УДК 515.122.536

© *Р. А. Головастов*

ПРОСТРАНСТВА СТОУНА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Работа посвящена изучению пространств Стоуна различных булевых алгебр и установлению соотношений подмножеств этих пространств с пространством Стоуна–Чеха $\beta\omega$, канторовым совершенным множеством и другими. Рассмотрены три счетных частично упорядоченных множества и для каждого из них два вида алгебр подмножеств. Первое рассматриваемое пространство — это пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$, построенное Беллом. Доказано существование копий пространства $\beta\omega$ и сходящихся последовательностей в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$. Далее рассматривается пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Доказано существование открыто-замкнутых копий пространства $\beta\omega$ в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$, а также существование изолированных точек в его наросте. Описаны подмножества пространства $\mathfrak{N}_2$, замыкание которых есть открыто-замкнутая копия $\beta\omega$. Построены примеры подмножества пространства $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого не открыто-замкнуто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, но является копией $\beta\omega$, и подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто-замкнуто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, но не является копией $\beta\omega$. Также доказано, что $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ в качестве замкнутого подмножества, нарост которого нигде не плотен в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$. Далее рассматривается пространство $S\mathfrak{B}_{1,3}$. Доказано, что подпространство свободных ультрафильтров пространства $S\mathfrak{B}_{1,3}$ удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабельно. Описаны точки пространства $S\mathfrak{B}_{1,3}$ как ультрафильтры, обладающие базисами определенного вида. В конце рассматриваются пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Булевы алгебры, пространствами Стоуна которых они являются, имеют более простую структуру. Доказано, что пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно канторовому совершенному множеству, а его подпространство свободных ультрафильтров гомеоморфно множеству иррациональных чисел. Доказано, что подпространства свободных ультрафильтров пространств $S\mathfrak{B}_{2,1}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфны канторовому совершенному множеству.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, булева алгебра, пространство Стоуна, ультрафильтр.

Введение

Понятие пространства Стоуна булевой алгебры имеет важное значение в теории бикомпактных расширений.

Максимальное бикомпактное расширение топологического пространства, называемое расширением Стоуна–Чеха, основано на конструкции пространства Стоуна. Особое место в теории бикомпактных расширений занимают максимальные бикомпактные расширения Стоуна–Чеха дискретных пространств, являющиеся пространствами Стоуна булевых алгебр подмножеств дискретных пространств.

Этим расширениям посвящены работы У. Рудин [31], З. Фролика [20, 21], М.Е. Рудин [28, 29, 30], К. Кунена [22, 23, 24], Я. ван Милла [25, 26, 27], В.И. Малыхина [12], А.А. Грызлова [7, 16, 17].

Развитие теории бикомпактных расширений вызвало потребность в рассмотрении и изучении бикомпактных расширений дискретных пространств, являющихся пространствами Стоуна других булевых алгебр.

М. Белл [15] построил пространство Стоуна булевой алгебры, для которого подпространство свободных ультрафильтров не сепарабельно, но удовлетворяет условию Суслина. Это пространство является бикомпактным расширением счетного дискретного пространства.

Используя расширение М. Белла, Я. ван Милл [25] и А.А. Грызлов [16] доказали существование новых типов точек в пространстве $\beta\omega$, тем самым решив несколько важных проблем теории бикомпактных расширений.

В силу актуальности расширения М. Белла для теории бикомпактных расширений возникла задача подробного его изучения.

Исследованию расширения М. Белла посвящены работы А.А. Грызлова, Е.С. Бастрыкова и Р.А. Головастова [18, 8, 19, 4, 9]. В этих работах изучена внутренняя структура этого пространства, получены различные типы его точек и их свойства.

Доказано, что в расширении Белла существуют как сходящиеся последовательности, так и копии пространства $\beta\omega$.

Пространство, построенное М. Беллом, является пространством Стоуна булевой алгебры подмножеств множества

$$\mathfrak{N}_1 = \{f|n\colon n \subset \omega,\ f \in P_1\},$$

где $P_1 = \{f \in \omega^\omega\colon 0 \leqslant f(k) \leqslant k+1 \text{ для всех } k \in \omega\}$.

Здесь и далее под n в зависимости от контекста будем понимать и натуральное число, и множество $\{0,\ 1, \ldots,\ n-1\}$.

Булева алгебра этого пространства порождена семейством

$$B_{1,1} = \{C_\pi\colon \pi \in T_1\},$$

где $T_1 = \{\pi \in \mathfrak{N}_1^\omega\colon \operatorname{dom}\pi(n) = n+1 \text{ для всех } n \in \omega\}$.

В работе рассмотрены множества

$$\mathfrak{N}_1 = \{f|n\colon n \subset \omega,\ f \in P_1\}$$

$$\mathfrak{N}_2 = \{f|n\colon n \subset \omega,\ f \in P_2\},$$

где $P_2 = \{f \in \omega^\omega\colon 0 \leqslant f(k) \leqslant 1 \text{ для всех } k \in \omega\} = \{0,\ 1\}^\omega$,

$$\mathfrak{N}_3 = \{f|n\colon n \subset \omega,\ f \in P_3\}, \text{ где } P_3 = \omega^\omega.$$

Отметим, что $\mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_3$.

Определим множества

$$T_i = \{\pi \in \mathfrak{N}_i^\omega\colon \operatorname{dom}\pi(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n \in \omega\}\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

В качестве семейств, порождающих булевы алгебры, мы рассматриваем следующие семейства:

$$B_{1,i} = \{C_\pi\colon \pi \in T_i\},$$

$$B_{2,i} = \{C_s\colon s \in \mathfrak{N}_i\}\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Пространства Стоуна этих булевых алгебр обозначим $S\mathfrak{B}_{j,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2)$. Отметим, что $S\mathfrak{B}_{1,1}$ — это пространство, построенное М. Беллом.

Рассматриваемые булевы алгебры представляют собой основные характерные варианты булевых алгебр подобного типа.

В работе рассмотрены следующие вопросы, выясняющие строение и свойства указанных пространств Стоуна.

Какова внутренняя структура указанных пространств Стоуна?

Каковы взаимосвязи этих пространств между собой?

Как связаны эти пространства с такими широко известными пространствами, как $\beta\omega$ и канторовым совершенным множеством?

Каким свойством обладают сходящиеся последовательности и копии пространства $\beta\omega$ в этих пространствах?

Какая взаимосвязь между открыто-замкнутыми подмножествами пространств и подмножествами, гомеоморфными $\beta\omega$?

Какими необходимыми характеристиками можно описать множества, гомеоморфные $\beta\omega$?

Каковы кардинальнозначные характеристики указанных пространств, каковы число Суслина и плотность подпространств свободных ультрафильтров?

Решению этих вопросов посвящена данная работа.

§ 1. Предварительные сведения

Большинство обозначений и терминов этой работы взяты из книг Р. Энгелькинга [14], А. В. Архангельского, В. И. Пономарёва [2] и Сикорского [13].

Множество всех подмножеств X обозначим $\exp X$. Через ω обозначается вполне упорядоченное множество $\{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ неотрицательных целых чисел, а также мощность этого множества. Множество, имеющее мощность ω, называется счетным. Под n в зависимости от контекста будем понимать и натуральное число, и множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Для множества $A \subseteq X$ обозначим:
$|A|$ — мощность множества A;
$[A]$ — замыкание множества A в пространстве X;
$A^* = [A] \setminus A$.

Приведем определения основных кардинальных инвариантов, используемых нами в работе.

Определение 1.1. Базой пространства X называется семейство открытых множеств B, удовлетворяющее следующему условию: для произвольной точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности Ox найдется $U \in B$ такое, что $x \in U \subseteq Ox$. Наименьшее кардинальное число вида $|B|$, где B — база пространства X, называется *весом* пространства X и обозначается $\mathrm{w}(X)$.

Определение 1.2. Подмножество A пространства X называется *всюду плотным*, если $[A] = X$. Наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A — всюду плотное подмножество пространства X, называется *плотностью* пространства X и обозначается $d(X)$. Пространства со счетной плотностью называют *сепарабельными*.

Определение 1.3. Наименьшее кардинальное число τ такое, что любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность, не превосходящую τ, называется *числом Суслина* пространства X и обозначается $c(X)$. Если $c(X) = \omega$, то говорят, что пространство X удовлетворяет *условию Суслина*.

Более подробно о кардинальных инвариантах написано в [3].

Определение 1.4. Пространство Y называется *бикомпактным расширением* или *компактификацией* пространства X, если Y — бикомпакт и X гомеоморфно некоторому всюду плотному подмножеству Y.

Определение 1.5. *Бикомпактным расширением* (*компактификацией*) *Стоуна–Чеха* пространства X (обозначаем βX) будем называть максимальное бикомпактное расширение пространства X, что означает, что для любого бикомпактного расширения bX пространства X существует непрерывное отображение $f\colon \beta X \to bX$, тождественное на X.

Определение 1.6. Непрерывное отображение $\phi\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если ϕ взаимно-однозначно отображает X на Y и обратное отображение ϕ^{-1} из Y в X непрерывно. Два топологических пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y.

В работе рассматриваются различные частично упорядоченные множества функций $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$. Отношение порядка на них определяется по следующему правилу. Для произвольных $s,\ t \in \mathfrak{N}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ $s \leqslant t$ тогда и только тогда, когда t является продолжением s, то есть $t|_{\operatorname{dom} s} = s$. Соответственно, можно ввести понятия цепи и антицепи.

Определение 1.7. *Цепью* в пространстве $\mathfrak{N}$ называется линейно упорядоченное множество.

Определение 1.8. *Антицепью* в пространстве $\mathfrak{N}$ называется множество, элементы которого попарно несравнимы.

Определение 1.9. Антицепь $A \subseteq \mathfrak{N}$ будем называть *строгой* антицепью, если для любых различных $s, t \in A$ выполнено $\operatorname{dom} s \neq \operatorname{dom} t$.

Определение 1.10. Цепь (антицепь) $A \subseteq \mathfrak{N}$ будем называть *полной* цепью (антицепью), если для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ найдется $s \in A$ такое, что $\operatorname{dom} s = n$.

§ 1.1. Пространство Стоуна булевой алгебры, основные понятия и факты

Определение 1.11. Булевой алгеброй называется непустое множество $\mathfrak{B}$, на элементах которого определены три операции $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, удовлетворяющие для всех $A,\ B \in \mathfrak{B}$ следующим условиям:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3) $(A \cap B) \cup B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$;

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

5) $(A \cap \overline{A}) \cup B = B$, $(A \cup \overline{A}) \cap B = B$.

Мы будем рассматривать булевы алгебры $\mathfrak{B} = \{U \subseteq X\}$ в множестве $\exp X$ с теоретико-множественными операциями «объединение», «пересечение» и «дополнение».

На множестве булевых алгебр из $\exp X$ можно ввести отношение порядка по включению и, соответственно, говорить о наименьшем элементе. Заметим, что пересечение любого числа алгебр вновь будет алгеброй. Тогда для произвольного множества $G \subseteq \exp X$ существует наименьшая алгебра $\mathfrak{B}$, содержащая множество G. Очевидно, $\mathfrak{B}$ может быть определено как пересечение всех алгебр, содержащих множество G.

Определение 1.12. Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{B}$ порождается множеством G, если $\mathfrak{B}$ — наименьшая алгебра, содержащая множество G.

Для алгебры, порожденной множеством, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если $G \subseteq \exp X$ не пусто, то $A \subseteq X$ принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной G, в том и только в том случае, когда его можно представить в виде*

$$A = (A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup (A_{2,1} \cap \ldots \cap A_{2,r_2}) \cup \ldots \cup (A_{s,1} \cap \ldots \cap A_{s,r_s}), \qquad (1)$$

где или $A_{m,n} \in G$, или $\overline{A}_{m,n} \in G$ для любых m, n.

Доказательство. Заметим, что класс элементов вида (1) замкнут относительно операции объединения. По формулам Моргана дополнение к элементу A также может быть представлено в виде (1). Тогда класс элементов вида (1) замкнут и относительно операции дополнения, а этого достаточно, чтобы соответствующий класс образовывал алгебру $\mathfrak{B}$, содержащую G.

С другой стороны, каждый элемент A вида (1) принадлежит любой алгебре, содержащей G. Поэтому $\mathfrak{B}$ является наименьшей алгеброй, содержащей G. $\square$

Для определения пространства Стоуна нам необходимо ввести понятия фильтра и ультрафильтра.

Определение 1.13. Семейство ξ непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется *фильтром*, если выполнены следующие условия:

1) если $A, B \in \xi$, то $A \cap B \in \xi$;

2) если $A \in \xi$ и $A \subseteq B$, то $B \in \xi$.

Определение 1.14. *Ультрафильтром* в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ будем называть такой фильтр $\xi \subseteq \mathfrak{B}$, что он не содержится ни в одном отличном от ξ фильтре в булевой алгебре $\mathfrak{B}$.

Выделяются два основных типа ультрафильтров: фиксированные и свободные.

Определение 1.15. Если $\cap\{A \colon A \in \xi\} \neq \varnothing$, то ультрафильтр ξ будем называть *фиксированным*, в противном случае ультрафильтр называется *свободным.*

Определение 1.16. Булеву алгебру $\mathfrak{B} \subseteq expX$ будем называть приведенной, если для двух различных точек x, $y \in X$ найдется $A \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A$ и $y \notin A$.

Для фиксированных ультрафильтров справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть булева алгебра $\mathfrak{B} \subseteq expX$ является приведенной. Тогда каждый фиксированный ультрафильтр ξ на $\mathfrak{B}$ определяется одной точкой $x \in X$ и $\cap\{A \colon A \in \xi\} = \{x\}$.*

Доказательство. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \cap\{A \colon A \in \xi\}$. В силу приведенности $\mathfrak{B}$ найдется $A_x \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A_x$ и $y \notin A_x$. Каждый элемент ξ содержит точку y, то есть $A_x \notin \xi$. Тогда система $\{A \colon A \in \xi\} \cup \{A_x\}$ является фильтром (все ее элементы пересекаются по точке x), а это противоречит максимальности ξ. $\square$

В дальнейшем мы будем рассматривать приведенные булевы алгебры.

Фиксированный ультрафильтр в точке $x \in X$ будем обозначать как $\widehat{x}$, а множество всех фиксированных ультрафильтров обозначим $\widehat{X}$.

Определение 1.17. Пространством Стоуна $S\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется множество ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ с топологией, задаваемой базой, состоящей их открыто-замкнутых подмножеств $[A]$ следующего вида:

$$[A] = \{\xi \in S\mathfrak{B} \colon A \in \xi\} \text{ для } A \in \mathfrak{B}.$$

Множество свободных ультрафильтров из $[A]$ будем обозначать $A^* = [A] \setminus \widehat{A}$. Множество всех свободных ультрафильтров будем обозначать $S\mathfrak{B}^*$.

О п р е д е л е н и е 1.18. *Базисом* ультрафильтра ξ будем называть его подсемейство σ удовлетворяющее следующему условию: для произвольного $F \in \xi$ найдется $F' \in \sigma$ такое, что $F' \subseteq F$.

Отметим, что если в пространстве Стоуна σ — базис ультрафильтра ξ, то семейство $\widetilde{\sigma} = \{[F]\colon F \in \sigma\}$ является базой в точке ξ как точке пространства Стоуна.

Т е о р е м а 1.1. [13] *Пространство Стоуна $S\mathfrak{B}$ является бикомпактным.*

Доказательство. Пусть $S\mathfrak{B}$ — пространство Стоуна некоторой булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_r\colon r \in R\}$ в пространстве $S\mathfrak{B}$.

Тогда по определению топологии $S\mathfrak{B}$ для каждого $r \in R$ найдется семейство $\{A_q\colon A \in \mathfrak{B}, q \in Q_r\}$ такое, что $F_r = \bigcap\limits_{q \in Q_r} [A_q]$. Получим центрированную систему множеств $\{[A_q]\colon q \in Q\}$, где $Q = \bigcup\limits_{r \in R} Q_r$.

Но тогда центрированной является и система $\{A_q\colon q \in Q\} \subseteq \mathfrak{B}$, а значит, ее можно дополнить до некоторого ультрафильтра $\xi \in \bigcap\limits_{q \in Q} [A_q] = \bigcap\limits_{r \in R} F_r$. □

Докажем некоторые свойства пространства Стоуна $S\mathfrak{B}$ произвольной булевой алгебры $\mathfrak{B} \subseteq \exp X$, необходимые в дальнейшем.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Пусть U и V подмножества X, V — элемент булевой алгебры и $U \cap V = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $V \subseteq X$ — элемент булевой алгебры, то $U' = X \setminus V$ также является элементом булевой алгебры и при этом $U \subseteq U'$. Согласно определению топологии $[V]$ и $[U']$ состоят из ультрафильтров, элементами которых являются V и U' соответственно.

Так как $V \cap U' = \varnothing$, то нет ультрафильтров, содержащих оба множества одновременно. Получаем $[U] \subseteq [U']$ и $[U'] \cap [V] = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$. □

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Пусть U и V подмножества X и V — элемент булевой алгебры, тогда $[U \cap V] = [U] \cap [V]$.*

Доказательство. Действительно, $U = (U \cap V) \cup (U \setminus V)$, и мы имеем, учитывая предложение 1.3,

$$[U] \cap [V] = [(U \cap V) \cup (U \setminus V)] \cap [V] = ([U \cap V] \cup [U \setminus V]) \cap [V] =$$
$$= ([U \cap V] \cap [V]) \cup ([U \setminus V] \cap [V]) = [U \cap V] \cup [(U \setminus V) \cap V] = [U \cap V].$$

□

П р е д л о ж е н и е 1.5. *Для любого открыто-замкнутого $U \subseteq S\mathfrak{B}^*$ найдётся $V \subseteq X$ такое, что $[V] \cap S\mathfrak{B}^* = U$.*

Доказательство. Так как U — открытое множество, то для каждой точки $x \in U$ найдется окрестность $Ox = [V_x]$ $(V_x \in \mathfrak{B})$ такая, что $Ox \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq U$.

Таким образом, семейство

$$\lambda = \{Ox \cap S\mathfrak{B}^* : x \in U\}$$

является открытым покрытием множества U.

С другой стороны, так как U — замкнутое подмножество бикомпактного пространства $S\mathfrak{B}^*$, можно выделить λ' — конечное подпокрытие λ:

$$\lambda' = \{Ox_i \cap S\mathfrak{B}^* : i \leqslant n\}.$$

То есть

$$U = \cup\{[V_{x_i}] : i \leqslant n\} \cap S\mathfrak{B}^* = [\cup\{V_{x_i} : i \leqslant n\}] \cap S\mathfrak{B}^*.$$

Множество $V = \cup\{V_{x_i} : i \leqslant n\}$ есть элемент $\mathfrak{B}$, и $U = [V] \cap S\mathfrak{B}^*$. □

Заметим, что максимальное бикомпактное расширение Стоуна–Чеха дискретного пространства X можно рассматривать как пространства Стоуна булевой алгебры множества всех подмножеств пространства X. А одноточечное расширение Александрова бесконечного дискретного пространства X — рассматривать как пространство Стоуна булевой алгебры, порожденной семейством конечных подмножеств пространства X.

§ 1.2. Определение пространств Стоуна некоторых булевых алгебр

Определим множества функций

$$P_1 = \left\{ f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(k) \leqslant k+1 \text{ для всех } k \in \omega \right\},$$

$$P_2 = \left\{ f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(k) \leqslant 1 \text{ для всех } k \in \omega \right\},$$

$$P_3 = \omega^\omega.$$

В качестве множеств, на которых будем строить булевы алгебры, возьмем сужения данных функций:

$$\mathfrak{N}_1 = \left\{ f|_n : f \in P_1, n \subset \omega \right\},$$

$$\mathfrak{N}_2 = \left\{ f|_n : f \in P_2, n \subset \omega \right\},$$

$$\mathfrak{N}_3 = \left\{ f|_n : f \in P_3, n \subset \omega \right\}.$$

Каждое $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) можно рассматривать как частично упорядоченное множество со следующим отношением порядка: для $s,\ t \in \mathfrak{N}_i$ считаем, что $s \leqslant t$, если t является продолжением s (то есть $t|_{\operatorname{dom} s} = s$).

Для каждого $s \in \mathfrak{N}_1$ количество его продолжений на следующий шаг растет с ростом $\operatorname{dom} s$. Для $s \in \mathfrak{N}_2$ количество его продолжений на следующий шаг всегда равно 2, а для $s \in \mathfrak{N}_3$ оно всегда счетно.

Для произвольного $s \in \mathfrak{N}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) определим

$$C_s = \{t \in \mathfrak{N}_i \colon t \text{ является продолжением } s\}.$$

Рассмотрим два класса булевых алгебр на множествах $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$). Булевы алгебры первого класса определим на $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) следующим образом.

Определим множество

$$T_i = \left\{ \pi \in \mathfrak{N}_i^\omega : \operatorname{dom} \pi(n) = n+1 \text{ для всех } n \in \omega \right\}.$$

Для каждого $\pi \in T_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) обозначим

$$C_\pi = \cup\left\{ C_{\pi(n)} : n \in \omega \right\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) булеву алгебру, порожденную семейством

$$B_{1,i} = \left\{ C_\pi : \pi \in T_i \right\}.$$

Определим $S\mathfrak{B}_{1,i}$ как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1,\ 2,\ 3$).

Докажем несколько лемм, общих для данных пространств.

П р е д л о ж е н и е 1.6. *Для каждого* $s \in \mathfrak{N}_i$ *справедливо* $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{N}_i$, докажем, что $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_i$ следующим образом: рассмотрим $f_0, f_1 \in P_2 \subseteq P_1 \subseteq P_3$ такие, что $f_j \equiv j$ $(j = 0, 1)$. Определим

$$\pi_j(n) = \begin{cases} f_j|_{n+1} & \text{для } n \neq \operatorname{dom} s - 1, \\ s & \text{для } n = \operatorname{dom} s - 1, \end{cases} \qquad j = 0, 1.$$

Так как f_0 и f_1 различны, то, очевидно, ни одно продолжение $\pi_0(n)$ не может являться продолжением никакого $\pi_1(m)$ для $n, m \in \omega$, $n \neq \operatorname{dom} s - 1$, $m \neq \operatorname{dom} s - 1$.

Таким образом, $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1}$ содержит только $\pi_0(\operatorname{dom} s - 1) = \pi_1(\operatorname{dom} s - 1) = s$ и все его продолжения, то есть $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1} = C_s$.

Получаем, что $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$. □

П р е д л о ж е н и е 1.7. *Для каждого* $s \in \mathfrak{N}_i$ *справедливо* $\{s\} \in \mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1,\ 2)$.

Доказательство. Поскольку для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ при $i = 1,\ 2$ количество продолжений его на следующий шаг конечно, то не трудно показать, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо $\{s\} = C_s \setminus \cup\{C_t \colon t \in \mathfrak{N}_i, s < t, \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1\} \in \mathfrak{B}_{1,i}$. □

Таким образом, подпространства фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_2$ в пространствах Стоуна булевых алгебр $\mathfrak{B}_{1,1}$ и $\mathfrak{B}_{1,2}$ являются дискретными. Соответственно, подпространства $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_2$ можно отождествить с дискретными $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ соответственно, а сами пространства Стоуна $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и $S\mathfrak{B}_{1,2}$ — рассматривать как бикомпактные расширения счетных дискретных пространств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$.

В пространстве $S\mathfrak{B}_{1,3}$ подпространство фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_3$ не является дискретным.

П р е д л о ж е н и е 1.8. *Семейство*

$$\Big\{\Big[\big(\bigcap_{\pi\in T'} C_\pi\big)\cap\big(\bigcap_{\pi\in T''} \mathfrak{N}_i \setminus C_\pi\big)\Big] \colon T' \subset T_i,\ T'' \subset T_i,\ |T'| < \omega,\ |T''| < \omega\Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x и ее окрестность $[A]$, где $A \in \mathfrak{B}_{1,i}$. Точка x является ультрафильтром, состоящим из элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$.

Согласно предложению 1.1 каждый элемент A булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ представим в виде

$$A = (A_{0,0} \cap \ldots \cap A_{0,r_0}) \cup (A_{1,0} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup \ldots \cup (A_{q,0} \cap \ldots \cap A_{q,r_q}),$$

где либо $A_{j,k} \in B_{1,i}$, либо $\overline{A}_{j,k} \in B_{1,i}$ для всех $k \leqslant r_j$, $j \leqslant q$. Тогда найдется $j \leqslant q$ такое, что $A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j}$ есть элемент ультрафильтра x и, следовательно,

$$x \in [(A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j})] \subseteq [A] = U_A.$$

□

Данные базы довольно громоздки и неудобны в работе. Нами были построены другие базы для данных пространств, которые описаны далее. Для их построения приведем ряд вспомогательных результатов.

Для произвольного $\pi \in T_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и $M \subseteq \omega$ определим $C_{\pi|M} = \bigcup\limits_{n\in M} C_{\pi(n)}$.

Предложение 1.9. *Для произвольных $\pi \in T_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и $M \subseteq \omega$ найдутся $\pi_1, \pi_2 \in T_i$ такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.*

Доказательство. Пусть $M = \{k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots\}$. Построим π_1 и $\pi_2 \in T_i$ следующим образом. Для всех $0 \leqslant n < k_1$ определим $\pi_1(n)$ как тождественный 0 на множестве n, а $\pi_2(n)$ как тождественную 1 на множестве n. Для $k_j \leqslant n < k_{j+1}$ определим $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ как произвольные продолжения $\pi(k_j)$ на n (при $n = k_j$ они будут совпадать с $\pi(k_j)$).

Из построения π_1 и π_2 вытекает требуемое свойство $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Следовательно, $C_{\pi|M} \in B_{1,i}$ для произвольных $\pi \in T_i$ и $M \subseteq \omega$. □

Лемма 1.1. *Пусть $\{\pi_j \colon j \leqslant n\} \subseteq T_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, $n \in \omega$. Тогда для семейства $\left\{ C_{\pi_j|M_j} : j \leqslant n \right\}$ верно следующее:*

$$\bigcap_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M'_j} \text{ для некоторых } M'_j \subseteq M_j \ (j \leqslant n).$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. Пусть $n = 1$. Построим множества M'_0 и M'_1 такие, что

$$C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1} = C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1}.$$

Определим

$$M'_0 = \left\{ k \in M_0 : \pi_0(k) \in C_{\pi_1|M_1} \right\},$$
$$M'_1 = \left\{ k \in M_1 : \pi_1(k) \in C_{\pi_0|M_0} \right\}.$$

Заметим, что для любых s и t из $\mathfrak{N}_i$ C_s либо содержит C_t, либо содержится в C_t (в частности, они могут быть равны) или эти множества не пересекаются. Отсюда следует, что

$$C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1} = C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1}.$$

Далее по индукции предположим, что $\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}$. Тогда

$$\Big(\bigcap_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} = \Big(\bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} = \bigcup_{j \leqslant n} (C_{\pi_j|M'_j} \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}) =$$
$$= \bigcup_{j \leqslant n} (C_{\pi_j|M''_j} \cup C_{\pi_{n+1}|M^j_{n+1}}) = \bigcup_{j \leqslant n+1} C_{\pi_j|M''_j}, \text{ где } M''_{n+1} = \bigcup_{j \leqslant n} M^j_{n+1}.$$

□

Следