку [5] для второго игрока, нетрудно проверить, что стратегия $\bar{V}(\tau,x):=(0,1)\in\mathcal{Q}$ является оптимальной позиционной стратегией второго игрока в дифференциальной игре для системы (2.39) и показателя качества (2.42).

Найдем для рассматриваемой задачи оптимальный результат и оптимальную по риску стратегию управления.

Можно проверить, что оптимальный результат в начальной позиции $(t_*,z_*)\in G$ для помехи $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ в приведенных выше обозначениях имеет величину

$$\rho(t_*,z_*,v(\cdot))=\begin{cases}|z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|+z_{*2}+\mathbf{v}_2[t_*]-(a+b)(\vartheta-t_*),\\ \qquad\qquad |z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|\geqslant(a+b)(\vartheta-t_*),\\ \dfrac{a}{a+b}|z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|+z_{*2}+\mathbf{v}_2[t_*]-a(\vartheta-t_*),\\ \qquad\qquad |z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|\leqslant(a+b)(\vartheta-t_*).\end{cases}\tag{2.48}$$

З а м е ч а н и е 6. Из (2.48), (2.44) получим равенства

$$\max_{v(\cdot)\in\mathcal{V}}\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}\gamma(x(\cdot,t_*,z_*,u(\cdot),v(\cdot)))=\max_{v(\cdot)\in\mathcal{V}}\rho(t_*,z_*,v(\cdot))=\rho(t_*,z_*),\quad (t_*,z_*)\in G.$$

То есть в рассматриваемом примере также имеет место случай регулярности программного максимина [3, § 38; 4, гл. III, § 5]: программный максимин совпадает с ценой игры.

Рассмотрим стратегию $\bar{U}(\cdot):G\to\mathcal{P}$, определяемую условиями

$$\bar{U}(\tau,x)=\begin{cases}(-\operatorname{sign}(x_1)(a+b),0), & |x_1|>\vartheta-\tau,\\ (0,-a), & |x_1|\leqslant\vartheta-\tau.\end{cases}\tag{2.49}$$

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Стратегия* $\bar{U}(\cdot)$ *не является оптимальной позиционной стратегией в задаче управления* (2.39)–(2.42) *для начальных позиций из области*

$$D=\{(\tau,x)\mid(a+b)(\vartheta-\tau)<|x_1|<\vartheta-\tau\}\cap G.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно найти помеху, при которой значение показателя качества будет превосходить цену игры. Вычислим значения показателя качества для движений, порождаемых стратегией (2.49) и программной помехой $\bar{v}(\cdot):=(0,1)$. При измельчении шага разбиения Δ пошаговые движения

$$x(\cdot,t_*,z_*,\{\bar{U}(\cdot),\Delta\},\bar{v}(\cdot))$$

из начальной позиции (t_*,z_*) при $|z_{*1}|<\vartheta-t_*$ сходятся в $C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ к движениям вида

$$y(\tau,t_*,z_*):=(z_{*1},z_{*2}+(1-a)(\tau-t_*)),\quad \tau\in[t_*,\vartheta-|z_{*1}|],$$

$$y(\tau,t_*,z_*):=(z_{*1}-\operatorname{sign}(z_{*1})(a+b)(\tau-\vartheta+|z_{*1}|),z_{*2}-a(\vartheta-|z_{*1}|-t_*)+\tau-t_*),$$
$$\tau\in[\vartheta-|z_{*1}|,\vartheta].$$

А в случае $|z_{*1}|\geqslant\vartheta-t_*$ — к движениям

$$y(\tau,t_*,z_*):=(z_{*1}-\operatorname{sign}(z_{*1})(a+b)(\tau-t_*),z_{*2}+\tau-t_*),\quad \tau\in[t_*\vartheta].$$

Следовательно, значения показателя качества в зависимости от начальной позиции будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma(y(\vartheta,t_*,z_*))=\begin{cases}(1-b)|z_{*1}|+z_{*2}+(1-a)(\vartheta-t_*), & |z_{*1}|<\vartheta-t_*,\\ |z_{*1}|+z_{*2}+(1-a-b)(\vartheta-t_*), & |z_{*1}|\geqslant\vartheta-t_*.\end{cases}$$

Сравнивая эти значения со значениями цены игры (2.44), получим положительные величины отклонения:

$$\sigma(y(\vartheta,t_*,z_*))-\rho(t_*,z_*)=\begin{cases}0, & |z_{*1}|\geqslant\vartheta-t_*,\\ b(\vartheta-t_*-|z_{*1}|), & (a+b)(\vartheta-t_*)\leqslant|z_{*1}|\leqslant\vartheta-t_*,\\ b\left(\dfrac{1}{a+b}-1\right)|z_{*1}|, & |z_{*1}|\leqslant(a+b)(\vartheta-t_*).\end{cases}$$

□

У т в е р ж д е н и е 2.3. *Для всех* $(t_*,z_*)\in G$ *и* $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ *выполнены неравенства*

$$\mathbf{r}(t_*,z_*,\bar{U})\leqslant b(\vartheta-t_*). \tag{2.50}$$

Доказательство. Пусть выбраны произвольные позиции $(t_*,z_*)\in G$, помеха $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ и движение $x(\cdot)\in X(t_*,z_*,\bar{U}(\cdot),v(\cdot))$. Заметим, что в силу определения $\bar{U}(\cdot)$ и ограничений на управление и помеху (2.40)–(2.41) движение $x(\cdot)$, однажды покинув область $A_0:=\{(\tau,(x_1,x_2))\mid\tau\in[t_*,\vartheta],\ |x_1|<\vartheta-\tau\}$, больше в нее не возвращается. Вплоть до момента ϑ это движение остается в одной из областей:

$$A_-:=\{(\tau,(x_1,x_2))\mid\tau\in[t_*,\vartheta],\ x_1\leqslant-(\vartheta-\tau)\},$$

$$A_+:=\{(\tau,(x_1,x_2))\mid\tau\in[t_*,\vartheta],\ x_1\geqslant\vartheta-\tau\},$$

пересекающихся в прямой $\{(\vartheta,(0,x_2))\mid x_2\in\mathbb{R}^1\}$. При этом если для начальной позиции $(t_*,z_*):=(t_*,(z_{*1},z_{*2}))$ и выбранной помехи $v(\cdot)$ выполняется неравенство $z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]<0$, то движение остается в области A_-, а в случае $z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]>0$ — в области A_+. Таким образом, при $|z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|>0$ знак первой координаты управляющего воздействия, применявшегося вне области A_0 и ее границы, определяется знаком числа $z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]$.

При условии $|z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]|=0$ из ограничений (2.41) следует, что для любого разбиения Δ пошаговое движение $x(\cdot,t_*,z_*,\{\bar{U},\Delta\},v(\cdot))$ остается в области

$$\bar{A}_0:=\{(\tau,x)\mid\tau\in[t_*,\vartheta],|x_1|\leqslant\vartheta-\tau\}.$$

А значит, управляющее воздействие стратегии $\bar{U}$ равняется $(0,-a)$ на всем промежутке управления.

Из указанных обстоятельств следует, что конечная позиция нашего движения представима в виде

$$x(\vartheta)=(z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*]-\operatorname{sign}(z_{*1}+\mathbf{v}_1[t_*])(a+b)\Delta t_2,z_{*2}+\mathbf{v}_2[t_*]-a\Delta t_1),$$

где $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \vartheta - t_*$, знак первой компоненты вектора, если она отлична от нуля, совпадает со знаком величины $z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]$, а в случае $|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| = 0$ выполняются равенства

$$\Delta t_1 = \vartheta - t_*, \quad \Delta t_2 = 0. \tag{2.51}$$

Используя это представление, оценим отклонение результата, доставляемого стратегией $\bar{U}$, от оптимального результата (2.48). При $|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| \geqslant (a+b)(\vartheta - t_*)$ имеем (используем тождество $|x| = x\,\mathrm{sign}(x)$)

$$\begin{gathered}\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t_*, z_*, v(\cdot)) = |z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*] - \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(a+b)\Delta t_2| + z_{*2} + \mathbf{v}_2[t_*] - a\Delta t_1 - \\ - |z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| - z_{*2} - \mathbf{v}_2[t_*] + (a+b)(\vartheta - t_*) = \\ = \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*] - \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(a+b)\Delta t_2) + \\ + z_{*2} + \mathbf{v}_2[t_*] - a\Delta t_1 - \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]) - z_{*2} - \mathbf{v}_2[t_*] + \\ + (a+b)(\vartheta - t_*) = (a+b)\Delta t_2 - a\Delta t_1 + (a+b)(\vartheta - t_*) = b\Delta t_1 \leqslant b(\vartheta - t_*).\end{gathered}$$

В случае $|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| \leqslant (a+b)(\vartheta - t_*)$ и $|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| > 0$ получим

$$\begin{gathered}\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t_*, z_*, v(\cdot)) = \\ = |z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*] - \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(a+b)\Delta t_2| + z_{*2} + \mathbf{v}_2[t_*] - a\Delta t_1 - \frac{a}{a+b}|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| = \\ = \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*] - \mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(a+b)\Delta t_2) + \\ + z_{*2} + \mathbf{v}_2[t_*] - a\Delta t_1 - z_{*2} - \mathbf{v}_2[t_*] + a(\vartheta - t_*) - \\ - \frac{a}{a+b}\,\mathrm{sign}(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*])(z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]) - z_{*2} - \mathbf{v}_2[t_*] + a(\vartheta - t_*) = \\ = \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| - b\Delta t_2 = \frac{b}{a+b}\,|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| - b\Delta t_2 \leqslant \\ \leqslant b(\vartheta - t_* - \Delta t_2) = b\Delta t_1 \leqslant b(\vartheta - t_*).\end{gathered}$$

Если верно $|z_{*1} + \mathbf{v}_1[t_*]| = 0$, то с учетом (2.51) выполняются соотношения

$$\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t_*, z_*, v(\cdot)) = z_{*2} + \mathbf{v}_2[t_*] - a(\vartheta - t_*) - z_{*2} - \mathbf{v}_2[t_*] + a(\vartheta - t_*) = 0 \leqslant b(\vartheta - t_*).$$

Полученные неравенства влекут оценку (2.50). $\square$

Из оценки (2.50) и леммы 2.1 следует, что для любых позиций $(t_*, z_*) \in G$, $\varepsilon > 0$ и $U_\varepsilon \in \mathbf{S}^\varepsilon(t_*, z_*)$ будут выполняться соотношения

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(t_*, z_*) := \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(t_*, z_*, \mathbb{U}) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(t_*, z_*, \bar{U}) \leqslant b(\vartheta - t_*), \tag{2.52}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(t_*, z_*, U_\varepsilon) \leqslant b(\vartheta - t_*) + \varepsilon, \tag{2.53}$$

$$\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}^{b(\vartheta - t_*)}(t_*, z_*). \tag{2.54}$$

Эти соотношения говорят о том, что функция риска в задаче (2.39)–(2.42) мажорируется величиной $b(\vartheta - t_*)$, а приведенная стратегия является только лишь $b(\vartheta - t_*)$-риск-оптимальной.

Рассмотрим взаимодействие построенных стратегий с «нейтральной» помехой. Зафиксируем конечный момент времени, начальную позицию и помеху:

$$\vartheta = 2, \quad (t_*, z_*) = (0, (-1, -1)), \quad \bar{v}(\cdot) := (1, 0) \in \mathcal{Q}. \tag{2.55}$$

Помеху $\bar v(\cdot)$ можно назвать «нейтральной», так как при отсутствии управляющего воздействия ($u := (0,0)$) значение показателя качества в начальной позиции равно его значению в конечной позиции: $\sigma((-1,-1)) = \sigma((1,-1))$. Таким образом, по отношению к показателю качества вклад данной помехи равняется нулю.

Оценим результаты, доставляемые позиционной стратегией $U_\lambda(\cdot)$ при $\lambda = 1$ и позиционной стратегией $\hat U(\cdot,\varepsilon)$ при произвольном ε.

В соответствии с определением (2.47) и выбранным значением параметра

$$U_1(\tau,x) = \begin{cases} (-\operatorname{sign}(x_1)(a+b),0), & |x_1| > (a+b)(\vartheta-\tau),\\ (0,-a), & |x_1| \leqslant (a+b)(\vartheta-\tau). \end{cases}$$

Рассмотрим пошаговые движения $x(\cdot,0,(-1,-1),\{U_1,\Delta\},\bar v(\cdot))$, порожденные законом управления $\{U_1,\Delta\}$ и помехой $\bar v(\cdot)$ из начальной позиции $(0,(-1,-1))$. При измельчении шага разбиения Δ интервала $[0,2]$ эти движения будут сходиться в $C([0,2];\mathbb{R}^2)$ к следующему движению:

$$y(\tau) := (y_1(\tau),y_2(\tau)) = \begin{cases} (-1+(1+a+b)\tau,-1), & \tau\in[0,t_{*1}],\\ (y_1(t_{*1})+\tau-t_{*1},-1-a(\tau-t_{*1})), & \tau\in[t_{*1},t_{*2}],\\ (y_1(t_{*2})+(1-a-b)(\tau-t_{*2}),-1-a(t_{*2}-t_{*1})), & \tau\in[t_{*2},2], \end{cases}$$

где

$$t_{*1} = 1-2(a+b),\quad \Delta t_2 = \frac{2}{1+a+b}-2t_{*1},$$
$$t_{*2} = t_{*1}+\Delta t_2 = \frac{2}{1+a+b}-t_{*1},$$
$$y_1(t_{*1}) = -1+(1+a+b)t_{*1},$$
$$y_1(t_{*2}) = y_1(t_{*1})+\Delta t_2.$$

Следовательно, для любого движения $x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U_1,\bar v(\cdot))$ будут выполняться соотношения

$$\sigma(x(\vartheta)) = \lim_{d(\Delta)\to 0}\sigma(x(\vartheta,t_*,z_*,\{U_{0.5},\Delta\},\bar v(\cdot))) = \sigma(y[2]) = \left|1-2\frac{(a+b)^2}{1+a+b}\right|-1-$$
$$-2a(a+b)\frac{1+2(a+b)}{1+a+b} = -2(a+b)\left(2a+\frac{b}{1+a+b}\right). \quad (2.56)$$

Если считать параметр b пренебрежимо малым по сравнению с параметром a, то при a, малом в сравнении с единицей, из (2.56) получим

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U_1,\bar v(\cdot))}\sigma(x(\vartheta))\approx 0 \quad (2.57)$$

с точностью до величин, имеющих более высокий порядок малости по отношению к a. Например, при $a = 0.1, b = 0.001$ из (2.56) получим

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U_1,\bar v(\cdot))}\sigma(x(\vartheta))\approx -0.0406.$$

Рассмотрим пошаговые движения $x(\cdot,0,(-1,-1),\{\hat U(\cdot,\varepsilon),\Delta\},\bar v(\cdot))$, порожденные законом управления $\{\hat U(\cdot,\varepsilon),\Delta\}$ и помехой $\bar v(\cdot)$. При измельчении шага разбиения Δ они будут сходиться в $C([0,2];\mathbb{R}^2)$ к движению

$$\hat y[\tau,\varepsilon] := (\hat y_1[\tau,\varepsilon],\hat y_2[\tau,\varepsilon]) = \begin{cases} (-1+(1+a+b)\tau,-1), & \tau\in[0,t_{*1}],\\ (-\varepsilon_{ab}+\tau-t_{*1},-1-a(\tau-t_{*1})), & \tau\in[t_{*1},t_{*2}],\\ (\varepsilon_{ab}+(1-a-b)(\tau-t_{*2}),-1-2a\varepsilon_{ab}), & \tau\in[t_{*2},2], \end{cases}$$

где

$$t_{*1} = \frac{1-\varepsilon_{ab}}{1+a+b}, \quad \Delta t_2 = 2\varepsilon_{ab},$$

$$t_{*2} = t_{*1} + \Delta t_2 = \frac{1+\varepsilon_{ab}+2\varepsilon_{ab}(a+b)}{1+a+b}.$$

Следовательно, будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\hat{U}(\cdot,\varepsilon),\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) &= \lim_{d(\Delta)\to 0} \sigma(x(\vartheta, t_*, z_*, \{\hat{U}(\cdot,\varepsilon),\Delta\}, \bar{v}(\cdot))) = \sigma(\hat{y}[2,\varepsilon]) = \\ &= \left|\varepsilon_{ab} + (1-a-b)\left(2 - \frac{1+\varepsilon_{ab}+2\varepsilon_{ab}(a+b)}{1+a+b}\right)\right| - 1 - 2a\varepsilon_{ab} = \\ &= (1-a-b)\left(1 + \frac{a+b-\varepsilon_{ab}-2\varepsilon_{ab}(a+b)}{1+a+b}\right) - 1 + \varepsilon_{ab}(1-2a) = \\ &= (1-\varepsilon_{ab})\left(1 + \frac{(1-a-b)(a+b)}{1+a+b}\right) - 1 + \varepsilon_{ab}(1-2a). \quad (2.58)\end{aligned}$$

При достаточно малом ε, учитывая, что $a+b<1$, получим

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\hat{U}(\cdot,\varepsilon),\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) > 0. \quad (2.59)$$

Например, при $a = 0.1, b = 0.001, \varepsilon = 0.00001$ из (2.58) получим

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\hat{U}(\cdot,\varepsilon),\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \approx 0.0824.$$

Кроме того, используя необходимые условия для универсальной оптимальной позиционной стратегии [21], можно установить, что для любой универсальной оптимальной позиционной стратегии $\mathbb{U}$ и произвольного $\zeta > 0$ найдется помеха $\bar{v}_\zeta(\cdot) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая неравенству, аналогичному оценке (2.56):

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U,\bar{v}_\zeta(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \geqslant -2(a+b)\left(2a + \frac{b}{1+a+b}\right) - \zeta. \quad (2.60)$$

Следовательно, при b, пренебрежимо малом по сравнению с a, и a, малом в сравнении с единицей, и при $\zeta \to 0$ также будет выполняться приближение (2.57) с точностью до величин, имеющих более высокий порядок малости по отношению к a.

Так как помеха была выбрана «нейтральной» по отношению к показателю качества, полученный результат оказался существенно меньше цены игры (2.44), имеющей для этой начальной позиции значение

$$\rho(0,(-1,-1)) = |-1| - 1 - (a+b-1)(2-0) = 2 - 2(a+b). \quad (2.61)$$

При этом значение оптимального результата (2.48) для выбранных начальной позиции и помехи равняется

$$\rho(0,(-1,-1),\bar{v}(\cdot)) = |-1+2| - 1 + 0 - (a+b)(2-0) = -2(a+b), \quad (2.62)$$

что значительно меньше гарантированного результата (2.61) и на величину порядка $2(a+b)$ меньше значений (2.57), (2.59).

Теперь обратимся к результатам, доставляемым оптимальными по риску стратегиями. В силу (2.52), (2.62) для любого $\varepsilon > 0$ и любой стратегии $U_\varepsilon \in \mathbf{S}^\varepsilon(0,(-1,-1))$ будет выполняться неравенство

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U_\varepsilon,\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \leqslant \rho(0,(-1,-1),\bar{v}(\cdot)) + \delta(0,(-1,-1)) + \varepsilon \leqslant -2a + \varepsilon. \quad (2.63)$$

Для стратегии $\bar{U}$ (2.49) из (2.37) и (2.52) сразу получим

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\bar{U},\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \;\leqslant\; \rho(0,(-1,-1),\bar{v}(\cdot)) + \delta(0,(-1,-1)) + 2b \;\leqslant\; -2a + 2b.$$

Кроме того, построив движения $X(0,(-1,-1),\bar{U},\bar{v}(\cdot))$, можно непосредственно установить неравенство

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\bar{U},\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \leqslant -2a. \tag{2.64}$$

И при выбранных значениях параметров $a = 0.1$ и $b = 0.001$ из последних оценок следуют неравенства

$$\max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),U_\varepsilon,\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \leqslant -0.2+\varepsilon, \qquad \max_{x(\cdot)\in X(0,(-1,-1),\bar{U},\bar{v}(\cdot))} \sigma(x(\vartheta)) \leqslant -0.2,$$

существенно улучшающие аналогичные оценки для рассмотренных оптимальных позиционных стратегий U_1 и $\hat{U}$.

Рассмотренная задача оптимального управления (2.39)–(2.42) показывает, что ε-оптимальные по риску стратегии в общем случае отличаются от ε-оптимальных позиционных стратегий. А именно, $a(\vartheta - t_*)$-оптимальная по риску стратегия $\bar{U}$ (2.49) не является $a(\vartheta - t_*)$-оптимальной позиционной стратегией (см. утверждение 2.2).

Эта стратегия при указанных параметрах a и b, начальных условиях и помехе (см.(2.55)) дает результат (см. оценки (2.63), (2.64)), улучшающий аналогичные результаты для рассмотренных оптимальных позиционных стратегий (см. оценки (2.57), (2.59), (2.60)) на величину порядка $a(\vartheta - t_*)$. Этот же вывод в пределе может быть распространен на произвольную универсальную оптимальную стратегию.

Из полученных для стратегии $\bar{U}$ оценок риска (2.50), (2.53) видно, что при произвольной программной помехе она дает результат, отклоняющийся от оптимального результата на величину, не превосходящую $b(\vartheta - t_*)$. Следовательно, гарантированный результат $\Gamma_{\text{р}}(t_*, z_*, \bar{U})$ стратегии $\bar{U}$ при программных помехах не более чем на величину $b(\vartheta - t_*)$ превосходит оптимальный гарантированный результат $\Gamma_{\text{р}}(t_*, z_*, \mathbf{S})$ при программных помехах:

$$\Gamma_{\text{р}}(t_*, z_*, \bar{U}) \leqslant \Gamma_{\text{р}}(t_*, z_*, \mathbf{S}) + b(\vartheta - t_*).$$

И если параметр b пренебрежимо мал по сравнению с параметром a, то при переходе от рассмотренных оптимальных позиционных стратегий к стратегии $\bar{U}$ происходит существенное улучшение результата на отдельных помехах при пренебрежимо малом ухудшении на множестве всех остальных помех.

3. Неулучшаемость по риску стратегий с полной памятью

Поскольку наименьшая из записанных в (2.1) величин — это оптимальный риск в классе квазистратегий, особый интерес представляют те функциональные ограничения на помехи и те условия, при которых соответствующий оптимальный риск в классе позиционных стратегий с полной памятью совпадает с оптимальным риском в классе квазистратегий. По аналогии с задачей оптимизации гарантированного результата будем называть это свойство множества стратегий $\mathbf{S}$ неулучшаемостью по риску.

Далее определяется семейство [22] стратегий $(\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon})_{\varepsilon>0} \subset \mathbf{S}$ и приводятся условия на управляемую систему (1.1), для которых (при $\varepsilon \to 0$) риск стратегий из этого семейства при L_{p}-компактных ограничениях на помеху стремится к величине минимального риска в классе квазистратегий.

Стратегии $(\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ при формировании управления симулируют движение вспомогательной управляемой системы — y-модели. Для выбора помехи, действующей в y-модели, на малом завершающем участке предыдущего интервала разбиения в управлении исходной системы (1.1) используется специально выбранная серия тестовых управляющих воздействий. По наблюдениям за соответствующими реакциями управляемой системы решается обратная задача динамики [23, 24] — строится аппроксимация помехи, реально действующей в управляемой системе (1.1). Эта аппроксимация принимается в качестве помехи в y-модели. Управление в y-модели определяется как контруправление (см. [3]), экстремальное ко множеству траекторий системы, порожденному риск-оптимальными квазистратегиями. Выбранное таким образом управление используется и в «реальной» управляемой системе (1.1) на всем интервале разбиения, за исключением завершающего «тестового» участка. При подходящим образом согласованном уменьшении шага разбиения и суммарной длины «тестовых» участков движения y-модели будут сходиться в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к риск-оптимальным движениям, порожденным квазистратегиями, а движения исходной системы — к соответствующим движениям y-модели. Такая сходимость обеспечивает близкие к оптимальным значения критерия Ниханса–Сэвиджа на движениях управляемой системы и, как следствие, искомые свойства семейства стратегий $(\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon})_{\varepsilon>0}$.

3.1. Определение стратегий $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$

Перейдем к формальному определению стратегий $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$. Как указывалось, в них участвуют «целевые множества», построенные из риск-оптимальных движений, порожденных квазистратегиями, которые мы обозначим $\mathcal{W}(x(t_0),\bar{v}(\cdot))$. Эти множества зависят от восстановленной помехи $\bar{v}(\cdot)$: для всех $z\in G_0$, $\tau\in T$, $y(\cdot)\in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ и $\bar{v}(\cdot)\in\mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{W}(z,\bar{v}(\cdot)) := \bigcap_{\varepsilon>0}\mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{\bigcup_{\substack{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z,\alpha(\cdot))\leqslant\\ \leqslant\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z)+\varepsilon}} x(\cdot,t_0,z,\alpha(\bar{v}(\cdot)),\bar{v}(\cdot))\Big\}. \tag{3.1}$$

Определим также проекции $w(\cdot|\tau,y(\cdot),\bar{v}(\cdot))$ движений y-модели на эти множества: для всех $\tau\in T$, $y(\cdot)\in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ и $\bar{v}(\cdot)\in\mathcal{V}$

$$w(\cdot|\tau,y(\cdot),\bar{v}(\cdot)) \in \underset{w(\cdot)\in\mathcal{W}(y(t_0),\bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))|_{[t_0,\tau]}}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot)-y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \tag{3.2}$$

В последнем выражении использована операция экстраполяции константой функции $\bar{v}$: для произвольных $t_1,t_2\in T$, $t_1\leqslant t_2$ и функции $h(\cdot):[t_1,t_2]\mapsto H$ символы $h_{[t_1,t_2]}(\cdot)$ обозначают следующую функцию из T в H:

$$h_{[t_1,t_2]}(\tau) := \begin{cases} h(t_1), & \tau\in[t_0,t_1],\\ h(t_2), & \tau\in[t_2,\vartheta],\\ h(\tau), & \tau\notin[t_0,t_1]\cup[t_2,\vartheta]. \end{cases} \tag{3.3}$$

З а м е ч а н и е 7. Операция (3.3) обладает следующими свойствами:

— сохраняет свойства ограниченности, монотонности, непрерывности, абсолютной непрерывности или измеримости, если ими обладала исходная функция;

— не сохраняет класс эквивалентности измеримых функций: расширения двух измеримых функций из одного класса эквивалентности могут оказаться в различных классах эквивалентности;

— удобно взаимодействует с операцией сужения $\cdot|_{[t_1,t_2]}$:

$$h_{[t_1,t_2]}(\cdot)|_{[t_1,t_2]} = h(\cdot)|_{[t_1,t_2]}, \quad (h(\cdot)|_{[t_1,t_2]})_{[t_1,t_2]} = h_{[t_1,t_2]}(\cdot).$$

Выберем и зафиксируем некоторое значение параметра точности ε из интервала $(0, 1)$.

Обозначим $(u^\varepsilon_j)_{j\in 1..n_\varepsilon}$ некоторую ε-сеть в компакте $\mathcal{P}$ — произвольное конечное подмножество из $\mathcal{P}$ такое, что $\sup_{u\in\mathcal{P}} \min_{j\in 1..n_\varepsilon} \|u - u^\varepsilon_j\| \leqslant \varepsilon$.

Пусть $\Delta := (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ — разбиение интервала T. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что для разбиения Δ выполняется неравенство $\mathrm{D}(\Delta) / \mathrm{d}(\Delta) \leqslant 3$. При необходимости, пользуясь леммой 1.1, «прорежаем» разбиение Δ и проводим постренение стратегии на выбранном таким образом подмножестве Δ. Такое построение можно рассматривать как определение стратегии на всем разбиении Δ (моменты, не вошедшие в выбранное подмножество, не изменяют значение стратегии).

Обозначим

$$\tau'_i := \tau_i - \varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta), \qquad i \in 1..(n_\Delta - 1), \tag{3.4}$$

зададим дополнительные моменты разбиения интервала T,

$$\tau'_{ij} := \tau'_i + \frac{j(\tau_i - \tau'_i)}{n_\varepsilon}, \quad j \in 0..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_\Delta - 1) \tag{3.5}$$

(благодаря (3.4) $\tau'_{ij} \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$), и для произвольного $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$ зададим величины

$$d_{ij}(x(\cdot)) := \frac{x(\tau'_{ij}) - x(\tau'_{i(j-1)})}{\tau'_{ij} - \tau'_{i(j-1)}}, \quad j \in 1..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_\Delta - 1).$$

Зафиксируем некоторые $u_* \in \mathcal{P}$, $v_* \in \mathcal{Q}$ и определим обратную связь с полной памятью $\mathbf{U}^\Delta_\varepsilon = (\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i}(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ на разбиении Δ индуктивно.

База индукции: для всех $x_0(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R}^n)$ положим

$$y_0(\tau_0) = x_0(\tau_0), \quad \bar v_0 := v_*, \quad u_0 := u_*, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon 0}(x_0(\cdot))(t) := \begin{cases} u_0, & t \in [\tau_0, \tau'_1), \\ u^\varepsilon_j, & t \in [\tau'_{1(j-1)}, \tau'_{1j}), j \in 1..n_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.7}$$

Шаг индукции: если при некотором $i \in 1..(n_\Delta - 1)$ для всех $x_{i-1}(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i-1}], \mathbb{R}^n)$ определены значения $\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon(i-1)}(x_{i-1}(\cdot))$ и элементы $y_{i-1}(\cdot) = y_{i-1}(\cdot, x_{i-1}(\cdot)) \in C([t_0, \tau_{i-1}], \mathbb{R}^n)$, $\bar v_{i-1} = \bar v_{i-1}(x_{i-1}(\cdot)) \in \mathcal{Q}$, то для любого $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n)$ определим $y_i(\cdot)$ как продолжение на $[t_0, \tau_i]$ элемента $y_{i-1}(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i-1}], \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} y_i(\tau) = y_{i-1}(\tau_{i-1}, x_i(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i-1}]}) + \\ + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau} f(t, y_i(t), \mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i-1}(x_i(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i-1}]})(\tau_{i-1}), \bar v_{i-1}(x_i(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i-1}]}))dt, \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \end{aligned} \tag{3.8}$$

положим

$$\bar v_i \in \operatorname*{argmin}_{v\in\mathcal{Q}} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \|d_{ij}(x_i(\cdot)) - f(\tau_i, x_i(\tau_i), u^\varepsilon_j, v)\|, \tag{3.9}$$

$$u_i \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{P}} \big\langle y_i(\tau_i) - w(\tau_i \mid \tau_i, y_i(\cdot), \bar v_{[\tau_0,\tau_i]}(\cdot)), f(\tau_i, y_i(\tau_i), u, \bar v_i)\big\rangle, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i}(x_i(\cdot))(t) := \begin{cases} u_i, & t \in [\tau_i, \tau'_{i+1}), \\ u^\varepsilon_j, & t \in [\tau'_{(i+1)(j-1)}, \tau'_{(i+1)j}), \quad j \in 1..n_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.11}$$

Здесь использовано обозначение $\bar v(\cdot)$ для реализации помехи, восстановленной в процессе управления:

$$\bar v(t) := \bar v_{i_t}, \quad t \in T. \tag{3.12}$$

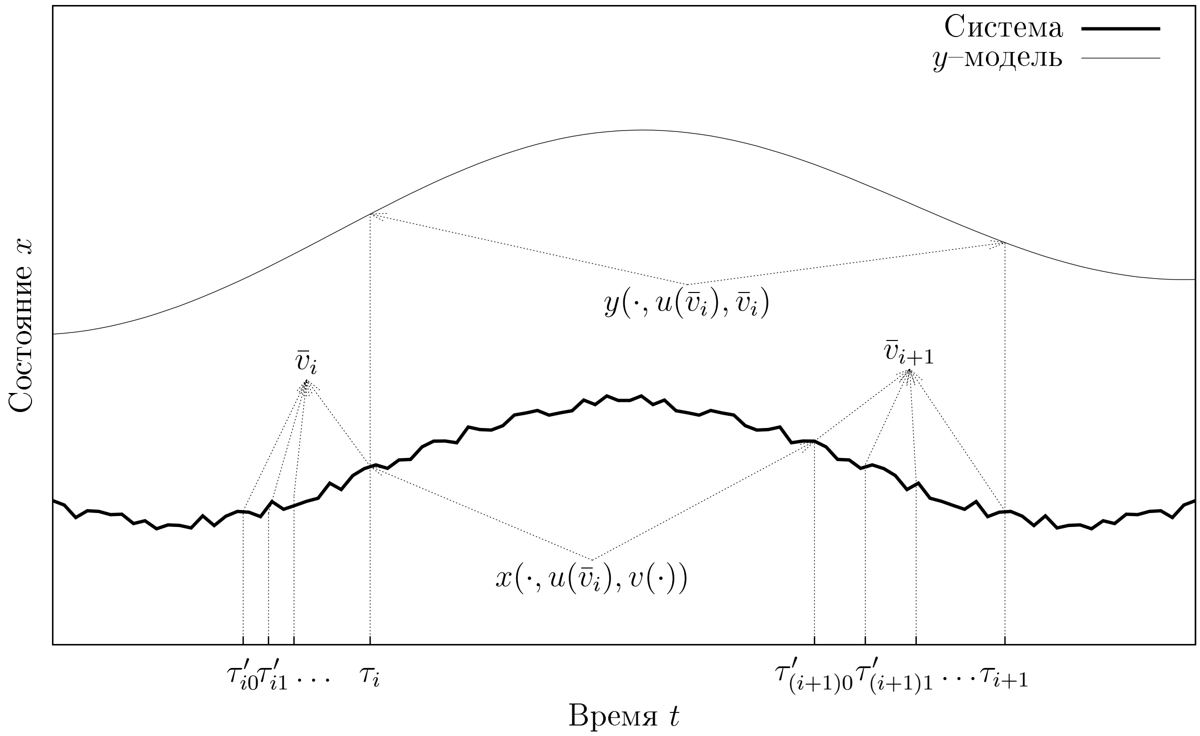

Рис. 7. Схема работы стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$

Понятно, что к моменту τ_i эта реализация известна на промежутке $[\tau_0, \tau_i]$, чего достаточно для построения.

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}_\varepsilon^\Delta$ на разбиении $\Delta \in \Delta_T$ определена. Тем самым определена и стратегия $\mathbb{U}_\varepsilon := (\mathbf{U}_\varepsilon^\Delta)_{\Delta\in\Delta_T}$. В присвоениях (3.11) первая строчка определяет действия управляющей стороны по минимизации риска, вторая — по идентификации помехи.

Иллюстрация предлагаемой схемы управления приведена на рис. 7.

Для любых $(t, x, u) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}$ обозначим $\mathcal{Q}_{txu}$ фактор-множество множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{txu}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{txu}{\sim} v_2) \Leftrightarrow (f(t, x, u, v_1) = f(t, x, u, v_2)). \tag{3.13}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть фактор-множества $\mathcal{Q}_{txu}$ не зависят от x:*

$$\mathcal{Q}_{txu} = \mathcal{Q}_{tx'u} \qquad \text{для всех } u \in \mathcal{P},\ (t, x), (t, x') \in G. \tag{3.14}$$

Тогда при всех $z_0 \in G_0$ справедливы равенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{CAR}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0), \quad z_0 \in G_0; \tag{3.15}$$

стратегии $(\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, заданные выражениями (3.1), (3.2), (3.6)–(3.11), *удовлетворяют равенствам*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0), \quad z_0 \in G_0. \tag{3.16}$$

З а м е ч а н и е 8. Приведем пример семейства систем, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1: пусть управляемая система (1.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = g_1(t, x(t), u(t)) + g_2(t, x(t), u(t)) \cdot h(t, v(t)), \tag{3.17}$$

где $g_2(\cdot)$ — матрица-функция размерности $n \times m$, $g_1(\cdot)$ — вектор-функция (столбец) размерности n, $h(\cdot)$ — вектор-функция размерности m и в дополнение к указанным в п. 1.2 свойствам при всех $t \in T$, $u \in \mathcal{P}$ ядро линейного оператора $g_2(t,x,u) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от $x \in G|_t$. Тогда система (3.17) удовлетворяет условию (3.14).

3.2. Риск-оптимальность стратегии $\mathbb{U}_{\mathbf{S}\varepsilon}$

Здесь и далее $\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{X}}(A,B)$ обозначает хаусдорфово отклонение между множествами $A, B \subset X$ в метрическом пространстве X:

$$\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{X}}(A,B) := \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \|a-b\|_X;$$

кроме того, для произвольной функции $(0,1] \times (0,1] \times T \ni (\delta,\delta',\tau) \mapsto h(\delta,\delta',\tau) \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\lim_{\delta,\delta'\to+0} h(\delta,\delta',\tau) := \lim_{\substack{\delta+\delta'\to+0\\ \delta,\delta'>0\\ \tau-\delta,\tau+\delta\in T}} h(\delta,\delta',\tau).$$

Л е м м а 3.1. *Для любых $c \in [1/2,+\infty)$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и п.в. $\tau \in T$ верно равенство*

$$\lim_{\substack{a,b\to\tau\ \ a,b\in T\\ (a,b)\in I_c(\tau)}} \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} \left\| (b-a)^{-1} \int\limits_{[a,b]} f(s,x(s),u,v(s))\,ds - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau)) \right\| = 0. \tag{3.18}$$

Доказательство. Для всех $x(\cdot) \in X(G_0)$ справедливо неравенство

$$\sup_{s,\tau\in T} \|x(\tau)-x(s)\| \leqslant \varkappa(G)|\tau-s|, \tag{3.19}$$

где $\varkappa(G) < +\infty$, как прежде, задана в (1.4).

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме Лузина [17, гл. 4] существует замкнутое измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq T$ такое, что

$$\lambda(T \backslash E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \quad v(\cdot) \in C(E_\varepsilon, \mathbb{R}^q). \tag{3.20}$$

Здесь $\lambda(T\backslash E_\varepsilon)$ — лебегова мера множества $T\backslash E_\varepsilon$.

Из непрерывности правой части уравнения (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, компактности этой области и соотношений (3.19), (3.20) следует, что функция

$$E_\varepsilon \ni s \mapsto f(s,x(s),u,v(s)) \in \mathbb{R}^n$$

равностепенно по $u \in \mathcal{P}$, $x(\cdot) \in X(G_0)$ равномерно непрерывна по $s \in E_\varepsilon$, то есть существует функция $\varphi_\varepsilon(\cdot) : (0,+\infty) \mapsto (0,+\infty)$, зависящая от множества E_ε, такая, что $\lim_{\delta\to+0} \varphi_\varepsilon(\delta) = 0$ и

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)\\ s,\tau\in E_\varepsilon}} \|f(s,x(s),u,v(s)) - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))\| \leqslant \varphi_\varepsilon(|s-\tau|). \tag{3.21}$$

Для всех $a, b, \tau \in T$, $a < b$ имеем неравенства

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} \left\| \int\limits_{[a,b]} \frac{f(s,x(s),u,v(s))}{b-a}\,ds - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau)) \right\| =$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} \left\| \int\limits_{[a,b]} \frac{f(s,x(s),u,v(s))}{b-a}\,ds - \int\limits_{[a,b]} \frac{f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))}{b-a} ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} (b-a)^{-1} \int\limits_{[a,b]} \|f(s,x(s),u,v(s)) - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))\|\,ds.$$

Разложим последний интеграл в сумму двух, используя множество E_ε, и применим к первому слагаемому оценку (3.21) (продолжаем выкладки):

$$= \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} \Big\{(b-a)^{-1} \int\limits_{[a,b]\cap E_\varepsilon} \|f(s,x(s),u,v(s)) - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))\|\, ds +$$
$$+ (b-a)^{-1} \int\limits_{[a,b]\setminus E_\varepsilon} \|f(s,x(s),u,v(s)) - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))\|\, ds\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \varphi_\varepsilon(\max\{|a-\tau|,|b-\tau|\}) + 2\varkappa(G)\frac{\lambda([a,b]\setminus E_\varepsilon)}{b-a}.$$

Выберем и зафиксируем произвольное $c\in[1/2,+\infty)$. Пусть E'_ε — множество точек плотности множества E_ε (см. (7.5), с. 87). Из замкнутости E_ε следует $E'_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon$. В силу теоремы Лебега о точках плотности (см. теорему 7.2, с. 87) для E'_ε также верно неравенство $\lambda(T\setminus E'_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$.

Пусть дополнительно $\tau\in E'_\varepsilon$. В силу выбора τ имеем оценки

$$\lim_{\substack{a,b\to\tau\\ a,b\in I_c(\tau)\cap T}} \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}\\ x(\cdot)\in X(G_0)}} \Big\|(b-a)^{-1}\int\limits_{[a,b]} f(s,x(s),u,v(s))\,ds - f(\tau,x(\tau),u,v(\tau))\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{a,b\to\tau}\varphi_\varepsilon(\max\{|a-\tau|,|b-\tau|\}) + 2\varkappa(G)\lim_{\substack{a,b\to\tau\\ a,b\in I_c(\tau)\cap T}}\left(1-\frac{\lambda([a,b]\cap E_\varepsilon)}{b-a}\right) = 0.$$

Мы показали, что мера множества точек $\tau\in T$, в которых равенство (3.18) может не выполняться, меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$. Значит, это множество имеет нулевую меру Лебега. □

Л е м м а 3.2. *Существует монотонная функция*

$$\mu_\rho(\cdot):[0,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$$

такая, что $\lim_{\delta\to+0}\mu_\rho(\delta)=0$ *и для любых* $z,z'\in G_0$, $v(\cdot),v'(\cdot)\in\mathcal{V}$ *выполнены неравенства*

$$|\rho(z,v(\cdot)) - \rho(z',v'(\cdot))| \leqslant \mu_\rho(\|z-z'\| + \int\limits_T \mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds). \tag{3.22}$$

Доказательство. Пусть $z,z'\in G_0$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}$, $v(\cdot),v'(\cdot)\in\mathcal{V}$. Обозначим

$$x(\cdot) := x(\cdot,t_0,z,u(\cdot),v(\cdot)),\quad x'(\cdot) := x(\cdot,t_0,z',u(\cdot),v'(\cdot)).$$

Тогда из неравенств

$$\|x(\tau)-x'(\tau)\| \leqslant \|z-z'\| +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\tau}\|f(s,x(s),u(s),v(s)) - f(s,x(s),u(s),v'(s))\|ds +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\tau}\|f(s,x(s),u(s),v'(s)) - f(s,x'(s),u(s),v'(s))\|ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{\tau}\mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds + \int\limits_{t_0}^{\tau}L_f(G)\|x(s)-x'(s)\|ds$$

и леммы Гроноулла [15, с. 219] получим оценку

$$\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(X(z,\mathcal{U},v(\cdot)),X(z',\mathcal{U},v'(\cdot)))\leqslant$$
$$\leqslant (\|z-z'\|+\int\limits_T\mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds)\big(1+L_f(G)(\vartheta-t_0)\exp(L_f(G)(\vartheta-t_0))\big):=$$
$$:=K(\|z-z'\|+\int\limits_T\mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds),$$

справедливую для всех $z,z'\in G_0$, $v'(\cdot),v'(\cdot)\in\mathcal{V}$. Из включения $X(G_0)\in\mathbf{comp}(C(T;\mathbb{R}^n))$ и непрерывности в $C(T;\mathbb{R}^n)$ функционала γ следует существование монотонной функции $\mu_\gamma(\cdot):[0,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$ такой, что $\lim_{\delta\to+0}\mu_\gamma(\delta)=0$ и

$$|\gamma(x(\cdot))-\gamma(x'(\cdot))|\leqslant\mu_\gamma(\|x(\cdot)-x'(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}),\quad x(\cdot),x'(\cdot)\in X(G_0).\tag{3.23}$$

Из последних двух оценок получим искомое неравенство:

$$|\rho(z,v(\cdot))-\rho(z',v'(\cdot))|\leqslant\mu_\gamma(K(\|z-z'\|+\int\limits_T\mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds)):=$$
$$:=\mu_\rho(\|z-z'\|+\int\limits_T\mu_v(\|v(s)-v'(s)\|)ds).$$

□

Л е м м а 3.3. *Существует монотонная функция* $\mu_{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}}(\cdot):[0,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$ *такая, что* $\lim_{\delta\to+0}\mu_{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}}(\delta)=0$ *и для всех* $z,z'\in G_0$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z)-\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z')|\leqslant\mu_{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}}(\|z-z'\|).\tag{3.24}$$

Доказательство. Следуя оценкам (3.22), можно для произвольных $z,z'\in G_0$, $\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}$ и $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ проверить неравенства

$$\|x(\cdot)-x'(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}\leqslant K\|z-z'\|,$$

в которых

$$x(\cdot):=x(\cdot,t_0,z,\alpha(v(\cdot)),v(\cdot)),\quad x'(\cdot):=x(\cdot,t_0,z',\alpha(v(\cdot)),v(\cdot)).$$

Отсюда с учетом неравенства (3.22) получим

$$|\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))-\gamma_{\mathbf{s}}(x'(\cdot),v(\cdot))|\leqslant\mu_\gamma(K\|z-z'\|)+\mu_\rho(\|z-z'\|)=2\mu_\gamma(K\|z-z'\|).$$

Из последнего неравенства следует требуемая оценка (3.24):

$$|\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z)-\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z')|\leqslant 2\mu_\gamma(K\|z-z'\|):=\mu_{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}}(\|z-z'\|),\qquad z,z'\in G_0.$$

□

Л е м м а 3.4. *Для любых* $z\in G_0$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ *множество* $\mathcal{W}(z,v(\cdot))$ *не пусто, компактно в* $C(T,\mathbb{R}^n)$, *изменяется полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра* $z\in G_0$ *и удовлетворяет соотношениям*

$$\max_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z,v(\cdot))}\gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot),v(\cdot))=\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z),\quad z\in\mathcal{W}(z)|_{t_0},\ z\in G_0,\tag{3.25}$$

$$\mathcal{W}(z,v(\cdot))|_{[t_0,\tau]}=\mathcal{W}(z,(v,v')_\tau(\cdot))|_{[t_0,\tau]}\tag{3.26}$$

для всех $\tau\in T$, $v(\cdot),v'(\cdot)\in\mathcal{V}$.

Доказательство. Множество $\mathcal{W}(z, v(\cdot))$ не пусто в силу определения: множества, стоящие под знаком пересечения в (3.1), не пусты, замкнуты в $C(T;\mathbb{R}^n)$, монотонны (в смысле операции вложения) относительно параметра ε и содержатся в одном и том же множестве $X(G_0) \in \mathbf{comp}(C(T,\mathbb{R}^n))$. Следовательно, их пресечение не пусто и компактно в $C(T;\mathbb{R}^n)$.

Соотношения (3.25) следуют из определения множества $\mathcal{W}(z, v(\cdot))$ и непрерывности функционала качества $\gamma(\cdot)$. Также на основании непрерывности функции риска $\mathbf{r}_{\text{Q}}(\cdot)$ (лемма 3.3) стандартными рассуждениями проверяется свойство полунепрерывности сверху по включению отображения

$$G_0 \ni z \mapsto \mathcal{W}(z, v(\cdot)) \in 2^{C(T;\mathbb{R}^n)}.$$

Свойство (3.26) неупреждаемости множеств $\mathcal{W}(z, v(\cdot))$ есть следствие неупреждаемости движений, порожденных квазистратегиями. □

3.2.1. Доказательство теоремы 3.1

Первая часть теоремы, в силу неравенств (2.1), следует из второй части. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить (3.16).

1. Для произвольно выбранных и зафиксированных $\varepsilon > 0$, $z_0 \in G_0$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и движения $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbf{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}^{\Delta_k}, \{v_0(\cdot)\})$ в силу определений найдется последовательность

$$(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}^{\Delta_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$$

такая, что $\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0$, $\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}) = 0$ и выполняются условия

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - x_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{3.27}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|v_0(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{3.28}$$

в которых $x_k(\cdot) := x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}^{\Delta_k}, v_k(\cdot))$.

Из условия (3.28), в силу известного утверждения о сходимости по мере измеримых функций [15, теорема I.4.18], и при необходимости переходя к подпоследовательности, получим соотношения

$$\lim_{k\to\infty} v_k(\tau) = v_0(\tau) \quad \text{при п.в.} \quad \tau \in T. \tag{3.29}$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим $u_k(\cdot) := u(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}^{\Delta_k}, v_k(\cdot))$, а также дополнительные моменты (3.5), участвующие в определениях (3.7), (3.11):

$$\tau'_{kij} := \tau'_{ki} + \frac{j(\tau_{ki} - \tau'_{ki})}{n_\varepsilon}, \quad j \in 0..n_\varepsilon, \quad i \in 1..(n_{\Delta_k} - 1), \tag{3.30}$$

где $\tau'_{ki} := \tau_{ki} - \varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta_\mathrm{k})$.

Следуя (3.8), (3.2), определим движения y-модели:

$$y_k(t) = z_{0k} + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))\,ds,$$

$$\bar{v}_k(t) := \bar{v}_{ki_t}, \quad \bar{u}_k(t) := u_{ki_t}, \qquad t \in T, \quad k \in \mathbb{N},$$

и соответствующие проекции этих движений на множества $\mathcal{W}(\cdot)$:

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(x_k(t_0),(\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}. \tag{3.31}$$

Здесь величины $\bar{v}_{ki_t}$, u_{ki_t} заданы выражениями (3.9), (3.10) для разбиения Δ_k.

Для любых $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и выбранной ε-сети $(u_j^\varepsilon)_{j \in 1..n_\varepsilon}$, введем фактор-множество $\mathcal{Q}_{tx\varepsilon}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{tx\varepsilon}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{tx\varepsilon}{\sim} v_2) \Leftrightarrow ((\forall j \in 1..n_\varepsilon) f(t, x, u_j^\varepsilon, v_1) = f(t, x, u_j^\varepsilon, v_2)).$$

Для выбранных $x_0(\cdot) \in \mathcal{X}_c(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon)$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и любого $t \in T$ обозначим через q_t^ε, q_t^u классы эквивалентности, удовлетворяющие соответственно отношениям

$$v_0(t) \in q_t^\varepsilon \in \mathcal{Q}_{tx_0(t)\varepsilon}, \quad v_0(t) \in q_t^u \in \mathcal{Q}_{tx_0(t)u}.$$

При этом для всех $t \in T$, конечно, выполнены равенства

$$q_t^\varepsilon = \bigcap_{j \in 1..n_\varepsilon} q_t^{u_j^\varepsilon}. \tag{3.32}$$

2. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in T$ оценим разницу $y_k(\tau) - x_k(\tau)$:

$$y_k(\tau) - x_k(\tau) = \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds.$$

Воспользуемся свойством липшицевости правой части уравнения (1.1) (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \int\limits_{t_0}^{\tau} \|f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\|\, ds$$

(здесь $L_f(G)$ — константа Липшица правой части $f(\cdot)$ системы (1.1) по второму аргументу в области G). Представим второй интеграл суммой двух интегралов, используя множество

$$M_\varepsilon := \bigcup_{i \in 1..(n_{\Delta_k} - 1)} [\tau'_{ki}, \tau_{ki})$$

и тождества $u_k(s) = \bar{u}_k(s)$, $s \in T \setminus M_\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$ (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f(G) \|y_k(s) - x_k(s)\| ds +$$

$$+ \int\limits_{[t_0, \tau] \setminus M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), u_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))\|\, ds.$$

Во втором интеграле воспользуемся непрерывностью правой части уравнения (1.1) по последней переменной, а в третьем — мажорантой $\varkappa(G)$ (см. (1.4)) (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \|f(s,x_k(s),u_k(s),\bar{v}_k(s)) - f(s,x_k(s),u_k(s),v_0(s))\|\,ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\,ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon). \quad (3.33)$$

Во втором интеграле воспользуемся непрерывностью правой части уравнения (1.1) по третьей переменной (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \|f(s,x_k(s),u_k^\varepsilon(s),\bar{v}_k(s)) - f(s,x_k(s),u_k^\varepsilon(s),v_0(s))\|\,ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\,ds + 2(\vartheta-t_0)\mu_u(\varepsilon) + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon) \leqslant \quad (3.34)$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v\left(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}\left(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^{u_k^\varepsilon(s)}\right)\right)\,ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\,ds + 2(\vartheta-t_0)\mu_u(\varepsilon) + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon), \quad (3.35)$$

где $u_k^\varepsilon(s) \in \operatorname{argmin}_{j\in 1..n_\varepsilon}\|u_j^\varepsilon - u_k(s)\|$; по определению ε-сети в $\mathcal{P}$, выполняется неравенство $\|u_k^\varepsilon(s)-u_k(s)\| \leqslant \varepsilon$; несложно проверить, что функции $u_k^\varepsilon(\cdot)$ можно выбрать измеримыми; $\mu_u(\cdot)$ — модуль непрерывности $f(\cdot)$ по третьему аргументу:

$$\mu_u(\delta) := \max_{\substack{|u-u'|\leqslant\delta \\ (\tau,x)\in G \\ v\in\mathcal{Q},u,u'\in\mathcal{P}}} \|f(\tau,x,u,v)-f(\tau,x,u',v)\|, \quad \lim_{\delta\to+0}\mu_u(\delta)=0$$

Используя неравенство $\lambda(M_\varepsilon)\leqslant\varepsilon(\vartheta-t_0)$ и соотношение (3.32), связывающее множества $q_s^{u_k^\varepsilon(s)}$ и q_s^ε, получим оценку

$$\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\| \leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \Psi_{1k}, \quad (3.36)$$

где

$$\Psi_{1k} := \int_T \left[\mu_v\left(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^\varepsilon)\right) + \mu_v(\|v_k(s)-v_0(s)\|)\right]ds + 2(\vartheta-t_0)[\mu_u(\varepsilon)+\varkappa(G)\varepsilon].$$

Применяя к (3.36) лемму Гронуолла [15, теорема II.4.4], окончательно получим:

$$\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\| \leqslant \Psi_{1k}\,(1+(\vartheta-t_0)L_f(G)\exp((\vartheta-t_0)L_f(G))). \quad (3.37)$$

Л е м м а 3.5. *При любом $\varepsilon \in (0,1)$ для п.в. $\tau \in T$ выполняются равенства*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar v_k(\tau)\}, q^\varepsilon_\tau) = 0. \tag{3.38}$$

Доказательство. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$ и $\tau \in [\tau_{k1}, \vartheta]$ обозначим

$$x_{k0}(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_{0k}, u_k(\cdot), v_0(\cdot)),$$

$$D_{kj}(\tau) := \frac{x_k(\tau'_{ki_\tau j}) - x_k(\tau'_{ki_\tau(j-1)})}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} = \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds.$$

Для дальнейшего заметим, что в принятых обозначениях при всех $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$, и $\tau \in T$ выполняются соотношения

$$u_k(\tau) = u^\varepsilon_j, \quad \tau \in [\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}),$$

$$\bar v_k(\tau) \in \operatorname*{argmin}_{v\in\mathcal{Q}} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \|D_{kj}(\tau) - f(\tau_{ki_\tau}, x_k(\tau_{ki_\tau}), u^\varepsilon_j, v)\|.$$

Кроме того, в силу сходимости (3.28) выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k(\cdot) - x_{k0}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0.$$

1. Оценим величину

$$\Big\|D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u^\varepsilon_j, v_k(\tau))\Big\| = \Big\|\int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_k(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_k(\tau), u^\varepsilon_j, v_k(\tau))\Big\|.$$

Прибавим и вычтем в подынтегральном выражении величины

$$\frac{f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}}, \qquad \frac{f(s, x_{k0}(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}}$$

и $f(\tau, x_{k0}(\tau), u^\varepsilon_j, v_0(\tau))$ (продолжаем оценки):

$$\leqslant \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \Big\|\frac{f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_k(s)) - f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}}\Big\| ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \Big\|\frac{f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_0(s)) - f(s, x_{k0}(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}}\Big\| ds +$$

$$+ \Big\|\int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u^\varepsilon_j, v_0(\tau))\Big\| +$$

$$+ \|f(\tau, x_{k0}(\tau), u^\varepsilon_j, v_0(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau), u^\varepsilon_j, v_k(\tau))\|.$$

Обозначим $\mu_v(\cdot)$ модуль непрерывности $f(\cdot)$ по четвертому аргументу:

$$\mu_v(\delta) := \max_{\substack{|v-v'|\leqslant\delta \\ (\tau,x)\in G \\ u\in\mathcal{P}, v,v'\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x, u, v')\|, \quad \lim_{\delta\to+0} \mu_v(\delta) = 0,$$

и воспользуемся свойствами равномерной непрерывности и липшицевости правой части системы (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ (продолжаем оценки):

$$\leqslant \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s)-v_0(s)\|)+L_f(G)\|x_k(s)-x_{k0}(s)\|}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds + \\ + \Big\| \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s,x_{k0}(s),u_j^\varepsilon,v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds - f(\tau,x_{k0}(\tau),u_j^\varepsilon,v_0(\tau))\Big\| + \\ + L_f(G)\|x_k(\tau)-x_{k0}(\tau)\| + \mu_v(\|v_k(\tau)-v_0(\tau)\|) \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s,x_{k0}(s),u_j^\varepsilon,v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds - f(\tau,x_{k0}(\tau),u_j^\varepsilon,v_0(\tau))\Big\| + \\ + \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s)-v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds + 2L_f(G)\|x_k(\cdot)-x_{k0}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} + \\ + \mu_v(\|v_k(\tau)-v_0(\tau)\|).$$

Таким образом,

$$\Big\|D_{kj}(\tau) - f(\tau,x_k(\tau),u_j^\varepsilon,v_k(\tau))\Big\| \leqslant \\ \leqslant \Big\| \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s,x_{k0}(s),u_j^\varepsilon,v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds - f(\tau,x_{k0}(\tau),u_j^\varepsilon,v_0(\tau))\Big\| + \Psi_{2kj}(\tau), \quad (3.39)$$

где

$$\Psi_{2kj}(\tau) := \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s)-v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}}ds + \\ + 2L_f(G)\|x_k(\cdot)-x_{k0}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} + \mu_v(\|v_k(\tau)-v_0(\tau)\|).$$

По определению (3.30) дополнительных моментов $\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}$ выполняются соотношения

$$\max\{|\tau'_{ki_\tau(j-1)}-\tau|, |\tau'_{ki_\tau j}-\tau|\} = \tau - \tau'_{ki_\tau(j-1)} \leqslant \varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta_\mathrm{k}) + \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}),$$
$$\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)} = \frac{\varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta_\mathrm{k})}{n_\varepsilon}, \quad \tau\in T,\ k\in\mathbb{N},\ j\in 1..n_\varepsilon,$$

из которых для всех $\tau \in T$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1..n_\varepsilon$ следуют неравенства

$$\frac{\max\{|\tau'_{ki_\tau(j-1)}-\tau|, |\tau'_{ki_\tau j}-\tau|\}}{\tau'_{ki_\tau j}-\tau'_{ki_\tau(j-1)}} \leqslant \frac{n_\varepsilon(\varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta_\mathrm{k}) + \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}))}{\varepsilon\,\mathrm{d}(\Delta_\mathrm{k})} \leqslant n_\varepsilon\left(1+\frac{3}{\varepsilon}\right) := c_\varepsilon \in [1/2, +\infty).$$

Таким образом,

$$\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j} \in I_{c_\varepsilon}(\tau), \quad \tau \in [\tau_{k1}, \vartheta],\ k \in \mathbb{N},\ j \in 1..n_\varepsilon. \tag{3.40}$$

Из этих соотношений в силу леммы 3.1 при п.в. $\tau \in T$ получим сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \Big\| \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_j^\varepsilon, v_0(s))}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \Big\| = 0. \tag{3.41}$$

Понятно, что из сходимостей (3.27) и (3.29) получим сходимость к нулю второго и третьего слагаемых в $\Psi_{2kj}(\tau)$ при п.в. $\tau \in T$ и $k \to \infty$. Оценим первое слагаемое.

В силу теоремы Егорова для произвольного $\xi > 0$ найдется измеримое подмножество $E_\xi \subset T$ такое, что $\lambda(T \setminus E_\xi) \leqslant \xi$ и на множестве E_ξ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(E_\xi, \mathbb{R}^q)} = 0. \tag{3.42}$$

Обозначим через $E'_{\xi\varepsilon}$ множество точек плотности при параметре $c := c_\varepsilon$. В силу свойств таких множеств (см. теорему 7.2, с. 87) будет выполняться неравенство $\lambda(T \setminus E'_{\xi\varepsilon}) \leqslant \xi$. Оценим первое слагаемое в $\Psi_{2kj}(\tau)$ при $\tau \in E'_{\xi\varepsilon}$ и $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\tau'_{ki_\tau(j-1)}}^{\tau'_{ki_\tau j}} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\int\limits_{[\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \cap E_\xi} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds + \int\limits_{[\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \setminus E_\xi} \frac{\mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}} ds \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \Big(\mu_v(\|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(E_\xi, \mathbb{R}^q)}) + \mu_v(\|v_k(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{C(T, \mathbb{R}^q)}) \big(1 - \frac{\lambda([\tau'_{ki_\tau(j-1)}, \tau'_{ki_\tau j}] \cap E_\xi)}{\tau'_{ki_\tau j} - \tau'_{ki_\tau(j-1)}}\big) \Big).$$

В последнем выражении первое слагаемое стремится к нулю благодаря (3.42), а второе — в силу оценок (3.40), выбора $\tau \in E'_{\xi\varepsilon}$ и определения множества $E'_{\xi\varepsilon}$. Мы показали, что для всех $\tau \in T$, за исключением множества точек сколь угодно малой меры, имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \Psi_{2kj}(\tau) = 0. \tag{3.43}$$

Отношения (3.39), (3.41), (3.43) при п.в. $\tau \in T$ ведут к равенству

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \Big\| D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_k(\tau), u_j^\varepsilon, v_k(\tau)) \Big\| = 0, \tag{3.44}$$

из которого опять в силу сходимостей (3.27), (3.29) и равномерной непрерывности правой части (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \Big\| D_{kj}(\tau) - f(\tau, x_0(\tau), u_j^\varepsilon, v_0(\tau)) \Big\| = 0 \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{3.45}$$

2. Из непрерывности функции $f(\tau, x, u, v)$ в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и равностепенной по $k \in \mathbb{N}$ непрерывной зависимости решений $x_k(\cdot)$ от $\tau \in T$ следует существование функции $\psi(\cdot)\colon (0,1) \mapsto (0, +\infty)$ вида

$$\psi(\delta) := \sup_{\substack{u\in\mathcal{P}, v\in\mathcal{Q}, k\in\mathbb{N} \\ \tau,\tau'\in T, |\tau-\tau'|\leqslant\delta}} \|f(\tau', x_k(\tau'), u, v) - f(\tau, x_k(\tau), u, v)\| \leqslant \psi(|\tau' - \tau|)$$

и такой, что $\lim_{\delta\to+0}\psi(\delta)=0$. Отсюда при любом $k\in\mathbb{N}$ и $\tau\in T$ получим неравенства

$$\begin{aligned}
&\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\|D_{kj}(\tau)-f(\tau,x_k(\tau),u_j^\varepsilon,\bar v_k(\tau))\|\leqslant\\
&\qquad\leqslant\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\|D_{kj}(\tau)-f(\tau_{ki_\tau},x_k(\tau_{ki_\tau}),u_j^\varepsilon,\bar v_k(\tau_{ki_\tau}))\|+\psi(|\tau-\tau_{ki_\tau}|)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\min_{v\in\mathcal{Q}}\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\|D_{kj}(\tau)-f(\tau_{ki_\tau},x_k(\tau_{ki_\tau}),u_j^\varepsilon,v))\|+\psi(|\tau-\tau_{ki_\tau}|)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\min_{v\in\mathcal{Q}}\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\|D_{kj}(\tau)-f(\tau,x_k(\tau),u_j^\varepsilon,v))\|+2\psi(|\tau-\tau_{ki_\tau}|)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\|D_{kj}(\tau)-f(\tau,x_k(\tau),u_j^\varepsilon,v_k(\tau))\|+2\psi(|\tau-\tau_{ki_\tau}|).
\end{aligned}\tag{3.46}$$

Первое неравенство опирается также на тождество $\bar v_k(\tau)=\bar v_k(\tau_{ki_\tau})$, $\tau\in T$, $k\in\mathbb{N}$ (см. (3.12)).

Из (3.44), (3.45), (3.46) и сходимостей (3.27), (3.29) при п.в. $\tau\in T$ следует соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\max_{j\in 1..n_\varepsilon}\Big\|f(\tau,x_0(\tau),u_j^\varepsilon,v_0(\tau))-f(\tau,x_0(\tau),u_j^\varepsilon,\bar v_k(\tau))\Big\|=0.\tag{3.47}$$

Из равенства (3.47), используя рассуждения от противного, получим искомое соотношение (3.38): пусть для момента $\tau\in T$ выполняется равенство (3.47), а (3.38) не верно. Тогда найдется подпоследовательность $(\bar v_{k_l}(\tau))_{l\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty}\bar v_{k_l}(\tau)=\bar v\notin q_\tau^\varepsilon.\tag{3.48}$$

Из непрерывности $f(\cdot)$ и (3.47) при всех $j\in 1..n_\varepsilon$ получим равенства

$$f(\tau,x_0(\tau),u_j^\varepsilon,v_0(\tau))=f(\tau,x_0(\tau),u_j^\varepsilon,\bar v),$$

из которых, в свою очередь, следуют отношения

$$\bar v\underset{\tau x_0(\tau)u_j^\varepsilon}{\sim}v_0(\tau),\qquad j\in 1..n_\varepsilon,$$

эквивалентные в совокупности (см. (3.32)) включению $\bar v\in q_\tau^\varepsilon$, что противоречит (3.48). Соотношение (3.38) установлено. $\square$

Из (3.29), (3.38) и неравенства (3.37) получим оценку

$$\lim_{k\to\infty}\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)}\leqslant\Psi_\varepsilon,\tag{3.49}$$

$$\Psi_\varepsilon:=2(\vartheta-t_0)[1+(\vartheta-t_0)L_f(G)\exp((\vartheta-t_0)L_f(G))](\mu_u(\varepsilon)+\varkappa(G)\varepsilon).$$

3. Если для движений y-модели будет также выполнено неравенство

$$\limsup_{k\to\infty}\gamma(y_k(\cdot))\leqslant\rho(z_0,v_0(\cdot))+\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0)+\Phi_\varepsilon,\qquad\lim_{\varepsilon\to+0}\Phi_\varepsilon=0,\tag{3.50}$$

то, с учетом (3.27), (3.49) и непрерывности в $C(T,\mathbb{R}^n)$ показателя качества $\gamma(\cdot)$, получим оценку

$$\gamma(x_0(\cdot))\leqslant\rho(z_0,v_0(\cdot))+\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0)+\Psi_\varepsilon+\Phi_\varepsilon.\tag{3.51}$$

Так как в оценке (3.51) элементы $v_0(\cdot)$, $x_0(\cdot)$ были выбраны произвольно, то будут выполнены и соотношения

$$\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U}_\varepsilon,\{v(\cdot)\})}}\{\gamma(x(\cdot))-\rho(z_0,v(\cdot))\}:=\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0,\mathbb{U}_\varepsilon)\leqslant\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0)+\Psi_\varepsilon+\Phi_\varepsilon,$$

которые в совокупности с неравенствами (2.1) эквивалентны искомому равенству (3.16), что завершает доказательство.

4. Проверим выполнение (3.50). Для всех $k \in \mathbb{N}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим

$$x_0^u(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot)), \quad x_k^u(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot))$$

и воспользуемся неравенством

$$\|x_k^u(\cdot) - x_0^u(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \Phi_{\varepsilon k}(1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))),$$

$$\Phi_{\varepsilon k} := \|z_{0k} - z_0\| + \int\limits_T \mu_v(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^q}(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^\varepsilon))ds + 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon),$$

из которого следует оценка

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \|x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) - x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \Phi'_\varepsilon,$$

$$\Phi'_\varepsilon := 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon)(1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))).$$

Эта оценка даст соотношение для значений оптимального результата (1.27):

$$\limsup_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mu_\gamma(\Phi'_\varepsilon) := \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \Phi_\varepsilon. \tag{3.52}$$

Здесь $\mu_\gamma(\cdot)$ — модуль непрерывности функционала γ на компакте $X(G_0)$:

$$\mu_\gamma(\delta) := \max_{\substack{x(\cdot),y(\cdot)\in X(G_0)\\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}}} |\gamma(x(\cdot)) - \gamma(y(\cdot))|.$$

5. Из определений (3.10), (3.2) управления в y-модели можно получить сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0), \bar{v}_k(\cdot))) = 0. \tag{3.53}$$

Доказательство этого равенства следует схеме рассуждений из утверждения (см. [3, лемма 96.1, с. 432]). Справедливость (3.53) (так же как и справедливость оценки [3, (96.10), с. 434]) опирается на два факта, которые имеют место в рассматриваемом случае:

— наличие оценки расхождения управляемой системы (1.1) и решения подходящего дифференциального включения при экстремальном прицеливании;

— выполнение для движений $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ дифференциальных включений

$$\dot{w}(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, w(\tau), \bar{v}_{ki}) \qquad \text{для п.в.} \;\; \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}] \tag{3.54}$$

(в силу их определения (см. (3.1), с. 42) и теоремы 7.3). Из чего следует, что любое продолжение $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ движения $w_{ki}(\cdot)$, определенного в (3.31), будет удовлетворять включению (3.54) с начальным условием $w(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki})$ (специфическая замена свойства u-стабильности множества $\mathcal{W}$).

Сформулируем упомянутую оценку расхождения в действующих обозначениях: при всех $k \in \mathbb{N}$ и $i \in 0..(k-1)$ для любого решения $w_*(\cdot) \in C([\tau_*, \tau^*], \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{w}_*(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, w_*(\tau), \bar{v}_{ki}) & \text{для п.в.} \;\; \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}], \\ w_*(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki}) \end{cases} \tag{3.55}$$

справедливы соотношения

$$\|w_*(\tau) - y_k(\tau)\|^2 \leqslant \|w_{ki}(\tau_{ki}) - y_k(\tau_{ki})\|^2(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}), \tag{3.56}$$
$$\tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}], \quad \lim_{\delta\to 0}\varphi(\delta) = 0,$$

в которых монотонную функцию $\varphi(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ и константу $\beta \geqslant 0$ можно выбрать независящими от позиций $(\tau_{ki}, w_{ki}(\tau_{ki}))$, $(\tau_{ki}, y_k(\tau_{ki}))$, изменяющихся в пределах множества G.

Вывод этой оценки повторяет вывод оценки (14.6) из [3, § 14] с заменой $v^* := v[t] := \bar{v}_{ki}$ и той разницей, что вместо неравенства (14.16), опирающегося на условие седловой точки (1.5), используется неравенство

$$\langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, \bar{u}_{ki}, \bar{v}_{ki}) \rangle \leqslant \Big\langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, u_t^{(j)}, \bar{v}_{ki}) \Big\rangle,$$
$$s_* := y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki}), \quad i \in 0..(k-1),\ k \in \mathbb{N},$$

непосредственно следующее из определения значения $\bar{u}_{ki}$ через значение $\bar{v}_{ki}$ (см. (3.10)).

Из неравенства (3.56) при любых $k \in \mathbb{N}$, $i \in 0..(n_{\Delta_k} - 1)$ и $\tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\|w_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau];\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}). \end{aligned} \tag{3.57}$$

В самом деле, в силу непустоты множества $\mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ при всех нужных значениях аргументов (лемма 3.4) и включений

$$w_{ki}(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}$$

следует (см. (3.54)) существование решения $w_*(\cdot) \in C([\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]; \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения (3.55) такого, что

$$\bar{w}_{k(i+1)}(\cdot) := (w_{ki}, w_*)_{\tau_{ki}}(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))|_{[t_0,\tau_{k(i+1)}]}. \tag{3.58}$$

Используя монотонность $\varphi(\cdot)$, включение (3.58) и неравенство (3.56), получим оценки

$$\begin{aligned} &\|w_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau];\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\bar{w}_{k(i+1)}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau];\mathbb{R}^n)} = \\ &\qquad = \max\{\|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)},\ \|w_*(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([\tau_{ki},\tau];\mathbb{R}^n)}\} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \max\{\|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}, \\ &\qquad \max_{s \in [\tau_{ki},\tau]} \|w_{ki}(\tau_{ki}) - y_k(\tau_{ki})\|^2(1 + \beta(s - \tau_{ki})) + (s - \tau_{ki})\varphi(s - \tau_{ki})\} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \max\{\|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}, \\ &\qquad \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki})\} = \\ &\qquad\qquad = \|w_{ki}(\cdot) - y_k(\cdot)\|^2_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}(1 + \beta(\tau - \tau_{ki})) + (\tau - \tau_{ki})\varphi(\tau - \tau_{ki}), \end{aligned}$$

завершающие обоснование неравенства (3.57).

Далее, повторяя рассуждения леммы 15.1 [3, с. 62], установим, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция

$$T \ni \tau \mapsto \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C}([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0), \bar{v}_k(\cdot)))$$

полунепрерывна снизу и непрерывна справа. Пользуясь этими свойствами, из неравенств (3.57) при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\tau \in T$ получим оценку

$$\begin{aligned} &\big(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C}([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0), \bar{v}_k(\cdot)))\big)^2 \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big(\big(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^n}(\{y_k(t_0)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0), \bar{v}_k(\cdot))|_{t_0})\big)^2 + (1 + (\tau - t_0))\varphi_k\Big)\exp(\beta(\tau - t_0)), \end{aligned} \tag{3.59}$$

где

$$\varphi_k := \sup_{\substack{i\in 0..(n_{\Delta_k}-1)\\ \tau\in[\tau_{ki},\tau_{k(i+1)}]}} \varphi(\tau-\tau_{ki}), \qquad k\in\mathbb{N}.$$

По построению $\lim_{k\to\infty}\varphi_k = 0$. Учитывая, что

$$y_k(t_0) = x_k(t_0) = \mathcal{W}(x_k(t_0),\bar v_k(\cdot))|_{t_0},$$

из неравенств (3.59) при $\tau=\vartheta$ получим соотношения

$$\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T,\mathbb{R}^n)}}(\{y_k(\cdot)\},\mathcal{W}(x_k(t_0),\bar v_k(\cdot))) \leqslant \sqrt{(1+(\vartheta-t_0))\varphi_k\exp(\beta(\vartheta-t_0))},$$

дающие искомую сходимость (3.53).

6. Справедливы соотношения

$$\lim_{k\to+\infty}\gamma_{\mathbf{s}}(y_k(\cdot),\bar v_k(\cdot)) \leqslant \lim_{k\to+\infty}\max_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z_{0k},\bar v_k(\cdot))}\gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot),\bar v_k(\cdot)) \leqslant \lim_{k\to+\infty}\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_{0k}) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0), \quad (3.60)$$

из которых с учетом (3.52) получим искомое неравенство (3.50). В (3.60) первое неравенство следует из (3.53) и непрерывности $\gamma(\cdot)$, второе неравенство — из определения множеств $\mathcal{W}(z_{0k},\bar v_k(\cdot))$, последнее равенство — из непрерывности функции $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(\cdot)$.

4. Программные итерации функции сожаления

Как уже отмечалось, построение стратегий $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ включает в себя неконструктивный элемент — пучки движений, порожденные риск-оптимальными квазистратегиями.

В этом пункте приводится конструкция функции оптимального риска, дающая перспективу построения эффективных численных реализаций риск-оптимальных стратегий [25]. Построение основывается на идеях метода программных итераций, развитого в работах А. Г. Ченцова, С. В. Чистякова, Л. А. Петросяна, В. И. Ухоботова, А. А. Меликяна, Ф. Ф. Никитина [18, 26–37].

4.1. Определения, начальные свойства

Обозначим $\mathbf{CV}^*_t$, $t\in T$, множество всех непрерывных функционалов, определенных на прямом произведении множеств $X(G_0)|_{[t_0,t]}\times\mathcal{V}|_{[t_0,t]}\subset C([t_0,t],\mathbb{R}^n)\times L_2([t_0,t],\mathbb{R}^q)$ с топологией, индуцированной топологией произведения объемлющих пространств, и определим $\mathbf{CV}^*_T := \prod\limits_{t\in T}\mathbf{CV}^*_t$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{\Gamma}$ (программной итерации, см. [18, 31]), преобразующий всякое семейство $(\Psi_t)_{t\in T}\in\mathbf{CV}^*_T$ в семейство функционалов $(\mathbf{\Gamma}(\Psi_t))_{t\in T}\in\mathbf{CV}^*_T$ вида

$$\mathbf{\Gamma}(\Psi_t)(x(\cdot),v(\cdot)) := \sup_{\substack{\tau\in[t,\vartheta]\\ v'(\cdot)\in\mathcal{V}}}\ \inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \Psi_\tau((x,x')_t(\cdot),(v,v')_t(\cdot)); \qquad (4.1)$$

здесь $X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))$ — множество движений системы, порожденное из начального состояния $(t,x(t))\in G$ всевозможными реализациями управления при программной помехе $v'(\cdot)$ (см. (1.6), с. 9).

Отметим следующие свойства оператора $\mathbf{\Gamma}$ вытекающие непосредственно из его определения:

— для любых $(\Psi_t)_{t\in T}\in\mathbf{CV}^*_T$, $t\in T$, $(x(\cdot),v(\cdot))\in X(G_0)|_{[t_0,t]}\times\mathcal{V}|_{[t_0,t]}$ выполняются неравенства

$$\mathbf{\Gamma}(\Psi_t)(x(\cdot),v(\cdot)) \geqslant \Psi_t(x(\cdot),v(\cdot)); \qquad (4.2)$$

— если семейство $(\Psi_t)_{t\in T} \in \mathbf{CV}_T^*$ равностепенно по $t \in T$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ равномерно непрерывно по $x(\cdot) \in X(G_0)$, то семейство $(\mathbf{\Gamma}(\Psi_t))_{t\in T}$ обладает тем же свойством: равностепенной по $t \in T$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ равномерной непрерывности по $x(\cdot) \in X(G_0)$.

Введем в рассмотрение семейство функционалов $(\varepsilon_t^0)_{t\in T} \in \mathbf{CV}_T^*$ (программных максиминов): для произвольных $t \in T$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(G_0)$ положим

$$\varepsilon_t^0(x(\cdot), v(\cdot)) := \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \inf_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x,x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)). \tag{4.3}$$

При произвольных $t \in T$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ из определения получим:

$$\varepsilon_t^0(x(\cdot), v(\cdot)) \geqslant 0, \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_{t_0}^0(x(\cdot), v(\cdot)) = \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \{ \inf_{x'(\cdot)\in X(x(t_0),\mathcal{U},v'(\cdot))} \gamma(x'(\cdot)) - \rho(x(t_0), v'(\cdot))\} = \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} 0 = 0, \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_\vartheta^0(x(\cdot), v(\cdot)) = \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \inf_{x'(\cdot)\in X(\vartheta,x(\vartheta),\mathcal{U},v'(\cdot))} \gamma_{\mathbf{s}}((x,x')_\vartheta(\cdot), (v,v')_\vartheta(\cdot)) = \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{4.6}$$

Определим итерации оператора $\mathbf{\Gamma}$ на семействе $(\varepsilon_t^0)_{t\in T}$:

$$\varepsilon_t^k(\cdot) := \mathbf{\Gamma}(\varepsilon_t^{k-1}(\cdot)), \qquad t \in T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При этом для всех $t \in T$, $k \in \mathbb{N}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $z_0 \in G_0$, $x(\cdot) \in X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ из (4.2), (4.4)–(4.6) получим соотношения

$$\varepsilon_t^k(x(\cdot), v(\cdot)) \geqslant 0, \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_\vartheta^k(x(\cdot), v(\cdot)) = \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{4.8}$$

$$\varepsilon_t^{k-1}(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_t^k(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{4.9}$$

Кроме того, верны оценки

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_t^0(x(\cdot), v(\cdot))| &:= \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \inf_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \{\gamma((x,x')_t(\cdot)) - \rho(x(t_0), (v,v')_t(\cdot))\} = \\
&= \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \left\{ \inf_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \gamma((x,x')_t(\cdot)) - \inf_{\substack{x''(\cdot)\in \\ X(t_0,x(t_0),\mathcal{U},(v,v')_t(\cdot))}} \gamma(x''(\cdot)) \right\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \sup_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \gamma((x,x')_t(\cdot)) - \inf_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \inf_{\substack{x''(\cdot)\in \\ X(t_0,x(t_0),\mathcal{U},(v,v')_t(\cdot))}} \gamma(x''(\cdot)) \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{z_0\in G_0, v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X(t_0,z_0,\mathcal{U},v(\cdot))}} \gamma(x(\cdot)) - \inf_{\substack{z_0\in G_0, v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ y(\cdot)\in X(t_0,z_0,\mathcal{U},v(\cdot))}} \gamma(y(\cdot)) = \\
&= \max_{x(\cdot)\in X(G_0)} \gamma(x(\cdot)) - \min_{y(\cdot)\in X(G_0)} \gamma(y(\cdot)),
\end{aligned}$$

из которых следуют неравенства

$$|\varepsilon_t^k(x(\cdot), v(\cdot))| \leqslant \max_{x(\cdot)\in X(G_0)} \gamma(x(\cdot)) - \min_{y(\cdot)\in X(G_0)} \gamma(y(\cdot)) < +\infty. \tag{4.10}$$

В силу (4.9), (4.10) при всех $t \in T$, $x(\cdot) \in X(G_0)$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ корректны следующие определения

$$\varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) := \lim_{k\to\infty} \varepsilon_t^k(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{4.11}$$

Для введенного таким образом функционала $\varepsilon_t(\cdot)$ из (4.8) при любых $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, $x'(\cdot) \in X(G_0)$ таких, что $x(t_0) = x'(t_0)$, выполнены соотношения

$$\varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) \geqslant 0, \tag{4.12}$$

$$\varepsilon_\vartheta(x(\cdot), v(\cdot)) = \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)) = \varepsilon_{t_0}(x'(\cdot), v'(\cdot)). \tag{4.14}$$

Иными словами, значение $\varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))$ функционала $\varepsilon_{t_0}(\cdot)$ полностью определяется вектором $x(t_0)$. Заметим также, что неравенства (4.4), (4.7), (4.12) суть следствия включения $x(\cdot) \in X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ и, вообще говоря, не выполняются при произвольном $x(\cdot) \in X(G_0)$.

В дальнейших построениях множества уровня функции

$$\varepsilon_t(\cdot, v(\cdot)) : C(T, \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$$

будут использоваться в качестве «целевых множеств» в конструкции риск-оптимальной стратегии: для всех $t \in T$, $z \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $\mathcal{W}_t(z, v(\cdot))$ следующие подмножества из $X(G_0)$:

$$\mathcal{W}_t(z, v(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X(z, \mathcal{U}, v(\cdot)) \mid \varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))\}. \tag{4.15}$$

Л е м м а 4.1. *Для любых $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $z_0 \in G_0$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы следующие соотношения:*

$$\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot)) \neq \varnothing, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot)) \in \mathbf{comp}(C(T, \mathbb{R}^n)), \tag{4.17}$$

$$\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot))|_{[t_0, t']} = \mathcal{W}_t(z_0, (v, v')_{t'}(\cdot))|_{[t_0, t']}, \tag{4.18}$$

$$\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot))|_{[t_0, t]} \subset \mathcal{W}_{t'}(z_0, v(\cdot))|_{[t_0, t]}. \tag{4.19}$$

Доказательство. Обратимся к свойству компактности и для этого установим непрерывность функционалов $C(T, \mathbb{R}^n) \ni x(\cdot) \mapsto \varepsilon_t^k(x(\cdot), v(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Из неравенств (3.22) и (3.23) следует, что для всех $x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0)$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &|\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) - \gamma_{\mathbf{s}}(x'(\cdot), v'(\cdot))| \leqslant \\ &\leqslant \mu_\gamma(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)}) + \mu_\rho(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)} + \int_T \mu_v(\|v(s) - v'(s)\|)ds) := \\ &:= \mu_{\gamma_{\mathbf{s}}}(\|x(\cdot) - x'(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)} + \int_T \mu_v(\|v(s) - v'(s)\|)ds). \end{aligned} \tag{4.20}$$

И, таким образом, функционал $C(T, \mathbb{R}^n) \ni x(\cdot) \mapsto \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \in \mathbb{R}$ равностепенно по $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ равномерно непрерывен по $x(\cdot) \in X(G_0)$. Используя лемму Гронуолла, можно получить оценку

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T,\mathbb{R}^n)}}(X_1, X_2) \leqslant \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{C([t_0,t],\mathbb{R}^n)}(1 + L_f(G)(\vartheta - t)\exp(L_f(G)(\vartheta - t))) \leqslant \\ &\leqslant \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)}(1 + L_f(G)(\vartheta - t_0)\exp(L_f(G)(\vartheta - t_0))) := K\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{4.21}$$

хаусдорфова расстояния в $C(T, \mathbb{R}^n)$ между двумя пучками движений

$$\begin{gathered} X_1 := \{(x_1, x')_t(\cdot) \mid x'(\cdot) \in X(t, x_1(t), \mathcal{U}, v(\cdot))\}, \\ X_2 := \{(x_2, x')_t(\cdot) \mid x'(\cdot) \in X(t, x_2(t), \mathcal{U}, v(\cdot))\}, \\ x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in X(G_0), \quad t \in T, \quad v(\cdot) \in \mathcal{V}. \end{gathered}$$

Как обычно, под хаусдорфовым расстоянием понимается максимум из двух отклонений:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C}(\mathrm{T},\mathbb{R}^n)}(X_1,X_2):=\max\left\{\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C}(\mathrm{T},\mathbb{R}^n)}(X_1,X_2),\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C}(\mathrm{T},\mathbb{R}^n)}(X_2,X_1)\right\}.$$

Из (4.20) и (4.21) индукцией по $k\in\mathbb{N}$ получим оценку

$$|\varepsilon^k_t(x(\cdot),v(\cdot))-\varepsilon^k_t(x'(\cdot),v(\cdot))|\leqslant\mu_{\gamma_{\mathbf{s}}}(K^{k+1}\|x(\cdot)-x'(\cdot)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)}),\tag{4.22}$$

справедливую для всех $t\in T$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$. Из определения функционала (см. (4.11), с. 58)

$$C(T,\mathbb{R}^n)\ni x(\cdot)\mapsto\varepsilon_t(x(\cdot),v(\cdot))\in\mathbb{R}$$

несложно получить равенство

$$\mathcal{W}_t(z_0,v(\cdot))=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{W}^k_t(z_0,v(\cdot)),\tag{4.23}$$

где множества $\mathcal{W}^k_t(z_0,v(\cdot))$ при всех $k\in\mathbb{N}$, $t\in T$, $z\in G_0$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ заданы выражениями

$$\mathcal{W}^k_t(z,v(\cdot)):=\left\{x(\cdot)\in X(z,\mathcal{U},v(\cdot))\mid\varepsilon^k_t(x(\cdot),v(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot))\right\}.$$

В силу неравенств (4.9) и непрерывности функционалов $\varepsilon^k_t(x(\cdot),v(\cdot))$ по первому аргументу эти множества удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{W}^k_t(z,v(\cdot))\subseteq\mathcal{W}^{k-1}_t(z,v(\cdot)),\quad\mathcal{W}^k_t(z,v(\cdot))\in\mathbf{comp}(C(T,\mathbb{R}^n)),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Из приведенных соотношений и представления (4.23) следует замкнутость в $C(T,\mathbb{R}^n)$ множества $\mathcal{W}_t(z_0,v(\cdot))$ и, следовательно, его компактность.

2. Для доказательства (4.19) выберем произвольные $z_0\in G_0$, $x(\cdot)\in\mathcal{W}_t(z_0,v(\cdot))$, $t'\geqslant t$ и определим последовательность $(w_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ из множества $X(t,x(t),\mathcal{U},v(\cdot))$ следующим образом:

$$w_k(\cdot)\in\operatorname*{argmin}_{\substack{x'(\cdot)\in\\X(t,x(t),\mathcal{U},v(\cdot))}}\varepsilon^k_{t'}((x,x')_t(\cdot),v(\cdot)).$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности и не изменяя обозначений, будем считать последовательность $w_k(\cdot)$ сходящейся в $C([t,t'],\mathbb{R}^n)$ к некоторому элементу $w_0(\cdot)\in X(t,x(t),\mathcal{U},v(\cdot))$. В силу определений оператора $\mathbf{\Gamma}$ и множеств $\mathcal{W}_t(z_0,v(\cdot))$ для всех $k\in\mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^k_{t'}((x,w_k)_t(\cdot),v(\cdot))=&\min_{\substack{x'(\cdot)\in\\X(t,x(t),\mathcal{U},v(\cdot))}}\varepsilon^k_{t'}((x,x')_t(\cdot),v(\cdot))\leqslant\\&\leqslant\sup_{\substack{\tau\in[t,\vartheta]\\v'(\cdot)\in\mathcal{V}}}\min_{\substack{x'(\cdot)\in\\X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\varepsilon^k_{\tau}((x,x')_t(\cdot),(v,v')_t(\cdot))=\\&=\varepsilon^{k+1}_t(x(\cdot),v(\cdot))\leqslant\varepsilon_t(x(\cdot),v(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot)).\end{aligned}$$

Из этих соотношений и неравенств (4.9) для любого $k,i\in\mathbb{N}$ таких, что $i\geqslant k$, следуют неравенства

$$\varepsilon^k_{t'}((x,w_i)_t(\cdot),v(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot)).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $i\to\infty$ и пользуясь непрерывностью функционалов $\varepsilon^k_t(x(\cdot),v(\cdot))$, получим

$$\varepsilon^k_{t'}((x,w_0)_t(\cdot),v(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot)),\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $k \to \infty$, с учетом определения (4.11) получим неравенство

$$\varepsilon_{t'}((x, w_0)_t(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{4.24}$$

эквивалентное включению $(x, w_0)_t(\cdot) \in \mathcal{W}_{t'}(z_0, v(\cdot))$. Последнее соотношение влечет искомое включение (4.19).

3. Из (4.24) при $t = t_0$ получим соотношения, обосновывающие (4.16):

$$\varepsilon_{t'}(w_0(\cdot), v(\cdot)) = \varepsilon_{t'}((x, w_0)_{t_0}(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))$$

и, следовательно, $w_0(\cdot) \in \mathcal{W}_{t'}(z_0, v(\cdot))$.

4. Для проверки (4.18) заметим, что ограничения $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ в определении $\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot))$ (см. (4.15), с. 59) при всех $t' \in T$ удовлетворяют условию

$$X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))|_{[t_0,t']} = X(z_0, \mathcal{U}, (v, v')_{t'}(\cdot))|_{[t_0,t']}, \quad v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}. \tag{4.25}$$

Далее, для любого семейства $(\Psi_t)_{t \in T} \in \mathbf{CV}^*_T$ при произвольных $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0)$, $x(t') = x'(t')$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Gamma}(\Psi_t)((x, x')_{t'}(\cdot), (v, v')_{t'}(\cdot)) = \\
&\quad = \sup_{\substack{\tau \in [t,\vartheta] \\ v''(\cdot) \in \mathcal{V}}} \inf_{\substack{x''(\cdot) \in \\ X(t,(x,x')_{t'}(t),\mathcal{U},v''(\cdot))}} \Psi_\tau(((x, x')_{t'}, x'')_t(\cdot), ((v, v')_{t'}, v'')_t(\cdot)) = \\
&\qquad = \sup_{\substack{\tau \in [t,\vartheta] \\ v''(\cdot) \in \mathcal{V}}} \inf_{\substack{x''(\cdot) \in \\ X(t,x(t),\mathcal{U},v''(\cdot))}} \Psi_\tau((x, x'')_t(\cdot), (v, v'')_t(\cdot)) = \mathbf{\Gamma}(\Psi_t)(x(\cdot), v(\cdot)).
\end{aligned}$$

Применительно к программным итерациям функционала сожаления приведенные тождества при всех $k \in \mathbb{N}$, $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0)$, $x(t') = x'(t')$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ дают равенства

$$\varepsilon^k_t(x(\cdot), v(\cdot)) = \varepsilon^k_t((x, x')_{t'}(\cdot), (v, v')_{t'}(\cdot)),$$

из которых при $k \to \infty$ получим

$$\varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) = \varepsilon_t((x, x')_{t'}(\cdot), (v, v')_{t'}(\cdot)). \tag{4.26}$$

И так как

$$X(G_0) = \{(x, x')_{t'}(\cdot) \mid x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0), x'(t') = x(t')\},$$

из равенств (4.26), (4.25) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_t(z_0, (v, v')_{t'}(\cdot))|_{[t_0,t']} &= \big(X(z_0, \mathcal{U}, (v, v')_{t'}(\cdot)) \cap \\
&\cap \big\{(x, x')_{t'}(\cdot) \mid x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0), x(t') = x'(t'), \\
&\varepsilon_t((x, x')_{t'}(\cdot), (v, v')_{t'}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}((x, x')_{t'}(\cdot), (v, v')_{t'}(\cdot))\big\}\big)|_{[t_0,t']} = \\
&= \big(X(z_0, \mathcal{U}, (v, v')_{t'}(\cdot)) \cap \\
&\cap \big\{(x, x')_{t'}(\cdot) \mid x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0), x(t') = x'(t'), \varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))\big\}\big)|_{[t_0,t']} = \\
&= X(z_0, \mathcal{U}, (v, v')_{t'}(\cdot))|_{[t_0,t']} \cap \\
&\cap \big\{x(\cdot) \in X(G_0) \mid \varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))\big\}|_{[t_0,t']} \\
&= X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))|_{[t_0,t']} \cap \\
&\big\{x(\cdot) \in X(G_0) \mid \varepsilon_t(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))\big\}|_{[t_0,t']} = \mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t']},
\end{aligned}$$

завершающие обоснование равенства (4.18). □

4.2. Представление оптимального риска в форме предела программных итераций

Т е о р е м а 4.1. *Для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ справедливы равенства*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{4.27}$$

Доказательство. Для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ проверим неравенство

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \geqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{4.28}$$

С этой целью вначале, используя индукцию по $k \in \mathbb{N}$, установим для любой квазистратегии $\alpha(\cdot)$ и любых $k \in \mathbb{N}$, $t \in T$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ следующие неравенства:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) := \sup_{v' \in \mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha v'}(\cdot), v'(\cdot)) \geqslant \varepsilon_t^k(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)), \tag{4.29}$$

где $x_{\alpha v}(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot))$.

В самом деле, для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы неравенства

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \geqslant \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha(v,v')_t}(t), \mathcal{U}, (v,v')_t(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha(v,v')_t}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) =$$
$$= \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)).$$

Следовательно, переходя в левой части этих неравенств к верхней грани по $v, v' \in \mathcal{V}$, а в правой части — по $v' \in \mathcal{V}$, для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ получим неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) = \sup_{v, v' \in \mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{v' \in \mathcal{V}} \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) = \varepsilon_t^0(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)),$$

составляющие базу индукции.

Шаг индукции: пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ при произвольных $\tau \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполнены неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \geqslant \varepsilon_\tau^k(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)).$$

Тогда для любых $t \in T$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \geqslant \varepsilon_\tau^k(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha(v,v')_t}(t), \mathcal{U}, (v,v')_t(\cdot))}} \varepsilon_\tau^k((x_{\alpha(v,v')_t}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) =$$
$$= \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \varepsilon_\tau^k((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)).$$

Переходя в правой части этих неравенств к верхней грани по $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $\tau \in [t, \vartheta]$, в силу определений оператора $\mathbf{\Gamma}$ и функционала $\varepsilon_\tau^{k+1}(\cdot)$ получим неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \geqslant \varepsilon_t^{k+1}(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)),$$

справедливые для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Таким образом, обоснован шаг индукции.

Ввиду соотношений (4.9), (4.11) из неравенств (4.29) при $t = t_0$ следует искомое неравенство (4.28).

Для обоснования обратного неравенства (и для избежания многочисленных технических деталей) еще раз обратимся к классу $\tilde{\mathbf{Q}}$ многозначных квазистратегий

$$\alpha : \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}}$$

на пространстве обобщенных управлений (см. [18; 4, гл. IV]).

Рассмотрим многозначное отображение $\alpha_0 : \mathcal{V} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}}$ вида

$$\alpha_0(v(\cdot)) := \{\eta \in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\} \mid \varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \in \mathcal{W}_T(z, v(\cdot))\},$$

где $\{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\}$ — множество всех допустимых программных управлений, согласованных на интервале $[t_0, \vartheta]$ с сосредоточенной помехой $v(\cdot)$ (см. [4, гл. IV, § 2, с. 162]), и для всех $z \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ множества $\mathcal{W}_T(z, v(\cdot)) \subset X(G_0)$ заданы выражением

$$\mathcal{W}_T(z, v(\cdot)) := \bigcap_{t \in T} \mathcal{W}_t(z, v(\cdot)).$$

Отметим, что при всех $z \in G_0$, $t \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ множества $\mathcal{W}_T(z, v(\cdot))$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{W}_T(z, v(\cdot)) \neq \varnothing, \tag{4.30}$$

$$\mathcal{W}_T(z, v(\cdot)) \in \mathbf{comp}(C(T, \mathbb{R}^n)), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{W}_T(z, v(\cdot))|_{[t_0,t]} = \mathcal{W}_T(z, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]}. \tag{4.32}$$

Свойства (4.30), (4.31) следуют из непустоты, замкнутости и центрированности семейства множеств $(\mathcal{W}_t(z, v(\cdot)))|_{t \in T}$ (центрированность устанавливается индуктивно на основании непустоты и свойства (4.19)). Проверим (4.32): пусть $z \in G_0$, $t \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, тогда, пользуясь (4.19) и (4.18) и определением $\mathcal{W}_\tau(z, v(\cdot))$, получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_T(z, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]} &:= \left(\bigcap_{\tau \in T} \mathcal{W}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\right)\Bigg|_{[t_0,t]} = \\
&= \bigcap_{\tau \in T} \big(\mathcal{W}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \bigcap_{\tau \in [t_0,t]} \big(\mathcal{W}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \\
&= \bigcap_{\tau \in [t_0,t]} \big(\mathcal{W}_\tau(z, v(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \bigcap_{\tau \in T} \big(\mathcal{W}_\tau(z, v(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \\
&= \left(\bigcap_{\tau \in T} \mathcal{W}_\tau(z, v(\cdot))\right)\Bigg|_{[t_0,t]} := \mathcal{W}_T(z, v(\cdot))|_{[t_0,t]}.
\end{aligned}$$

Указанные свойства (4.30)–(4.32) множеств $\mathcal{W}_T(z, v(\cdot))$ позволяют проверить, что многозначное отображение α_0 принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}$ многозначных квазистратегий. И следовательно, для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, с учетом (4.13), выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_0) &:= \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ \eta \in \alpha_0(v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta), v(\cdot)) \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in \mathcal{W}_T(z, v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in \mathcal{W}_\vartheta(z, v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)).
\end{aligned}$$

Вновь пользуясь равенством (2.2), получим искомое неравенство:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)).$$

$\square$

5. Конструктивные варианты риск-оптимальных стратегий

Две существенные трудности при численной реализации риск-оптимальной стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ составляют, во-первых, быстрый рост размерности задачи (3.9) восстановления помехи при уменьшении параметра ε и, во-вторых, вычисление проекций y-модели на целевые множества, или, иными словами, построение множеств уровня оптимального риска (напомним, что пока, кроме дескриптивного определения этих множеств, мы располагаем лишь потенциально бесконечной итерационной процедурой их приближения).

5.1. Определение стратегии $\mathbb{U}_{\mathbf{SL}}$

Наметим пути преодоления первой из отмеченных трудностей, приведя условия на управляемую систему и соответствующие конструкции риск-оптимальных стратегий при L_{p}-компактных ограничениях на помеху. Также приведем примеры семейств управляемых систем и отдельных систем, удовлетворяющих этим условиям.

Конструкция стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ похожа на конструкцию стратегий $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$. Отличие состоит в том, что при вводимых далее дополнительных условиях на систему (1.1) в качестве «тестового» управления подходит любое допустимое значение $u \in \mathcal{P}$ управляющего воздействия. Поэтому в качестве такого значения берется управление на предыдущем шаге разбиения. В остальном схема та же: стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ при построении управления симулирует движение вспомогательной управляемой системы — y-модели. Для формировании движения y-модели на очередном интервале разбиения по наблюдениям за движением управляемой системы выбирается (восстанавливается) помеха, близкая в подходящем смысле к помехе в исходной системе. Управление в y-модели определяется как контруправление, экстремальное к множеству оптимальных траекторий системы при этой восстановленной помехе. Выбранное таким образом управление затем используется в «реальной» управляемой системе (1.1) на следующем интервале разбиения. При измельчении шага разбиения движения y-модели будут сходиться в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к риск-оптимальным движениям, порожденным квазистратегиями, а движения исходной системы — к соответствующим движениям y-модели. Эти сходимости обеспечивают оптимальное значение критерия Ниханса–Сэвиджа и, как следствие, оптимальность по риску стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$.

Перейдем к формальному определению стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$.

Начнем с определения «целевого множества» и проекции движения y-модели на это множество. Вместо множеств $\mathcal{W}(x(t_0), \bar{v}(\cdot))$ теперь используются множества $\mathcal{W}_\tau(\cdot)$ (см. (4.15), с. 59) и проекции на них движений y-модели: для всех $\tau \in T$, $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$, $y(\cdot) \in C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot) \in \mathcal{W}_\tau(y(t_0), \bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))|_{[t_0,\tau]}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \tag{5.1}$$

В дальнейшем построении используются множества

$$\nu(u, x(\cdot), \tau, \tau') := \operatorname*{argmin}_{v \in \mathcal{Q}} \left\| \frac{x(\tau') - x(\tau)}{\tau' - \tau} - f(\tau, x(\tau), u, v) \right\|, \tag{5.2}$$

заданные для произвольных $u \in \mathcal{P}$, $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, $x(\cdot) \in C(T;\mathbb{R}^n)$.

Кроме того, для произвольного разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta} \in \Delta_T$ определим его подмножество $\Delta' := \{\tau'_i := \tau_{i'(i)} \mid i \in 1..n_{\Delta'}\} \in \Delta_T$, также являющееся разбиением интервала управления T:

$$i'(i) := \min\{k \in 0..n_\Delta \mid \tau_k \geqslant i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'}\}, \quad i \in 0..n_{\Delta'},$$
$$n_{\Delta'} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n^2\,\mathrm{D}(\Delta) \geqslant 1\}.$$

Разбиение $\Delta' \subset \Delta$ удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{D}(\Delta') \leqslant \sqrt{\mathrm{D}(\Delta)}(\vartheta - t_0) + \mathrm{D}(\Delta) \tag{5.3}$$

и является «почти равномерным» — сумма отклонений его моментов от ближайших моментов равномерного разбиения $\{t_0 + i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'} \mid i \in 0..n_{\Delta'}\}$ оценивается величиной $\mathrm{D}(\Delta)$:

$$\sum_{i\in 0..n_{\Delta'}} |\tau_i^{\Delta'} - i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'}| \leqslant (n_{\Delta'} + 1)\,\mathrm{D}(\Delta) \leqslant \sqrt{\mathrm{D}(\Delta)} + 2\,\mathrm{D}(\Delta). \tag{5.4}$$

Определим обратную связь $\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}} = (\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i}(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta - 1)}$ на произвольном разбиении $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ следующим образом: вначале индуктивно определим значения элементов $\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(i)}$ для всех моментов τ'_i, $i \in 0..(n_{\Delta'} - 1)$, разбиения Δ' — формально это соответствует определению обратной связи с полной памятью $\mathbf{U}^{\Delta'}_{\mathrm{SL}}$ на разбиении Δ'. После этого распространим значения обратной связи $\mathbf{U}^{\Delta'}_{\mathrm{SL}}$ на все элементы обратной связи $\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}}$.

Перейдем к определению обратной связи $\mathbf{U}^{\Delta'}_{\mathrm{SL}}$ на разбиении Δ'.

База индукции: зафиксируем некоторые $u_* \in \mathcal{P}$, $v_* \in \mathcal{Q}$ и для всех

$$x_0(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R}^n), \qquad x_{i'(1)}(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i'(1)}], \mathbb{R}^n)$$

положим (заметим, что $0 = i'(0)$)

$$\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}0}(x_0(\cdot)) := \mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(1)}(x_{i'(1)}(\cdot)) := u_*, \qquad y_0(\tau_0) = x_0(\tau_0), \qquad \bar{v}_0 := v_*.$$

Шаг индукции: если при некотором $i \in 1..(n_{\Delta'} - 2)$ значения

$$\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(k)}(x_{i'(k)}(\cdot)) \in \mathcal{P}$$

определены для всех $x_{i'(k)}(\cdot) \in C([t_0, \tau'_k], \mathbb{R}^n)$, $k \in 0..i$, а элементы $y_k(\cdot) \in C([t_0, \tau'_k], \mathbb{R}^n)$, $\bar{v}_k \in \mathcal{Q}$ — для всех $k \in 0..(i-1)$, то для любых $\tau \in [\tau'_{i-1}, \tau'_i]$, $x_{i'(i+1)}(\cdot) \in C([t_0, \tau'_{i+1}], \mathbb{R}^n)$ положим

$$\bar{v}_i \in \nu\big(\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(i)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)|_{[t_0,\tau'_i]}), x_{i'(i+1)}(\cdot), \tau'_i, \tau'_{i+1}\big), \tag{5.5}$$

$$y_i(\tau) = y_{i-1}(\tau'_{i-1}) + \int_{\tau'_{i-1}}^{\tau} f(t, y_i(t), \mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(i)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)|_{[t_0,\tau'_i]}), \bar{v}_{i-1})dt, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(i+1)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{P}} \big\langle y_i(\tau'_i) - w(\tau'_i \mid \tau'_i, y_i(\cdot), \bar{v}_{[t_0,\tau'_i]}(\cdot)), f(\tau'_i, y_i(\tau'_i), u, \bar{v}_i)\big\rangle; \tag{5.7}$$

здесь, как и раньше, $\bar{v}(\cdot)$ обозначает помеху, восстановленную в процессе управления:

$$\bar{v}(\tau) := \bar{v}_{i_\tau}, \quad \tau \in [\tau'_{i_\tau}, \tau'_{i_\tau+1}). \tag{5.8}$$

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}^{\Delta'}_{\mathrm{SL}}$ на разбиении Δ' определена. Теперь для произвольных $i \in 0..n_\Delta$, $i \notin \{i'(k) \mid k \in 0..n_\Delta\}$, $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i}(x_i(\cdot)) := \mathbf{U}^\Delta_{\mathrm{SL}i'(i_{\tau_i})}(x_i(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i'(i_{\tau_i})}]}). \tag{5.9}$$

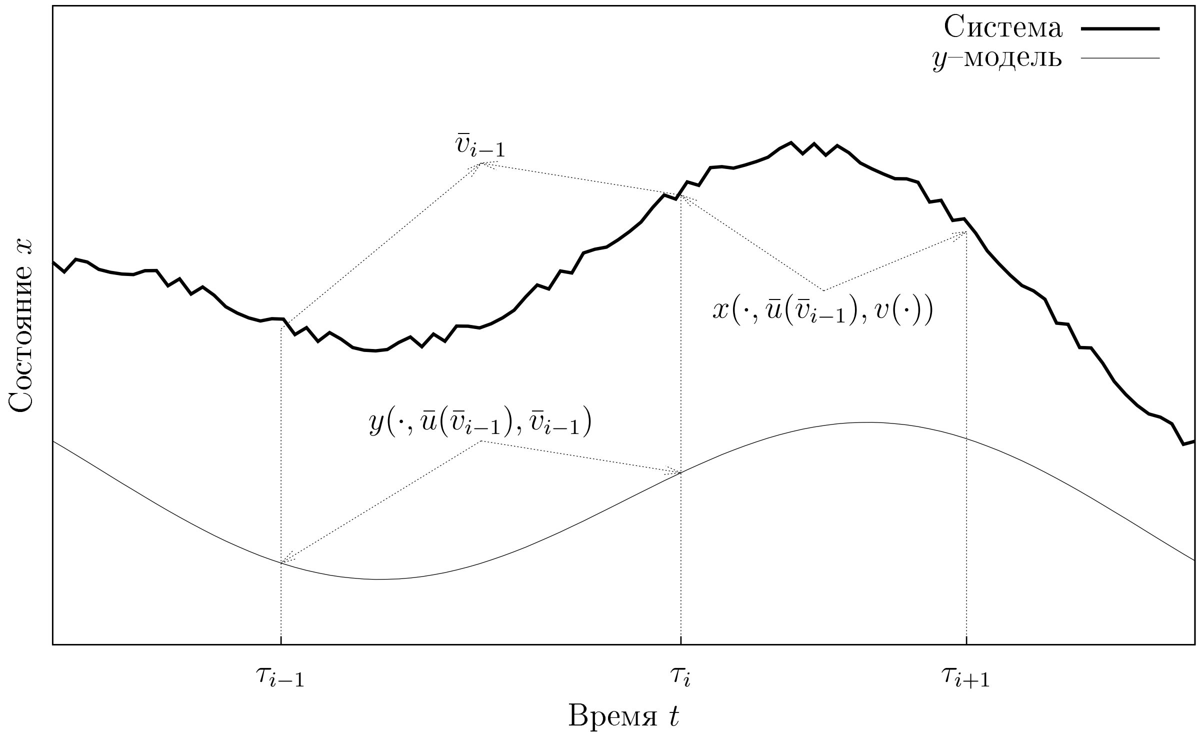

Рис. 8. Схема работы обратной связи $\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}}$

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}}$ на произвольном разбиении $\Delta \in \Delta_T$ определена. Тем самым определена и стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}} := (\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}})_{\Delta \in \Delta_T}$.

З а м е ч а н и е 9. В определении обратной связи $\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}}$, по существу, участвуют лишь моменты из разбиения Δ': элементы $\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}i}$ обратной связи $\mathbf{U}^{\Delta}_{\mathrm{SL}}$, отвечающие другим моментам разбиения Δ, не изменяют значения обратной связи.

З а м е ч а н и е 10. Определения (5.1) корректны в силу непустоты, компактности и неупреждаемости множеств $\mathcal{W}_t(z_0, v(\cdot))$ (свойства (4.16), (4.17), (4.18), см. лемму 4.1, с. 59).

Иллюстрация этой схемы управления приведена на рисунке 8.

Далее использованы обозначения (3.13), с. 44.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть фактор-множества $\mathcal{Q}_{txu}$ не зависят от u, x:*

$$\mathcal{Q}_{txu} = \mathcal{Q}_{tx'u'} := \mathbb{Q}_t \qquad \text{для всех } u, u' \in \mathcal{P},\ (t,x),(t,x') \in G. \tag{5.10}$$

Тогда для любого начального состояния $z_0 \in G_0$ стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$, заданная выражениями (4.15), (5.1), (5.5)–(5.9), *является оптимальной по риску при L_{p}-компактных ограничениях на помеху.*

З а м е ч а н и е 11. При выполнении условий теоремы ввиду равенства (3.15) стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ будет также оптимальной по риску и при программных ограничениях на помеху, и при ограничениях типа Каратеодори.

З а м е ч а н и е 12. Следующее семейство управляемых систем:

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + f_2(t, x(t), u(t)) \cdot f_3(t, v(t)), \tag{5.11}$$

где $f_2(\cdot)$ — матрица-функция размерности $n \times m$, $f_1(\cdot)$ — вектор-функция (столбец) размерности n и $f_3(\cdot)$ — вектор-функция размерности m удовлетворяет условию (5.10), если для всех $t \in T$ ядро линейного оператора $f_2(t,x,u) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от параметров x, u при их изменении в пределах $x \in G|_t$, $u \in \mathcal{P}$.

В частности, управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau)\cdot v_1(\tau), & \tau \in T := [0,2], \mathcal{P} = \mathcal{Q} := \{-1,1\}, \\ \dot{x}_2(\tau) = g(\tau)\cdot u_2(\tau)\cdot v_2(\tau), & g(t) := \max\{1,t\} - 1, x \in \mathbb{R}, \\ (x_1(0), x_2(0)) = (0,0), & u_1(\tau), u_2(\tau) \in \mathcal{P},\ v_1(\tau), v_2(\tau) \in \mathcal{Q}, \end{cases} \tag{5.12}$$

удовлетворяет условию (5.10), так как имеет вид (5.11):

$$f_1(\cdot) := 0, \quad f_2(t,x,u) := \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & (\max\{1,t\}-1)u_2 \end{pmatrix}, \quad f_3(t,v) := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

5.2. Риск-оптимальность стратегии $\mathbb{U}_{\mathbf{SL}}$

Пусть выбраны произвольные

$$z_0 \in G_0, \qquad v_0(\cdot) \in \mathcal{V}, \qquad x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{SL}}, \{v_0(\cdot)\}).$$

Для упрощения обозначений и в силу того, что значение управления изменяется только в моменты разбиения Δ', в приводимом далее доказательстве будем игнорировать моменты $\tau \in \Delta \setminus \Delta'$ и соответствующие элементы обратной связи. Нумерация и обозначения будут использоваться так, как если бы $\Delta = \Delta'$. Главное, что нам потребуется, — это стремление к нулю диаметра этих разбиений при стремлении к нулю диаметров исходных разбиений и оценка (5.4).

По определению, имеется последовательность

$$(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}_{\mathrm{SL}}^{\Delta_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U}$$

такая, что

$$\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0, \tag{5.13}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}) = 0, \tag{5.14}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - x_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.15}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|v_0(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.16}$$

Из условия (5.16), в силу известного утверждения о сходимости по мере измеримых функций [15, теорема I.4.18], и при необходимости переходя к подпоследовательности, получим соотношения

$$\lim_{k\to\infty} v_k(\tau) = v_0(\tau) \quad \text{при п.в.} \ \ \tau \in T. \tag{5.17}$$

Здесь и далее для всех $k \in \mathbb{N}$ используются обозначения

$$x_k(\cdot) := x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{SL}}^{\Delta_k}, v_k(\cdot)), \quad u_k(\cdot) := u(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{SL}}^{\Delta_k}, v_k(\cdot)). \tag{5.18}$$

Обозначим также

$$x_{ki} := x_k(\tau_{ki}), \quad u_{ki} := u_k(\tau_{ki}), \quad \tau_{ki} \in \Delta_k, \quad i \in 0..(k-1), \tag{5.19}$$

— значения этих функций в моменты разбиения Δ_k. Динамика y-модели, в соответствии с (5.6), определяется уравнениями

$$y_k(\tau) = z_{0k} + \int\limits_{t_0}^{\tau} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))\, ds, \quad \tau \in T. \tag{5.20}$$

Обозначим также

$$y_{ki} := y_k(\tau_{ki}), \quad \bar{u}_{ki} := \bar{u}_k(\tau_{ki}), \quad i \in 0..(k-1), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.21}$$

В момент $\tau_{k(i+1)}$, $i \in 0..(k-1)$, следуя (5.2), (5.5), определим значение $\bar{v}_{ki} \in \mathcal{Q}$ помехи $\bar{v}_k(\cdot)$, действующей в y-модели на интервале $[\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)})$:

$$\bar{v}_{ki} \in \nu(u_{ki}, x_k(\cdot), \tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}). \tag{5.22}$$

В соответствии с определениями (5.1), (5.7) управление $\bar{u}_{ki} \in \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям

$$\bar{u}_{ki} \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki}), f(\tau_{ki}, y_{ki}, u, \bar{v}_{ki}) \rangle, \tag{5.23}$$

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot) \in \mathcal{W}_{\tau_{ki}}(x_k(t_0), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}, \tag{5.24}$$

$$u_{k(i+1)} = \bar{u}_{ki}, \quad i \in 0..(k-1), \ k \in \mathbb{N}. \tag{5.25}$$

Л е м м а 5.1. *Пусть фактор-множества* $\mathcal{Q}_{txu}$ *не зависят от* $u \in \mathcal{P}$:

$$\mathcal{Q}_{txu} = \mathcal{Q}_{txu'} \qquad \text{для всех } u, u' \in \mathcal{P}, \ (t,x) \in G. \tag{5.26}$$

Тогда из (5.15) *следует* (5.37).

Доказательство. Оценим разницу $y_k(\tau) - x_k(\tau)$ при $\tau \in T$:

$$y_k(\tau) - x_k(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} [f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))]\, ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau} [f(s, x_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))]\, ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds. \tag{5.27}$$

Используя оценку (5.4) и равенства (5.25), нетрудно показать, что для всех $k \in \mathbb{N}$ мера множества, на котором функция

$$[t_0, \vartheta - h_k] \ni s \mapsto u_k(s + h_k) \in \mathcal{P},$$

где $h_k := (\vartheta - t_0)/k$, и функция

$$[t_0, \vartheta - h_k] \ni s \mapsto \bar{u}_k(s) \in \mathcal{P}$$

различаются, не превосходит величины

$$\sqrt{\mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k})} + 2\,\mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k}).$$

С учетом этого неравенства преобразуем третий интеграл в последней части (5.27):

$$\int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds + S_k(\tau), \quad (5.28)$$

где величины S_k при всех $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют оценкам

$$|S_k(\tau)| \leqslant \varkappa(G)\left(\sqrt{\mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k})} + 2\,\mathrm{D}(\Delta_\mathrm{k})\right), \quad \tau \in T. \quad (5.29)$$

Здесь $\varkappa(G)$ — максимум нормы правой части системы (1.1) в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ (см. (1.4), с. 8). Преобразуем второй интеграл в последнем соотношении (продолжим равенства):

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds + S_k(\tau).$$

Прибавим и вычтем в подынтегральном выражении величину

$$f(s+h_k, x_0(s+h_k), u_k(s+h_k), v_k(s))$$

(продолжим равенства):

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} f(s+h_k, x_0(s+h_k), u_k(s+h_k), v_k(s))\, ds - \int\limits_{t_0}^{\tau} f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s+h_k), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds + S_k(\tau).$$

Во втором интеграле применим подстановку $\xi := s + h_k$ (продолжаем равенства):

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0+h_k}^{\tau+h_k} f(\xi, x_0(\xi), u_k(\xi), v_k(\xi - h_k)) d\xi - \int\limits_{t_0}^{\tau} f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s+h_k), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds + S_k(\tau) =$$

(переобозначим во втором интеграле $s := \xi$ (продолжаем равенства))

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0+h_k}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s - h_k)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau+h_k} f(\xi, x_0(\xi), u_k(\xi), v_k(\xi - h_k)) d\xi + \int\limits_{t_0}^{t_0+h_k} f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s+h_k, x_0(s), u_k(s+h_k), v_k(s)) - f(s+h_k, x_0(s+h_k), u_k(s+h_k), v_k(s))]\, ds + S_k(\tau).$$

Из этих равенств получим оценки для исходного интеграла (5.28):

$$\Big\| \int\limits_{t_0}^{\tau} [f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), u_k(s), v_k(s))]\, ds \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{\tau} \| f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_0(s)) \|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} \| f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_0(s)) - f(s, x_0(s), \bar{u}_k(s), v_k(s)) \|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_v(\|v(s-h_k) - v(s)\|)\, ds + 2h_k \varkappa(G) + \int\limits_{t_0}^{\tau} \mu_t(h_k)\, ds + \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f(G) \varkappa(G) h_k\, ds + |S_k(\tau)|, \tag{5.30}$$

где $\mu_t(\cdot)$ — модуль непрерывности $f(\cdot)$ по первому аргументу:

$$\mu_t(\delta) := \max_{\substack{|\tau-\tau'|\leqslant\delta \\ (\tau,x),(\tau',x)\in G \\ u\in\mathcal{P},v\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau,x,u,v) - f(\tau',x,u,v)\|, \quad \lim_{\delta\to+0}\mu_t(\delta) = 0.$$

Первый и второй интегралы в правой части неравенства (5.30) оцениваются с помощью модуля непрерывности $\mu_v(\cdot)$ функции $f(\cdot)$ по четвертому аргументу (продолжаем оценки):

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{v_k(s)\}, q_s))\, ds + \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\, ds + \int_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_v(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)\, ds +$$
$$+ 2h_k\varkappa(G) + \int_{t_0}^{\tau} \mu_t(h_k)\, ds + \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\varkappa(G)h_k ds + |S_k(\tau)|. \quad (5.31)$$

Заметим, что частным случаем равенств (3.38) являются равенства

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar{v}_k(\tau)\}, q_\tau) = 0 \qquad \text{для п.в. } \tau\in T. \quad (5.32)$$

Из (5.32) следует, что величина первого интеграла в (5.31) сходится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$. Величина второго интеграла в (5.31) стремится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$ в силу (5.17). Величина третьего интеграла в (5.31) сходится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$ в силу свойства «равностепенной непрерывности в целом» измеримых функций из компакта V_c (см. теорему 7.1 в приложении, с. 86).

Вернемся к оценке величины $y_k(\tau)-x_k(\tau)$. Из равенств (5.27) с учетом оценки (5.31) получим

$$\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\| \leqslant \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{v_k(s)\}, q_\tau))\, ds + \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\, ds +$$
$$+ \int_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_v(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)\, ds + 2h_k\varkappa(G) + (\tau-t_0)(\mu_t(h_k) + L_f(G)\varkappa(G)h_k) +$$
$$+ |S_k(\tau)| + \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\| ds + 2\int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|x_k(s)-x_0(s)\| ds =$$
$$= \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\| ds + \Psi(\tau,k),$$

где функция

$$\Psi(\tau,k) := \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{v_k(s)\}, q_\tau))\, ds + \int_{t_0}^{\tau} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\, ds +$$
$$+ \int_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_v(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)\, ds + 2h_k\varkappa(G) + (\tau-t_0)(\mu_t(h_k) +$$
$$+ L_f(G)\varkappa(G)h_k) + |S_k(\tau)| + 2\int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|x_k(s)-x_0(s)\| ds$$

при каждом $k \in \mathbb{N}$ монотонна по τ и при всех $\tau \in T$ стремится к нулю с ростом k. Из последнего соотношения, применяя неравенство Гроноула (см. [15, теорема II.4.4]), получим оценку

$$\|y_k(\tau) - x_k(\tau)\| \leqslant \Psi(\tau, k) + \exp L_f(G)(\vartheta - t_0) \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f(G)\Psi(s, k)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant [1 + L_f(G)(\vartheta - t_0)\exp(L_f(G)(\vartheta - t_0))]\Psi(\vartheta, k)$$

при всех $\tau \in T$. Эта оценка влечет искомую сходимость (5.37). □

Л е м м а 5.2. *Для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{SL}}) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{5.33}$$

Доказательство. 1. При всех $\tau \in T$ обозначим $q_\tau \in \mathbb{Q}_\tau$ класс эквивалентности, содержащий элемент $v_0(\tau)$. В силу условия (5.10) имеем равенства

$$f(\tau, x, u, v) = f(\tau, x, u, v_0(\tau)), \qquad (\tau, x, u, v) \in G \times \mathcal{P} \times q_\tau.$$

Учитывая равенства (5.32), (5.13) и непрерывность правой части рассматриваемой системы (1.1) по $v \in \mathcal{Q}$, равномерную по всем переменным в области определения, получим сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \|x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) - x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.34}$$

Из (5.34) и определения множеств $X(z_{0k}, \mathcal{U}, \bar{v}_k(\cdot))$ (с. 9), используя теорему 7.4 (о сходимости двойных последовательностей), получим сходимость этих множеств к множеству $X(z_0, \mathcal{U}, v_0(\cdot))$ в метрике Хаусдорфа:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{D}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(X(z_{0k}, \mathcal{U}, \bar{v}_k(\cdot)), X(z_0, \mathcal{U}, v_0(\cdot))) = 0. \tag{5.35}$$

Отсюда, в силу определения функции оптимального результата (см. (1.27), с. 16) и непрерывности показателя качества, следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) = \rho(z_0, v_0(\cdot)). \tag{5.36}$$

2. Из условия (5.10) и предположения (5.15) в силу леммы 5.1 (с. 68) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.37}$$

Используя это равенство, непрерывность функционала γ и равенство (5.36), также выполненное в силу условия (5.10), получим соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_{\mathbf{s}}(y_k(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) := \lim_{k\to\infty} [\gamma(y_k(\cdot)) - \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))] =$$
$$= \gamma(x_0(\cdot)) - \rho(z_0, v_0(\cdot)) := \gamma_{\mathbf{s}}(x_0(\cdot), v_0(\cdot)). \tag{5.38}$$

3. Если для движений y-модели при любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}_\vartheta(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))) = 0, \tag{5.39}$$

то для всех $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(G_0)$, $x(t_0) = x_0(t_0)$ справедливы следующие оценки:

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma_{\mathbf{s}}(y_k(\cdot), \bar v_k(\cdot)) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \sup_{\substack{w(\cdot)\in\\ \mathcal{W}_\vartheta(z_{0k},\bar v_k(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot), \bar v_k(\cdot)) =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sup_{\substack{w(\cdot)\in X(z_{0k},\mathcal{U},\bar v_k(\cdot))\\ \gamma(w(\cdot))-\rho(z_{0k},\bar v_k(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(y_k(\cdot),\bar v_k(\cdot))}} \gamma(w(\cdot)) - \rho(z_{0k}, \bar v_k(\cdot)) =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sup_{\substack{w(\cdot)\in X(z_{0k},\mathcal{U},\bar v_k(\cdot))\\ \gamma(w(\cdot))-\rho(z_0,v_0(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(y_k(\cdot),\bar v_k(\cdot))}} \gamma(w(\cdot)) - \rho(z_0, v_0(\cdot)) =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sup_{\substack{w(\cdot)\in X(z_0,\mathcal{U},v_0(\cdot))\\ \gamma(w(\cdot))-\rho(z_0,v_0(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(y_k(\cdot),\bar v_k(\cdot))}} \gamma(w(\cdot)) - \rho(z_0, v_0(\cdot)) =$$

$$= \sup_{\substack{w(\cdot)\in X(z_0,\mathcal{U},v_0(\cdot))\\ \gamma(w(\cdot))-\rho(z_0,v_0(\cdot))\leqslant\varepsilon_{t_0}(x_0(\cdot),v_0(\cdot))}} \gamma(w(\cdot)) - \rho(z_0, v_0(\cdot)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{t_0}(x_0(\cdot), v_0(\cdot)) = \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \quad (5.40)$$

Здесь первое неравенство выполнено в силу (5.39) и непрерывности функционала $\gamma_{\mathbf{s}}$ по первой переменной (равностепенной по второй); второе соотношение (равенство) следует из определения множества $\mathcal{W}_\vartheta(z_{0k}, \bar v_k(\cdot))$ и равенства (4.13); третье соотношение (равенство) вытекает из (5.36); четвертое соотношение (равенство) вытекает из (5.35); пятое — из непрерывности в силу соотношений (4.27) и (3.24) функционала $\varepsilon_{t_0}(\cdot)$ по первой переменной; последнее — из (4.14).

Из (5.38) и (5.40) получим оценку

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x_0(\cdot), v_0(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \quad (5.41)$$

Так как неравенство (5.41) выполнено для произвольно выбранных элементов $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{SL}}, \{v_0(\cdot)\})$, то будет выполняться и искомое соотношение (5.33).

Обоснование равенства (5.39) следует обоснованию равенства (3.53). □

5.2.1. Доказательство теоремы 5.1

Из неравенства (5.33) и равенств (4.27), (3.15) получим утверждение теоремы.

5.3. Случай конечного набора «тестовых» управлений

Как отмечалось, существенной трудностью при реализации стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ является неограниченный и достаточно быстрый рост множества $(u_j^\varepsilon)_{j\in 1..n_\varepsilon}$ при уменьшении параметра ε. Это ведет к значительному росту размерности задачи минимизации при решении задачи обратной динамики (3.9). В параграфе приводится еще один случай, в котором эту трудность удается обойти.

Пусть управляемая система (1.1) имеет вид (5.11) или вид

$$\dot x(t) = g_1(t, x(t), u(t)) + h(t, x(t), v(t)) \cdot g_2(t, x(t), u(t)), \quad (5.42)$$

где $g_1(\cdot)$ — вектор-функция размерности n, $g_2(\cdot)$ — вектор-функция размерности m и $h(\cdot)$ — матрица-функция размерности $n \times m$.

И пусть некоторое конечное подмножество $\{\bar u_j \in \mathcal{P} \mid j \in 1..l\}$ и константа $\bar K \in \mathbb{R}$ удовлетворяют следующему условию:

Условие 5.1. Для любых $(\tau, x, u) \in G \times \mathcal{P}$ найдутся $(\beta_j)_{j\in 1..l} \in \mathbb{R}^l$, $\sum_{j\in 1..l} |\beta_j| \leqslant \bar K$, удовлетворяющие равенствам

$$g_2(\tau, x, u) = \sum_{j\in 1..l} \beta_j g_2(\tau, x, \bar u_j). \quad (5.43)$$

Равенства (5.43) понимаются как равенства векторов в случае системы вида (5.42) и как равенства матриц в случае системы вида (5.11).

З а м е ч а н и е 13. Из условия следует, что при любом $v \in \mathcal{Q}$ реакцию системы на управляющее воздействие $u \in \mathcal{P}$ можно вычислить, зная реакцию системы при этом v на конечный набор «тестовых» управляющих воздействий $\{\bar{u}_j \in \mathcal{P} \mid j \in 1..l\}$. И значит, для выбора аппроксимирующего значения $\bar{v}$ (см. (3.9)) достаточно этого фиксированного набора.

Определим семейство стратегий $(\bar{\mathbb{U}}_{\mathrm{S}\varepsilon})_\varepsilon$ ($\bar{\mathbb{U}}_{\mathrm{S}\varepsilon} \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$), $\bar{\mathbb{U}}_{\mathrm{S}\varepsilon} = (\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}_{\mathrm{S}\varepsilon})_{\Delta \in \Delta_T}$, где для всякого $\Delta \in \Delta_T$ обратная связь с полной памятью $\bar{\mathbf{U}}^{\Delta}_{\mathrm{S}\varepsilon}$ задана соотношениями (3.1), (3.2), (3.6)–(3.11), в которых $n_\varepsilon := l$ и $u^\varepsilon_j := \bar{u}_j$, $j \in 1..n_\varepsilon$.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть управляемая система* (1.1) *имеет вид* (5.11) *или вид* (5.42). *Тогда при выполнении условий* (3.14) *и* (5.1) *для всех* $z_0 \in G_0$ *верны равенства*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0, \bar{\mathbb{U}}_{\mathrm{S}\varepsilon}) = \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0). \tag{5.44}$$

Из построения видно, что в случае выполнения условий из теоремы 5.2 в задаче обратной динамики (3.9) фиксирован размер данных.

5.3.1. Схема доказательства теоремы 5.2

Доказательство теоремы 5.2 повторяет доказательство теоремы 3.1, за исключением пункта 2, в котором неравенства (3.33)–(3.35) преобразуются следующим образом:

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \|f(s, x_k(s), u_k(s), \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_0(s))\| \, ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s) - v_k(s)\|) \, ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon).$$

Во втором интеграле воспользуемся видом правой части и условием (5.1) (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s) - x_k(s)\| ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \Big\| \sum_{j \in 1..l} \beta_{kj}(s)[f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, \bar{v}_k(s)) - f(s, x_k(s), u^\varepsilon_j, v_0(s))] \Big\| \, ds + \\ + \int_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s) - v_k(s)\|) \, ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon).$$

Здесь функции $\beta_{kj}(\cdot) : T \mapsto \mathbb{R}$ определяются из условий

$$g_2(s, x_k(s), u_k(s)) = \sum_{j \in 1..l} \beta_{kj}(s) g_2(s, x_k(s), \bar{u}_j), \qquad k \in \mathbb{N},$$

и всегда могут быть выбраны измеримыми (продолжаем оценку):

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \sum_{j\in 1..l} |\beta_{kj}(s)| \max_{j\in 1..l} \|f(s,x_k(s),u_j^\varepsilon,\bar v_k(s)) - f(s,x_k(s),u_j^\varepsilon,v_0(s))\|\,ds +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\,ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{\tau} L_f(G)\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \bar K \int\limits_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \max_{j\in 1..l} \mu_v\left(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}\left(\{\bar v_k(s)\}, q_s^{\bar u_j^\varepsilon}\right)\right)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,\tau]\setminus M_\varepsilon} \mu_v(\|v_0(s)-v_k(s)\|)\,ds + 2\varkappa(G)\lambda(M_\varepsilon).$$

Все величины $\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}\left(\{\bar v_k(s)\}, q_s^{\bar u_j^\varepsilon}\right)$, $j\in 1..l$, мажорируются величиной $\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar v_k(s)\}, q_s^\varepsilon)$ в силу соотношений (3.32). Таким образом, для величин Ψ_{1k} из (3.36) получим выражения

$$\Psi_{1k} := \int_T \left[\bar K \mu_v\big(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar v_k(s)\}, q_s^\varepsilon)\big) + \mu_v(\|v_k(s)-v_0(s)\|)\right] ds + 2(\vartheta - t_0)\varkappa(G)\varepsilon,$$

обладающие необходимыми свойствами.

5.4. Случай регулярности программного максимина

В этом пункте исследуется случай, когда программный максимин функционала сожаления $\varepsilon^0_{t_0}(\cdot)$ совпадает с величиной минимального риска $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(\cdot)$ при L_{p}-компактных ограничениях на помеху (будем считать выполненными условия (5.10)). По аналогии с задачами оптимизации гарантии будем называть это свойство риск-регулярностью.

В силу (4.5) риск-регулярность максимина эквивалентна равенству

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0) = 0. \tag{5.45}$$

З а м е ч а н и е 14. В соответствии с определением минимального риска это означает, что для каждой начальной позиции в рассматриваемом классе стратегий $\mathbf{S}$ существует стратегия, которая гарантирует оптимальный результат $\rho(z_0, v(\cdot))$, какова бы ни была помеха $v(\cdot)\in\mathcal{V}$. То есть эта стратегия действует столь же эффективно, как если бы помеха $v(\cdot)$ была известна ей заранее. Первоначально именно это свойство было положено в определение стратегий, названных сильно оптимальными [38]. Понятно, что круг задач управления, в которых существуют такие стратегии, сравнительно узок. Тем полезнее наметить границы этого семейства задач.

З а м е ч а н и е 15. Свойство риск-регулярности задачи управления, вообще говоря, не следует из классического свойства регулярности: так, в примере (2.15)–(2.18) во всех начальных состояниях имеет место регулярный случай — цена игры совпадает с программным максимином показателя качества. Вместе с тем оптимальный риск в этой задаче не везде равняется нулю.

5.4.1. Условие риск-регулярности

Для произвольных элементов $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $z_0 \in G_0$ введем в рассмотрение множество $R(z_0, v(\cdot)) \subset C(T; \mathbb{R}^n)$ вида

$$R(z_0, v(\cdot)) := \underset{x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))}{\operatorname{argmin}} \gamma(x(\cdot)).$$

Определение корректно, так как множество $X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \subset C(T; \mathbb{R}^n)$ компактно в равномерной топологии пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$, а функционал $\gamma(\cdot)$ непрерывен в этой же топологии.

Из определений для любых $x(\cdot) \in R(z_0, v(\cdot))$, $t \in T$ следуют соотношения

$$\gamma(x(\cdot)) = \rho(z_0, v(\cdot)).$$

Условие 5.2. В начальном состоянии $z_0 \in G_0$ для произвольного момента $t \in T$ и произвольного конечного множества помех $v_j(\cdot) \in \mathcal{V}$, $j \in 1..m$, справедлива импликация

$$v_1(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = v_m(\cdot)|_{[t_0,t]} \;\Rightarrow\; \bigcap_{j \in 1..m} R(z_0, v_j(\cdot))|_{[t_0,t]} \neq \varnothing. \tag{5.46}$$

Для начального состояния $z_0 \in G_0$ и произвольной помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ определим множество $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \subset C([t_0, t]; \mathbb{R}^n)$ вида

$$\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) := \bigcap_{v'(\cdot) \in \mathcal{V}} R(z_0, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]}. \tag{5.47}$$

Лемма 5.3. *Для произвольных $z_0 \in G_0$, $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ множества $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot))$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \subseteq \mathcal{Z}_{t'}(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]}, \tag{5.48}$$

$$\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \in \mathbf{comp}(C([t_0, t]; \mathbb{R}^n)), \tag{5.49}$$

$$\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) = \mathcal{Z}_t(z_0, (v, v')_t(\cdot)), \tag{5.50}$$

$$\mathcal{Z}_\vartheta(z_0, v(\cdot)) \subset R(z_0, v(\cdot)). \tag{5.51}$$

Кроме того, если выполнено условие (5.2), *то*

$$\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \neq \varnothing. \tag{5.52}$$

Доказательство. Из определения множества $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot))$ следуют соотношения (5.48)–(5.51). Для обоснования неравенства (5.52) заметим, что в определении $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot))$ множества, стоящие под знаком пересечения, не пусты, замкнуты, содержатся в компакте $X(G_0)|_{[t_0,t]}$ и (в силу 5.46) центрированы[2]. Следовательно, их пресечение не пусто. □

Воспользуемся множествами $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot))$ как «целевыми множествами» для еще одного варианта стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$, которая будет оптимальной по риску при L_{p}-компактных помехах в риск-регулярном случае.

Определение этого варианта стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{SL}}$ (который мы обозначим как $\mathbb{U}^0_{\mathrm{SL}}$) отличается, как уже сказано, только описанием «целевых множеств», которые теперь имеют вид (5.47) и проекцией на них движений y-модели: для всех $\tau \in T$, $y(\cdot) \in C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$, $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ положим

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in \underset{w(\cdot) \in \mathcal{Z}_\tau(y(t_0), \bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau], \mathbb{R}^n)}. \tag{5.53}$$

[2]Напомним, что семейство множеств называют центрированным, если пересечение любого конечного набора множеств из этого семейства не пусто.

Т е о р е м а 5.3. *Если для некоторого* $z_0 \in G_0$ *имеет место равенство* (5.45)*, то в этом начальном состоянии* z_0 *выполнено условие* (5.2).

Если для системы (1.1) *выполнено условие* (5.10) *и в начальном состоянии* $z_0 \in G_0$ *выполнено условие* (5.2)*, то имеют место равенства*

$$0 = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{CAR}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0)$$

и стратегия $\mathbb{U}^0_{\text{SL}}$*, заданная выражениями* (5.47), (5.53), (5.5)–(5.9)*, является стратегией, оптимальной по риску при* L_{p}*-компактных ограничениях на помеху для начального состояния* $z_0 \in G_0$.

З а м е ч а н и е 16. Из условия 5.2 в силу леммы 5.3 следует, что при всех $\tau \in T$, $\bar{v}(\cdot)$ множество $\mathcal{Z}_\tau(y(t_0), \bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))$ не пусто, компактно в $C([t_0,\tau];\mathbb{R}^n)$ и не зависит от значений $\bar{v}(t)$ при $t \in (\tau, \vartheta]$. Таким образом, определения (5.53) корректны.

Доказательство. 1. Докажем первую часть теоремы. Пусть $z_0 \in G$, $t \in T$ и реализации помехи $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}$, $i \in 1..m$ ($m \in \mathbb{N}$), таковы, что

$$v_1(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = v_m(\cdot)|_{[t_0,t]}. \tag{5.54}$$

Из условия (5.45) и неравенств (2.1) следует соотношение

$$\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = 0. \tag{5.55}$$

Рассмотрим последовательность квазистратегий $\{\alpha_i \in \mathbf{Q} \mid i \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0, \alpha_i) \leqslant 1/i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

В силу (5.55) такая последовательность, конечно, существует. Обозначим

$$x_{ij}(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_0, \alpha_i(v_j(\cdot)), v_j(\cdot)), \quad i \in \mathbb{N},\ j \in 1..m.$$

Из условия (5.54) следуют равенства

$$x_{i1}(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = x_{im}(\cdot)|_{[t_0,t]}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{5.56}$$

Переходя при необходимости (но не более m раз) к подпоследовательности последовательности индексов $i \in \mathbb{N}$, будем считать каждую из последовательностей $(x_{ij}(\cdot))_{i\in\mathbb{N}}$, $j \in 1..m$, сходящейся в $C(T;\mathbb{R}^n)$. Обозначим соответствующие пределы $x_{0j}(\cdot)$:

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{ij}(\cdot) - x_{0j}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \quad j \in 1..m.$$

Из равенств (5.56) следует

$$\bar{x}(\cdot) := x_{01}(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = x_{0m}(\cdot)|_{[t_0,t]}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{5.57}$$

В силу непрерывности (в топологии пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$) показателя качества $\gamma(\cdot)$ (1.26) из определения движений $x_{0j}(\cdot)$ получим

$$\gamma(x_{0j}(\cdot)) = \lim_{i\to\infty} \gamma(x_{ij}(\cdot)) \leqslant \lim_{i\to\infty} \rho(z_0, v_j(\cdot)) + 1/i = \rho(z_0, v_j(\cdot)), \quad j \in 1..m.$$

То есть $x_{0j}(\cdot) \in R(z_0, v_j(\cdot))$, $j \in 1..m$. Из этих включений и равенств (5.57) получим соотношения

$$\bar{x}(\cdot) \in R(z_0, v_j(\cdot))|_{[t_0,t]}, \quad j \in 1..m,$$

обосновывающие следствие в импликации (5.46). Первая часть теоремы доказана.

2. Пусть выбраны произвольные

$$z_0 \in G_0, \quad v_0(\cdot) \in \mathcal{V}, \quad x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}^0_{\mathrm{SL}}, \{v_0(\cdot)\}).$$

Воспользуемся еще раз обозначениями, введенными в начале пункта 5.2 (с. 67), изменив в соответствии с (5.53) определения величин $w_{ki}(\cdot)$:

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{w(\cdot)\in \\ \mathcal{Z}_{\tau_{ki}}(y_k(t_0),(\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}. \tag{5.58}$$

3. Схема доказательства второй части теоремы следующая: для ранее выбранных $v_0(\cdot)$, $x_0(\cdot)$ установим неравенство

$$\gamma(x_0(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)), \tag{5.59}$$

откуда, в силу произвольности выбора, получим соотношения

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}^0_{\mathrm{SL}}) := \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U}^0_{\mathrm{SL}},v(\cdot))}} \gamma(x(\cdot)) - \rho(z_0, v_0(\cdot)) \leqslant 0.$$

С учетом неравенств (2.1) и $0 \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0)$ получим соотношения

$$0 = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{CAR}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}^0_{\mathrm{SL}}),$$

эквивалентные утверждению теоремы.

Если для движений y-модели будут выполняться неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) \tag{5.60}$$

и равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.61}$$

то мы получим оценку (5.59). Таким образом, остается лишь проверить выполнение соотношений (5.60), (5.61).

4. Определения движений $x_k(\cdot)$ и $y_k(\cdot)$ совпадают во всех существенных моментах с определениями одноименных последовательностей из леммы 5.1. Условия настоящей теоремы сильнее условий указанной леммы. Значит, выполняется утверждение леммы 5.1, из которого следует (5.61).

Обратимся к неравенству (5.60). Пусть для движений y-модели имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{Z}_\vartheta(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))) = 0, \tag{5.62}$$

тогда справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \max_{w(\cdot)\in\mathcal{Z}_\vartheta(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))} \gamma(w(\cdot)) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) = \rho(z_0, v_0(\cdot)),$$

обосновывающая искомое неравенство (5.60). В приведенных соотношениях первое неравенство следует из (5.62) и непрерывности $\gamma(\cdot)$, второе неравенство — из (5.51), последнее равенство — из сходимости (5.36), которая, в свою очередь, следует из условия (5.10).

5. Доказательство равенства (5.62) следует доказательству равенства (5.39), так как множество $\mathcal{Z}_t(z, v(\cdot))$ обладает всеми необходимыми свойствами (см. лемму 5.3, с. 76), которые использовались при доказательстве соотношения (5.39). $\square$

5.4.2. Примеры риск-регулярных задач

1. Проиллюстрируем применение теоремы 5.3 на примере задачи управления скалярной системой (2.15) при показателе качества (2.18) в случае

$$a \geqslant b.$$

Проверяется, что при любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ движение вида

$$x(t, z_0, v(\cdot)) := \begin{cases} y(t, z_0, v(\cdot)), & t \in [t_0, t^*), \\ 0, & t \in [t^*, \vartheta], \end{cases} \tag{5.63}$$

$$y(t, z_0, v(\cdot)) := z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\, ds - (t - t_0) a \operatorname{sign}(z_0),$$

$$t^* := \min\{\vartheta, \min\{t \in T \mid y(t, z_0, v(\cdot)) = 0\}\}$$

принадлежит $R(z_0, v(\cdot))$ и для любых $t \in T$, $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполняется импликация

$$(v'(\cdot)|_{[t_0,t]} = v(\cdot)|_{[t_0,t]}) \quad \Rightarrow \quad (x(t, z_0, v'(\cdot))|_{[t_0,t]} = x(t, z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]}).$$

Из этих соотношений следует выполнение условия 5.2. Другие условия теоремы 6.1 также выполняются. Значит, в силу теоремы, для всех начальных состояний $z_0 \in G_0$ верно равенство $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0) = 0$.

Рассмотрим следующую (позиционную) стратегию управления $\mathbb{U}_0$: для любого разбиения $\Delta \in \Delta_T$, $\Delta = (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$, и любого элемента $\mathbf{U}_i$, $i \in 0..(n_\Delta - 1)$, обратной связи $\mathbf{U}_0^\Delta \in \mathbb{U}_0$ и для всех $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i]; \mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathbf{U}_i(x_i(\cdot)) := -a \operatorname{sign}(x_i(\tau_i)).$$

Это стратегия экстремального прицеливания на множество $\{(\tau, 0) \mid \tau \in T\}$. Несложно проверить, что именно эта стратегия порождает движения вида (5.63) и, соответственно, имеет нулевой риск:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} |x(\vartheta, z_0, v(\cdot))| - \rho(z_0, v(\cdot)) = 0.$$

2. Другой пример риск-регулярного случая доставляет задача управления системой, описываемой уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau) v(\tau), & \tau \in [t_0, \vartheta] := T, \\ x(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.64}$$

Начальные состояния, измеримые реализации управления и помехи при почти всех значениях $\tau \in T$ стеснены ограничениями

$$z_0 \in G_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant a_0, a_0 > 0\},$$
$$u(\tau) \in \mathcal{P} := \{-1, 1\}, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}. \tag{5.65}$$

Показатель качества задан выражением

$$\gamma(x(\cdot)) := \|x(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}. \tag{5.66}$$

Можно проверить, что в этой задаче для всех $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $x(\cdot) \in X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ выполнено равенство
$$\rho(x(t_0), v(\cdot)) = \|z_0\|$$
и включение
$$\bar{x}(\cdot, z_0, v(\cdot)) := x(\cdot, t_0, z_0, \bar{u}(\cdot), v(\cdot)) \in R(z_0, v(\cdot)),$$
где
$$\bar{u}(\tau) := \bar{U}(x(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T,$$
$$U(x, v) := \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{Q}} u\langle x, v\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathcal{Q}.$$
Исходя из этих соотношений, легко проверяется условие 5.2: для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $t \in T$ выполняется равенство
$$\bar{x}(\cdot, z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]} = \bar{x}(\cdot, z_0, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]}$$
и, следовательно, импликация (5.46). Таким образом, в задаче управления (5.64)–(5.66) для всех $z_0 \in G_0$ выполняется равенство $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(z_0) = 0$.

Стратегия $\bar{\mathbb{U}} \in \mathbf{S}$, оптимальная по риску при L_{p}-компактных ограничениях, может быть построена также, как в примере из пункта 2.1.

Для всех $(x_1, x_2, u') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}$ определим значение обратной связи $\bar{\mathbf{U}}^\Delta \in \bar{\mathbb{U}}$ на разбиении $\Delta = (\tau_i)_{i \in 0..n_\Delta}$ индуктивно:

— для произвольного $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R}^n)$ положим $\bar{\mathbf{U}}_0^\Delta(x(\cdot)) := u_0 \in \mathcal{P}$;

— пусть для некоторого $i \in 0..(n_\Delta - 2)$ при всех $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n)$ определено значение $\bar{\mathbf{U}}_i^\Delta(x(\cdot))$ i-того элемента обратной связи $\bar{\mathbf{U}}^\Delta$, тогда для всех $x(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i+1}], \mathbb{R}^n)$ определим значение $\bar{\mathbf{U}}_{i+1}(x(\cdot))$ условием
$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1}^\Delta(x(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u\left\langle x(\tau_{i+1}), \frac{x(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)}{\bar{\mathbf{U}}_i^\Delta(x(\cdot)|_{[t_0,\tau_i]})}\right\rangle.$$

6. Отдельные результаты для случая терминального показателя качества

В данном пункте приводятся свойства функционала оптимального результата и функции риска, при программных ограничениях на помеху в случае терминального показателя качества: для всех $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$
$$\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)), \tag{6.1}$$
где функция $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ локально липшицева. В частности, для всех $x, x' \in G|_\vartheta$ выполнено неравенство
$$|\sigma(x) - \sigma(x')| \leqslant L_\sigma \|x - x'\|.$$

6.1. Интегральная форма функции оптимального риска

Л е м м а 6.1. *Существует константа $L_\rho = L_\rho(G) \geqslant 0$ такая, что для любых элементов $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in G$ выполнено неравенство*
$$\big|\rho(t_1, z_1, v(\cdot)) - \rho(t_2, z_2, v(\cdot))\big| \leqslant L_\rho\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big). \tag{6.2}$$
Доказательство. Для функции ρ неравенство (6.2) следует из ее определения (см. (2.19), с. 24) и определения множества $X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot))$ (см. (1.6)): эта функция является поточечной нижней гранью семейства равностепенно (по параметрам $u(\cdot)$, $v(\cdot)$) липшицевых по (t_*, z_*) функций
$$\Big\{G \ni (t_*, z_*) \to \varphi(t_*, z_*) := \sigma(x(\vartheta, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbb{R} \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\Big\}.$$

В самом деле, пусть для определенности $t_2 \geqslant t_1$. При $\tau \in [t_2, \vartheta]$ обозначим

$$\Delta x(\tau) := x_1(\tau) - x_2(\tau), \quad \text{где } x_1(\tau) := x(\tau, t_1, z_1, u(\cdot), v(\cdot)), \quad x_2(\tau) := x(\tau, t_2, z_2, u(\cdot), v(\cdot)).$$

Тогда

$$\|\Delta x(\tau)\| \leqslant \|z_1 - z_2\| + \int\limits_{t_1}^{t_2} \|f(s, x_1(s), u(s), v(s))\| ds +$$
$$+ \int\limits_{t_2}^{\tau} \Big\| f(s, x_1(s), u(s), v(s)) - f(s, x_2(s), u(s), v(s)) \Big\| ds,$$

или

$$\|\Delta x(\tau)\| \leqslant \varkappa\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big) + \int\limits_{t_2}^{\tau} L_f \|\Delta x(s)\| ds,$$

где

$$\varkappa = \varkappa(G) := \max\{1, \max_{(\tau,x,u,v)\in G\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q}} \|f(\tau, x, u, v)\|\}.$$

Отсюда, в силу неравенства Гроноулла [15, теорема II.4.4], для произвольного $\tau \in [t_2, \vartheta]$ получим неравенства

$$\|\Delta x(\tau)\| \leqslant \varkappa\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big) +$$
$$+ \exp\big(L_f(\vartheta - t_2)\big) \int\limits_{t_2}^{\tau} L_f \varkappa\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big)\big(1 + L_f(\vartheta - t_2)\exp(L_f(\vartheta - t_2))\big),$$

из которых следует, что для любой функции φ из вышеуказанного семейства и любой пары позиций $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in G$ верна оценка

$$|\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_2, z_2)| := \Big| \sigma\left(x(\vartheta, t_1, z_1, u(\cdot), v(\cdot))\right) - \sigma\left(x(\vartheta, t_2, z_2, u(\cdot), v(\cdot))\right) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant L_\sigma \|\Delta x(\vartheta)\| \leqslant L_\sigma \varkappa\big(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|\big)\big(1 + L_f(\vartheta - t_2)\exp(L_f(\vartheta - t_2))\big) :=$$
$$:= L_\rho(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|).$$

Таким образом, установлена равномерная по $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ липшицевость рассматриваемого семейства функций. При этом из оценок вытекает вид мажоранты для константы Липшица L_ρ:

$$L_\sigma \varkappa\big(1 + L_f(\vartheta - t_2)\exp(L_f(\vartheta - t_2))\big).$$

□

Пусть $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $(\tau, x) \in G$, $w \in \mathbb{R}^n$; обозначим

$$\frac{\partial \rho(\tau, x, v(\cdot))}{\partial [1, w]} := \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x + \varepsilon w, v(\cdot)) - \rho(\tau, x, v(\cdot))}{\varepsilon}.$$

Если предел справа существует, то будем говорить, что функция $\rho(\cdot, v(\cdot)) : G \to \mathbb{R}$ имеет в позиции (τ, x) производную по направлению $(1, w)$.

Пусть $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))$. Движение $x(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^n$, в силу определения, дифференцируемо при п.в. $\tau \in [t_0, \vartheta]$; обозначим $\dot{x}(\tau)$ производную движения $x(\cdot)$ в точке дифференцируемости τ.

Л е м м а 6.2. *Для любых $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ $x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))$ функция*

$$s \mapsto \frac{\partial \rho(s, x(s), v(\cdot))}{\partial [1, \dot{x}(s)]}$$

определена почти всюду на интервале $[t_0, \vartheta]$, измерима и интегрируема по Лебегу на этом интервале. При этом выполняются равенства

$$\mathbf{r}(z_0, \mathbb{U}) = \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))}} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{\partial \rho(s, x(s), v(\cdot))}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{r}(z_0) = \inf_{\mathbb{U} \in \mathbf{S}} \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))}} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{\partial \rho(s, x(s), v(\cdot))}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds. \tag{6.4}$$

Доказательство. Пусть выбраны произвольные $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $x(\cdot) \in \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))$. Тогда функция $\tau \mapsto \rho(\tau, x(\tau), v(\cdot))$ в силу леммы 6.1 является абсолютно непрерывной, а значит, почти всюду дифференцируемой и представимой в виде интеграла собственной производной [15, I.4.42]:

$$\rho(\tau, x(\tau), v(\cdot)) = \rho(t_0, x(t_0), v(\cdot)) + \int\limits_{t_0}^{\tau} \rho'_s(s, x(s), v(\cdot))\, ds.$$

Рассмотрим полную производную функции $\tau \to \rho(\tau, x(\tau), v(\cdot))$ в точках $\tau \in [t_0, \vartheta)$, где существуют производные $\dot{x}(\tau)$ и $\rho'_\tau(\tau, x(\tau), v(\cdot))$ (множество тех τ, где хотя бы одна из указанных производных не существует, имеет нулевую меру):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to +0} & \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v(\cdot)) - \rho(\tau, x(\tau), v(\cdot))}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v(\cdot)) - \rho(\tau, x(\tau), v(\cdot))}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v(\cdot)) - \rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v(\cdot))}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Левый предел существует и конечен. Значит, если одно из слагаемых в правом пределе сходится к конечной величине, то второе слагаемое также имеет конечное предельное значение и в сумме эти два предела равны значению предела слева. Оценим второе слагаемое. Из определения дифференцируемости функции $x(\cdot)$ в точке τ и неравенства (6.2) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v(\cdot)) - \rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v(\cdot))}{\varepsilon} \right| \leqslant \\ &\leqslant L_\rho \left| \frac{x(\tau + \varepsilon) - x(\tau) - \varepsilon \dot{x}(\tau)}{\varepsilon} \right| = L_\rho \left| \frac{\varepsilon O(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| = L_\rho |O(\tau, \varepsilon)|, \end{aligned}$$

где величина $O(\tau, \varepsilon)$ такова, что $\lim_{\varepsilon \to 0} O(\tau, \varepsilon) = 0$ для всех тех τ, в которых дифференцируема функция $x(\cdot)$. Следовательно, второе слагаемое сходится к нулю при любом из указанных моментов $\tau \in [t_0, \vartheta)$. Значит, первое слагаемое в правой части (6.5) при всех таких τ имеет предел. Этот предел, по определению, равен $\dfrac{\partial\rho(\tau,x(\tau),v(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(\tau)]}$. Таким образом, для почти всех $\tau\in[t_0,\vartheta]$ выполняется равенство

$$\rho'_\tau(\tau,x(\tau),v(\cdot))=\frac{\partial\rho(\tau,x(\tau),v(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(\tau)]}$$

а значит, выполняются все указанные в лемме свойства функции

$$s\mapsto\frac{\partial\rho(s,x(s),v(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]},$$

и при всех $\tau\in[t_0,\vartheta]$ верны соотношения

$$\rho(\tau,x(\tau),v(\cdot))=\rho(t_0,x(t_0),v(\cdot))+\int\limits_{t_0}^{\tau}\frac{\partial\rho(s,x(s),v(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}ds. \tag{6.6}$$

Последнее равенство при $\tau=\vartheta$ может быть переписано в виде

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\frac{\partial\rho(s,x(s),v(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}ds. \tag{6.7}$$

Так как соотношение (6.7) верно при любых $z_0\in G_0$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$, $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$, $x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},v(\cdot))$, утверждения (6.3), (6.4) следуют из равенства (6.7) и определения риска стратегии $\mathbb{U}$ и минимального риска в классе $\mathbf{S}$ при программных ограничениях на помеху (см. (1.29), (1.30)). $\square$

Из равенства (6.7) можно также получить еще одно представление программных конструкций из пункта 4 для рассматриваемого здесь важного частного случая.

Отталкиваясь от определения (4.3), для всех $t\in T$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$, $x(\cdot)\in X(G_0)$ можем записать

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_t(x(\cdot),v(\cdot)):=&\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\gamma_{\mathbf{s}}((x,x')_t(\cdot),(v,v')_t(\cdot))=\\ &=\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\int_{t_0}^{\vartheta}\frac{\partial\rho(s,(x,x')_t(s),(v,v')_t(\cdot))}{\partial[1,(\dot{x},\dot{x}')_t(s)]}\,ds.\end{aligned} \tag{6.8}$$

И в силу определения величины ρ можем получить следующее представление программного максимина функционала сожаления:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0_t(x(\cdot),v(\cdot))=\\ &=\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\Big\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\rho(s,x(s),(v,v')_t(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}\,ds+\int_t^{\vartheta}\frac{\partial\rho(s,x'(s),v'(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}'(s)]}\,ds\Big\}=\\ &=\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\Big\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\rho(s,x(s),(v,v')_t(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}\,ds+\inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\int_t^{\vartheta}\frac{\partial\rho(s,x'(s),v'(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}'(s)]}\,ds\Big\}=\\ &=\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\Big\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\rho(s,x(s),(v,v')_t(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}\,ds+\inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}}\sigma(x'(\vartheta))-\rho(t,x(t),v'(\cdot))\Big\}=\\ &=\sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\rho(s,x(s),(v,v')_t(\cdot))}{\partial[1,\dot{x}(s)]}\,ds.\end{aligned}$$

6.2. Локальное свойство оптимального результата в регулярном случае

Отметим также одно свойство [38] семейства $\{\rho(\cdot, v(\cdot)) \mid v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ оптимальных результатов, имеющее место в риск-регулярном случае. Для любых $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbf{comp}(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$M(a, b, \varepsilon) := \{x \in b \mid \langle x, a\rangle \leqslant \min_{y \in b} \langle y, a\rangle + \varepsilon \|a\| \cdot \mathbf{diam}(b)\},$$

где $\mathbf{diam}(b)$ обозначает диаметр множества $b \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{diam}(b) := \sup_{x,y,\in b} \|x - y\|.$$

Пусть $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$ — некоторое семейство подмножеств.

Определение 6.1. Элементы $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ назовем $\mathcal{B}$-коллинеарными, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$M(a_1, b, \varepsilon) \cap M(a_2, b, \varepsilon) \neq \varnothing \quad \text{для всех } b \in \mathcal{B},\ \mathbf{diam}(b) \leqslant \delta.$$

Замечание 17. В отдельных случаях $\mathcal{B}$-коллинеарность влечет коллинеарность. Например, пусть $\mathcal{B}$ есть последовательность евклидовых шаров с радиусами стремящимися к нулю. Тогда из условия $\mathcal{B}$-коллинеарности элементов $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ следует равенство $\langle a_1, a_2\rangle = \|a_1\| \cdot \|a_2\|$, эквивалентное коллинеарности a_1, a_2.

Для $(t, z) \in G$ обозначим

$$\mathcal{A}(t, z) := \{X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot))|_t \ni z \mid (t_*, z_*) \in G, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}.$$

Теорема 6.1. *Пусть для системы* (1.1) *и показателя качества* (1.26) *в позиции* $(t, z) \in G$ *выполнено условие* (5.2), *функции*

$$\rho(t, \cdot, v_1(\cdot)), \quad \rho(t, \cdot, v_2(\cdot)) \colon G|_t \mapsto \mathbb{R}$$

дифференцируемы в точке z *и векторы* $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^n$ *представляют соответствующие градиенты. Тогда* g_1, g_2 $\mathcal{A}(t, z)$*-коллинеарны.*

Доказательство. Предположим противное: нашлись $v_{(1)}(\cdot), v_{(2)}(\cdot) \in \mathcal{V}$, $(t, z) \in G$, $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}(t, z)$ такие, что $\lim_{i\to\infty} \mathbf{diam}(b_i) = 0$ и

$$M(g_1, b_i, \varepsilon) \cap M(g_2, b_i, \varepsilon) = \varnothing, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

где $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^n$ — градиенты функций $\rho(t, \cdot, v_1(\cdot))$, $\rho(t, \cdot, v_2(\cdot))$ в точке z соответственно. По определению, $b_i = X(t_{*i}, z_{*i}, \mathcal{U}, v_i(\cdot))|_t$ для некоторых $(t_{*i}, z_{*i}) \in G$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}$, $i \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$R_{ij} := \{x(t) \mid x(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{x'(\cdot) \in X(t_{*i}, z_{*i}, \mathcal{U}, v_{ij}(\cdot))} \gamma(x'(\cdot))\},$$

$$A_{ij} := \operatorname*{argmin}_{x \in X(t_{*i}, z_{*i}, \mathcal{U}, v_{ij}(\cdot))|_t} \rho(t, x, v_{ij}(\cdot)),$$

$$v_{ij}(\tau) := \begin{cases} v_i(\tau), & \tau \in [t_{*i}, t), \\ v_{(j)}(\tau), & \tau \in [t, \vartheta], \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N},\ j = 1, 2.$$

Из определений и свойства

$$\rho(t_*, z_*, v(\cdot)) = \min_{z \in X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot))|_t} \rho(t, z, v(\cdot)) \tag{6.10}$$

функции оптимального результата получим включения

$$R_{ij} \subseteq A_{ij}, \quad i \in \mathbb{N},\ j = 1, 2. \tag{6.11}$$

Для множеств R_{ij} в силу условия (5.46) справедливы соотношения

$$R_{i1} \cap R_{i2} \neq \varnothing, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

Из включений (6.11) и неравенств (6.12) следуют неравенства

$$A_{i1} \cap A_{i2} \neq \varnothing, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6.13}$$

С другой стороны, в силу дифференцируемости в точке z функции

$$\rho(t, \cdot, v_{(1)}(\cdot)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

имеем равенство

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{\substack{x \in b_i - z \\ \|x\|>0}} \frac{\|\rho(t, z + x, v_{(1)}(\cdot)) - \rho(t, z, v_{(1)}(\cdot)) - \langle g_1, x\rangle\|}{\|x\|} = 0;$$

здесь $b_i - z := \{x = y - z \mid y \in b_i\}$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ найдется $i_1(\delta) \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $x \in b_i - z$, $i > i_1(\delta)$, будет выполнено неравенство

$$\|\rho(t, z + x, v_{(1)}(\cdot)) - \rho(t, z, v_{(1)}(\cdot)) - \langle g_1, x\rangle\| \leqslant \delta\, \mathbf{diam}(b_i). \tag{6.14}$$

Следовательно, при всех $i > i_1(\delta)$ будет выполняться соотношение

$$\min_{x\in b_i - z} \{\rho(t, z + x, v_{(1)}(\cdot)) - \rho(t, z, v_{(1)}(\cdot))\} \leqslant \min_{x\in b_i - z} \langle g_1, x\rangle\| + \delta\, \mathbf{diam}(b_i). \tag{6.15}$$

Пусть теперь $y \in A_{i1}$. Тогда, используя (6.14), определение множества A_{i1} и соотношение (6.15), при всех $i > i_1(\delta)$ получим неравенства

$$\begin{aligned}\langle g_1, y - z\rangle \leqslant \rho(t, y, v_{(1)}(\cdot)) - \rho(t, z, v_{(1)}(\cdot)) + \delta\, \mathbf{diam}(b_i) \leqslant \\ \leqslant \min_{x\in b_i - z} \{\rho(t, z + x, v_{(1)}(\cdot)) - \rho(t, z, v_{(1)}(\cdot))\} + \delta\, \mathbf{diam}(b_i) \leqslant \\ \leqslant \min_{x\in b_i - z} \langle g_1, x\rangle + 2\delta\, \mathbf{diam}(b_i)\end{aligned}$$

или

$$\langle g_1, y\rangle \leqslant \min_{x\in b_i} \langle g_1, x\rangle + 2\delta\, \mathbf{diam}(b_i), \quad i > i_1(\delta),$$

откуда при любом $\varepsilon > 0$, по определению множества $M(g_1, b_i, \varepsilon)$, следует

$$y \in M(g_1, b_i, \varepsilon), \quad i > i_1(\varepsilon\|g_1\|/2).$$

Значит, в силу произвольного выбора $y \in A_{i1}$, при любом $\varepsilon > 0$ выполняется включение

$$A_{i1} \subseteq M(g_1, b_i, \varepsilon), \quad i > i_1(\varepsilon\|g_1\|/2). \tag{6.16}$$

Такими же рассуждениями можно показать, что для некоторого отображения

$$i_2(\cdot)\colon (0, 1] \mapsto \mathbb{N}$$

при всех $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$A_{i2} \subseteq M(g_2, b_i, \varepsilon), \quad i > i_2(\varepsilon\|g_2\|/2). \tag{6.17}$$

Выберем i_0 из условия $i_0 > \max\{i_1(\varepsilon_0\|g_1\|/2), i_2(\varepsilon_0\|g_2\|/2)\}$. Тогда из (6.16), (6.17) и предположения (6.9) будет следовать $A_{i_0 1} \cap A_{i_0 2} = \varnothing$, противоречащее неравенствам (6.13). $\square$

7. Приложение

В этой части приводятся известные результаты, используемые в настоящей работе, источники или доказательства которых автору не удалось найти либо если эти результаты используются в модифицированной форме.

Пусть $\lambda(\cdot)$ — мера Бореля на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Теорема 7.1. *Для произвольного $V_c \in \mathbf{comp}_{L_p(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{v(\cdot)\in V_c} \int_T \|v(s+\delta) - v(s)\| ds = 0. \tag{7.1}$$

В частности, для любой $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполнено

$$\lim_{\delta\to 0} \int_T \|v(s+\delta) - v(s)\| ds = 0. \tag{7.2}$$

Доказательство. Положим $T_1 := [t_0 - 1, \vartheta + 1]$ и всякую функцию $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ будем считать продолженной на множество T_1 нулем пространства $\mathbb{R}^q$:

$$v(\tau) := 0 \in \mathbb{R}^q, \quad \tau \in T_1 \backslash T.$$

Обозначим

$$v_h(\tau) := \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} v(s)\, ds, \quad \tau \in T, \quad h \in (0, 0.5),$$

функцию Стеклова для произвольной $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ (см. [17, с. 457]).

Оценим величину под знаком верхней грани в (7.1) при $\delta \leqslant 0.5$:

$$\int_T \|v(s+\delta) - v(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_T (\|v(s+\delta) - v_h(s+\delta)\| + \|v_h(s+\delta) - v_h(s)\| + \|v_h(s) - v(s)\|)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_T (\|v(s+\delta) - v_h(s+\delta)\| + \|v_h(s) - v(s)\|)\, ds + \int_T \|v_h(s+\delta) - v_h(s)\|\, ds.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $h(\varepsilon, V_c) > 0$ таким, чтобы для всех $h \leqslant h(\varepsilon, V_c)$, $v(\cdot) \in V_c$, $\delta \leqslant 0.5$ выполнялась оценка

$$\int_T (\|v(s+\delta) - v_h(s+\delta)\| + \|v_h(s) - v(s)\|)\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.3}$$

Это всегда можно сделать в силу критерия Колмогорова компактности множеств в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ (см. [17, теорема 6, с. 460]). Зафиксируем произвольное $\bar{h} \leqslant h(\varepsilon, V_c)$. Можно проверить, что множество $\{v_{\bar{h}}(\cdot) \mid v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ функций Стеклова для ограниченного в чебышёвской норме множества $\mathcal{V}$ будет компактным в $C(T;\mathbb{R}^q)$. И следовательно, в силу теоремы Асколи–Арцела его элементы будут равностепенно непрерывными. Значит, найдется $\delta(\varepsilon, \mathcal{V}, \bar{h}) > 0$, для которого при всех $\delta \leqslant \delta(\varepsilon, \mathcal{V}, \bar{h})$ и всех $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ будут выполнены неравенства

$$\int_T \|v_{\bar{h}}(s+\delta) - v_{\bar{h}}(s)\| ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.4}$$

Из оценок (7.3), (7.4) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех $\delta \leqslant \delta(\varepsilon, V_c, \bar{h})$ и всех $v(\cdot) \in V_c$ будут выполнены неравенства

$$\int_T \|v(s+\delta) - v(s)\| ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_T \left(\|v(s+\delta) - v_{\bar{h}}(s+\delta)\| + \|v_{\bar{h}}(s+\delta) - v_{\bar{h}}(s)\| + \|v_{\bar{h}}(s) - v(s)\|\right) ds \leqslant \varepsilon,$$

что эквивалентно равенству (7.1). Соотношение (7.2) следует из (7.1), так как одноэлементные множества в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ компактны. □

Пусть $c \in [1/2, +\infty)$ и $A \subseteq \mathbb{R}$ — произвольное измеримое множество. Обозначим

$$A'_c := \left\{\tau \in \mathbb{R} \mid \lim_{\substack{a,b\to\tau \\ (a,b)\in I_c(\tau)}} \frac{\lambda(A\cap[a,b])}{b-a} = 1\right\}, \tag{7.5}$$

$$I_c(\tau) := \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > a, \frac{\max\{|b-\tau|, |a-\tau|\}}{b-a} \leqslant c\right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

Следующая теорема показывает, в частности, что для любого значения параметра c из интервала $[1/2, +\infty)$ данное определение ведет к одному и тому же множеству A'.

Т е о р е м а 7.2. *Для произвольного измеримого по Лебегу множества $A \subseteq \mathbb{R}$ и параметра $c \in [1/2, +\infty)$ справедливы равенства*

$$\lambda(A \triangle A'_c) := \lambda((A \backslash A'_c) \cup (A'_c \backslash A)) = 0. \tag{7.6}$$

З а м е ч а н и е 18. Элементы множества A' называют точками плотности множества A. Для случая $c = 1/2$ $(\tau - a = b - \tau)$ доказательство этой теоремы приводится в [17, гл. IX, § 6] и [39, теорема 3.20].

Доказательство. Выберем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $\Lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(\tau) := \int_{t_0}^{\tau} \chi_A(s)\, ds, \quad \chi_A(s) := \begin{cases} 1, & s \in A, \\ 0, & s \notin A, \end{cases}$$

где $\chi_A(\cdot)$ — индикаторная функция множества A. Из теоремы Лебега о производной абсолютно непрерывной функции следует, что для п.в. $\tau \in \mathbb{R}$ функция $\Lambda(\cdot)$ будет иметь производную в точке τ, равную величине $\chi_A(\tau)$. Обозначим $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}$ множество точек дифференцируемости функции $\Lambda(\cdot)$. Значит, для каждого $\tau \in \mathcal{D}_A$ найдется функция $O_\tau(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такая, что $\lim_{\delta\to 0} O_\tau(\delta) = 0$ и для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Lambda(a) = \Lambda(\tau) + (a-\tau)\chi_A(\tau) + (a-\tau)O_\tau(a-\tau),$$
$$\Lambda(b) = \Lambda(\tau) + (b-\tau)\chi_A(\tau) + (b-\tau)O_\tau(b-\tau).$$

Вычитая из второго равенства первое и деля на $b - a$ для любых $a, b \in I_c(\tau)$, получим соотношения

$$\left|\frac{\Lambda(b) - \Lambda(a)}{b-a} - \chi_A(\tau)\right| = \left|\frac{(b-\tau)O_\tau(b-\tau) - (a-\tau)O_\tau(a-\tau)}{b-a}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\max\{|b-\tau|, |a-\tau|\}}{b-a}\left(|O_\tau(a-\tau)| + |O_\tau(b-\tau)|\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|O_\tau(a-\tau)| + |O_\tau(b-\tau)|\right).$$

Следовательно, для $\tau \in \mathcal{D}_A$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{a,b\to\tau\\(a,b)\in I_c(\tau)}} \frac{\Lambda(b)-\Lambda(a)}{b-a} = \chi_A(\tau).$$

Учитывая определение функции $\Lambda(\cdot)$, последнее утверждение можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{a,b\to\tau\\(a,b)\in I_c(\tau)}} \frac{\lambda(A\cap[a,b])}{b-a} = \chi_A(\tau), \quad \tau\in\mathcal{D}_A.$$

Это соотношение показывает, что при п.в. $\tau \in A$ выполняется $\tau \in A'_c$ и, наоборот, при п.в. $\tau \in A'_c$ выполняется $\tau \in A$.

Таким образом, справедливы равенства (7.6). $\square$

Доказательство приводимой ниже теоремы использует рассуждения из [2, § 7; 40, § 1].

Т е о р е м а 7.3. *Пусть* $(\tau_*, z_k) \in G$, $\tau^* \in [\tau_*, \vartheta]$, $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v_* \in \mathcal{Q}$, *и*

$$\{x_k(\cdot) = x(\cdot, \tau_*, z_k, u_k(\cdot), v_*) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

— последовательность решений системы (1.1), *сходящаяся равномерно на* $[\tau_*, \tau^*]$ *к движению* $x_*(\cdot)$. *Тогда движение* $x_*(\cdot)$ *является решением дифференциального включения*

$$\dot{x}_*(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_*(\tau), v_*) \quad \text{для п.в.} \ \ \tau \in [\tau_*, \tau^*],$$

где $\mathcal{F}_u(\tau, x, v_*) := \mathbf{co}_{\mathbb{R}^n}\{f \in \mathbb{R}^n : f = f(\tau, x, u, v_*), u \in \mathcal{P}\}$.

Доказательство. Из условий, наложенных на систему (1.1), следует, что последовательность $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ производных по времени этих пошаговых движений ограничена равномерно при п.в. $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ константой $\varkappa$:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname*{vraimax}_{\tau\in[\tau_*,\tau^*]} \|\dot{x}_k(\tau)\| \leqslant \varkappa := \max_{\substack{(\tau,x)\in G\\ u\in\mathcal{P}, v\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau, x, u, v)\|.$$

Отсюда следует, что предел этой последовательности $x_*(\cdot)$ есть функция абсолютно непрерывная, а сама последовательность ограничена в сильной норме пространства $L_2([\tau_*, \tau^*]; \mathbb{R}^n)$. По теореме [41, гл. V, § 2] и в силу рефлексивности $L_2([\tau_*, \tau^*]; \mathbb{R}^n)$ существует слабо сходящаяся подпоследовательность этой последовательности. Для упрощения обозначений будем считать, что сама последовательность $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ сходится в слабом смысле к некоторому элементу $\dot{x}_\infty(\cdot) \in L_2([\tau_*, \tau^*]; \mathbb{R}^n)$. В силу абсолютной непрерывности движения $x_*(\cdot)$ при всех $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ получим равенства

$$\int_{\tau_*}^{\tau} \dot{x}_*(s)\,ds \;=\; x_*(\tau) - x_*(\tau_*) \;=\; \lim_{k\to\infty}(x_k(\tau) - x_k(\tau_*)) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\tau_*}^{\tau} \dot{x}_k(s)\,ds \;=\; \int_{\tau_*}^{\tau} \dot{x}_\infty(s)\,ds,$$

где $\dot{x}_*(\tau)$ — производная по времени движения $x_*(\cdot)$. Из этих равенств следует, что

$$\dot{x}_*(\tau) = \dot{x}_\infty(\tau) \qquad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{7.7}$$

Каждый элемент последовательности $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет равенству

$$\dot{x}_k(\tau) = f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), v_*) \qquad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*],$$

и, значит, при п.в. $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ для любого $k \in \mathbb{N}$ будет выполнено включение

$$\dot{x}_k(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_k(\tau), v_*). \tag{7.8}$$

Используя теорему Каратеодори [15, п. I.6.2], можно показать, что при любых значениях $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ и $v_* \in \mathcal{Q}$ в силу непрерывности правой части (1.1) по совокупности аргументов отображение $G|_\tau \ni x \mapsto F_u(\tau, x, v_*) \in 2^{\mathbb{R}^n}$ полунепрерывно сверху по включению (см. [15, п. I.7]).

Из этого свойства и включений (7.8) следует, что выполняются соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \dot{x}_k(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_*(\tau), v_*) \qquad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{7.9}$$

По теореме Мазура [41, гл. V, §1, теорема 2], функция $\dot{x}_\infty(\cdot)$ есть сильный предел последовательности конечных выпуклых комбинаций элементов последовательности $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$. Так как при любом $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}, k \geqslant j\}$ тоже слабо сходится к $\dot{x}_\infty(\cdot)$, то можно построить последовательность конечных выпуклых комбинаций

$$\Big\{\xi_j(\cdot) := \sum_{i\in 1..n_j} \alpha_{ij}\dot{x}_{k_{ij}}(\cdot) \;\;|\; \sum_{i\in 1..n_j} \alpha_{ij} = 1,\ \alpha_{ij} \geqslant 0,\ k_{ij} \geqslant j,\ i \in 1..n_j,\ j \in \mathbb{N}\Big\} \tag{7.10}$$

из элементов последовательности $\{\dot{x}_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ такую, что

$$\|\dot{x}_\infty(\cdot) - \xi_j(\cdot)\|_{L_2([\tau_*,\tau^*];\mathbb{R}^n)} \leqslant j^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Из сильной сходимости (7.11) следует существование подпоследовательности последовательности $\{\xi_j(\cdot)\colon j \in \mathbb{N}\}$, сходящейся почти всюду на $[\tau_*, \tau^*]$ к функции $\dot{x}_\infty(\cdot)$ (см. [15, теорема I.4.18]; для упрощения обозначений будем считать сходящейся в этом смысле саму последовательность):

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j(\tau) = \dot{x}_\infty(\tau) \qquad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{7.12}$$

Покажем, что для последовательности $\{\xi_j(\cdot) : j \in \mathbb{N}\}$ справедливо также включение

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_*(\tau), v_*) \qquad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{7.13}$$

Пусть для $\bar{\tau} \in [\tau_*, \tau^*]$ верно включение (7.9), и пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $k(\varepsilon, \bar{\tau}) \in \mathbb{N}$ и $\{f_k \in \mathcal{F}_u(\bar{\tau}, x_*(\bar{\tau}), v_*) : k > k(\varepsilon, \bar{\tau}), k \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\dot{x}_k(\bar{\tau}) - f_k\| < \varepsilon \qquad \text{при всех } k > k(\varepsilon, \bar{\tau}). \tag{7.14}$$

Пусть $j > k(\varepsilon, \bar{\tau})$ и $\zeta_j := \sum\limits_{i\in 1..n_j} \alpha_{ij} f_{k_{ij}}$, где коэффициенты α_{ij} взяты из определения элемента $\xi_j(\cdot)$ (см. (7.10)). По определению множества $\mathcal{F}_u(\bar{\tau}, x_*(\bar{\tau}), v_*)$, элементов $\xi_j(\cdot)$ и в силу неравенств (7.14) получим соотношения

$$\zeta_j \in \mathcal{F}_u(\bar{\tau}, x_*(\bar{\tau}), v_*), \quad \|\xi_j(\bar{\tau}) - \zeta_j\| \leqslant \sum_{i\in 1..n_j} \alpha_{ij}\|\dot{x}_{k_{ij}}(\bar{\tau}) - f_{k_{ij}}\| < \varepsilon,$$

обеспечивающие выполнение включений (7.13).

Соотношения (7.7), (7.12) и (7.13) в совокупности показывают справедливость включения (7.7) для движения $x_*(\cdot)$:

$$\dot{x}_*(\tau) = \dot{x}_\infty(\tau) = \lim_{j\to\infty} \xi_j(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_*(\tau), v_*) \quad \text{для п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*],$$

что завершает доказательство. □

Т е о р е м а 7.4. *Пусть имеется ограниченная двойная последовательность элементов $\{a_{ij} \in B \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ в банаховом пространстве B. Пусть существуют пределы*

$$\lim_{j\to\infty} a_{ij} = b_i \in B, \quad \lim_{i\to\infty} a_{ij} = d_j \in B, \quad \lim_{i\to\infty} b_i = c \in B, \quad i, j \in \mathbb{N}, \tag{7.15}$$

и первый предел достигается равномерно по $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} a_{ij} = c \tag{7.16}$$

и, в частности,

$$\lim_{j\to\infty} d_j = c. \tag{7.17}$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости первого предела (7.15) найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\|b_i - a_{ij}\|_B < \varepsilon/2, \quad j > N_1(\varepsilon),\ i \in \mathbb{N}.$$

В силу третьего равенства в (7.15) найдется $N_3(\varepsilon)$ такое, что

$$\|c - b_i\|_B < \varepsilon/2, \quad i > N_3(\varepsilon).$$

Таким образом, если $i, j > \max\{N_1(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$, то

$$\|c - a_{ij}\|_B \leqslant \|c - b_i\|_B + \|b_i - a_{ij}\|_B < \varepsilon,$$

что с учетом произвольного выбора ε эквивалентно равенству (7.16).

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и в силу сходимости (7.16) найдем $N_4(\varepsilon)$ такое, что

$$\|c - a_{ij}\|_B < \varepsilon/2, \quad i, j > N_4(\varepsilon).$$

В силу второго равенства в (7.15) для всякого $j \in \mathbb{N}$ найдется $N_2(j, \varepsilon)$ такое, что

$$\|a_{ij} - d_j\|_B < \varepsilon/2, \quad j \in \mathbb{N},\ i > N_2(j, \varepsilon).$$

Пусть теперь $j > N_4(\varepsilon)$, а $i > \max\{N_2(j, \varepsilon), N_4(\varepsilon)\}$. Тогда

$$\|c - d_j\|_B \leqslant \|c - a_{ij}\|_B + \|a_{ij} - d_j\|_B < \varepsilon,$$

что с учетом произвольного выбора ε эквивалентно равенству (7.17). □

С л е д с т в и е 7.1. *Пусть имеется ограниченная двойная последовательность элементов $\{a_{ij} \in B \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ в банаховом пространстве. Пусть существуют пределы*

$$\lim_{j\to\infty} a_{ij} = b_i \in B, \quad \lim_{i\to\infty} a_{ij} = d_j \in B, \quad \lim_{i\to\infty} a_{ij(i)} = c \in B, \quad i, j \in \mathbb{N}, \tag{7.18}$$

при этом первый предел достигается равномерно по $i \in \mathbb{N}$, а в третьем используется произвольная возрастающая последовательность индексов

$$\lim_{i\to\infty} j(i) = \infty. \tag{7.19}$$

Тогда справедливы равенства (7.16), (7.17).

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости первого предела в (7.18) и бесконечного предела последовательности индексов (7.19) найдется $N_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\|b_i - a_{ij(i)}\|_B < \varepsilon/2, \quad i > N_1(\varepsilon).$$

В силу третьего равенства в (7.18) найдется $N_3(\varepsilon)$ такое, что

$$\|c - a_{ij(i)}\|_B < \varepsilon/2, \quad i > N_3(\varepsilon).$$

Таким образом, если $i > \max\{N_1(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$, то

$$\|c - b_i\|_B \leqslant \|c - a_{ij(i)}\|_B + \|b_i - a_{ij(i)}\|_B < \varepsilon,$$

что с учетом произвольного выбора ε эквивалентно равенству

$$\lim_{i\to\infty} b_i = c.$$

Мы доказали, что выполняются условия теоремы 7.4 и, следовательно, верны равенства (7.16), (7.17). □

Список литературы

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Красовский Н.Н. Лекции по теории управления. Вып. 3. Дифференциальные игры. Свердловск: Уральский государственный университет им. А.М. Горького, 1970. 88 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
6. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute. 1991. P. 636–675.
7. Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. № 5. С. 796–803.
8. Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. матем. и мех. 1971. Т. 35. № 3. С. 385–392.
9. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 523–526.
11. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
12. Niehans J. Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen // Scbweizerische Zietschrift fur Volkswirtschaft und Statistik. 1948. Vol. 84. No. 5. P. 433–456.
13. Savage L.J. The theory of statistical decision // Journal of the American Statistical Association. 1951. Vol. 46. No. 253. P. 55–67. DOI: 10.1080/01621459.1951.10500768
14. Salmon David M. Policies and controller design for a pursuing vehicle // IEEE Transactions on Automatic Control. 1969. Vol. AC-14. No. 5. P. 482–488.
15. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
16. Серков Д.А. Оптимальная гарантия при помехах, порожденных функциями Каратеодори // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 74–83.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
18. Ченцов А.Г. Об игровой задаче на минимакс функционала // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 5. С. 1047–1050.
19. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
20. Серков Д.А. Стратегии минимаксного риска (сожаления) в системе с простыми движениями // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 3. С. 121–135. `http://www.mathnet.ru/links/76f25b7a5c5927a4c0fb10bee62e3f84/timm111.pdf`
21. Субботина Н.Н. Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.
22. Серков Д.А. О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задаче минимизации риска // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 222–230.
23. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О позиционном моделировании управления в динамических системах // Изв. АН СССР: Техн. кибернет. 1983. № 2. С. 51–60.
24. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach Publishers, 1995. 625 p.
25. Серков Д.А. Оптимальное по риску управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 74–103.

26. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
27. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения с информационной памятью // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 306–309.
28. Ченцов А.Г. Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 36–39.
29. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 394–420.
30. Петросян Л.А., Чистяков С.В. Об одном подходе к решению игр преследования // Вестник ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1977. Т. 1. С. 77–82.
31. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикл. матем. и мех. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
32. Чистяков С.В. О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // Прикл. матем. мех. 1982. Т. 46. № 5. С. 874–877.
33. Чистяков С.В. Программные итерации и универсальные ε-оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 6. С. 1333–1335.
34. Чистяков С.В. Операторы значения в теории дифференциальных игр // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. № 3 (37). С. 169–172.
35. Чистяков С.В., Никитин Ф.Ф. Теорема существования и единственности решения обобщенного уравнения Айзекса–Беллмана // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 757–766.
36. Меликян А.А. Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 3. С. 521–524.
37. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. матем. и мех. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
38. Серков Д.А. Сильно оптимальные стратегии // Доклады АН СССР. 1991. Т. 321. № 2. С. 258–262.
39. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974. 160 с.
40. Филиппов В.В. О теории задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 11. С. 95–118.
41. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Поступила в редакцию 31.08.2014

Серков Дмитрий Александрович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

D. A. Serkov

Risk minimization under functional constraints on the dynamic disturbance

Keywords: full memory strategy, Savage criterion, functionally limited disturbance.

MSC: 93C15, 49N30, 49N35

In this review the application of the Niehans–Savage criterion to control problems under dynamic disturbances is discussed: motivation and formulation of the risk minimizing problem are given; direct relations for the results in different classes of disturbance constraints and solving strategies are provided; the examples of solving process for various problems with this control criteria are given; the results obtained by using the Niehans–Savage criterion are compared with the results based on the classic minimax criterion; the conditions of unimprovability of the strategies with full memory are studied; the optimal risk function as a limit of iterative program construct for the functional of regret is presented; the regularity condition for this functional is given; some additional conditions on the control system to ensure the possibility of numerical implementation of the risk-optimal strategy are considered.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 480 p.
2. Krasovskii N.N. *Lektsii po teorii upravleniya. Vypusk 3. Differentsial'nye igry* (Lectures on control theory. Issue 3. Differential games), Sverdlovsk: Ural State University, 1970, 88 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, xi+517 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
5. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.
6. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies, *Constantin Caratheodory: an international tribute*, 1991, pp. 636–675.
7. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On continuous evasion strategies in game problems on the encounter of motions, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 5, pp. 765–772.
8. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On classes of strategies in differential games of evasion of contact, *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 3, pp. 349–356.
9. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on motion encounter), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. On the structure of differential games, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 3, pp. 523–526 (in Russian).
11. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965.
12. Niehans J. Zur Preisbildungen bei ungewissen Erwartungen, *Schweizerische Gesellschaft fur Volkswirtschaft und Statistik*, 1948, vol. 84, no. 5, pp. 433–456.
13. Savage L.J. The theory of statistical decision, *Journal of the American Statistical Association*, 1951, vol. 46, no. 253, pp. 55–67. DOI: 10.1080/01621459.1951.10500768
14. Salmon David M. Policies and controller design for a pursuing vehicle, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, vol. AC-14, no. 5, pp. 482–488.
15. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York–London: Academic Press, 1972, 531 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
16. Serkov D.A. Optimal guarantee under the disturbances of Caratheodory type, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 74–83 (in Russian).
17. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable*, New York: Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p.
18. Chentsov A.G. Game problem on minimax functional, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1976, vol. 230, no. 5, pp. 1047–1050 (in Russian).
19. Subbotin A.I. *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii* (Generalized solutions of partial differential equations of the first order. Perspectives of dynamical optimization), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 336 p.
20. Serkov D.A. Minimax risk (regret) strategy in the system with simple motion, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 121–135 (in Russian). `http://www.mathnet.ru/links/76f25b7a5c5927a4c0fb10bee62e3f84/timm111.pdf`
21. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games, *Differ. Equations*, 1983, vol. 19, pp. 1377–1382.
22. Serkov D.A. On the unimprovability of full memory strategies in the risk minimization problem, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 222–230 (in Russian).
23. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Position modeling of a control in a dynamical system, *Izv. Akad. Nauk SSSR: Tekhn. Kibernet.*, 1983, no. 2, pp. 51–60 (in Russian).
24. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical*

solutions, London: Gordon and Breach Publishers, 1995, xx+625 p.
25. Serkov D.A. Optimal risk control under functionally restricted disturbances, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 74–103 (in Russian).
26. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
27. Chentsov A.G. On a game problem of guidance with information memory, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 411–414.
28. Chentsov A.G. An iterative program construction for a differential game with fixed termination time, *Sov. Math., Dokl.*, 1978, vol. 19, pp. 559–562.
29. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. DOI: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657
30. Petrosyan L.A., Chistyakov S.V. On one approach to solving games of pursuit, *Vestnik LGU. Mat. Mekh. Astron.*, 1977, vol. 1, pp. 77–82 (in Russian).
31. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852.
32. Chistyakov S.V. On functional equations in games of encounter at a prescribed instant, *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 704–706.
33. Chistyakov S.V. Programmed iterations and universal ε-optimal strategies in a positional differential game, *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 354–357.
34. Chistyakov S.V. Operators of the value in the theory of differential games, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 3 (37), pp. 169–172 (in Russian).
35. Chistyakov S.V., Nikitin F.F. Existence and uniqueness theorem for a generalized Isaacs–Bellman equation, *Differ. Equations*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 757–766.
36. Melikyan A.A. The value of a game in a linear differential game of convergence, *Sov. Math., Dokl.*, 1977, vol. 18, pp. 1457–1461.
37. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
38. Serkov D.A. Strongly optimal strategies, *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 3, pp. 683–687.
39. Oxtoby J. *Measure and category*, New York: Springer-Verlag, 1971, 96 p.
40. Filippov V.V. On the theory of the Cauchy problem for an ordinary differential equation with discontinuous right-hand side, *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, vol. 83, no. 2, pp. 383–403.
41. Yosida K. *Functional analysis*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1965, 458 p. Translated under the title *Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Mir, 1967, 624 p.

Received 31.08.2014

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics named after N. N. Krasovskii, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru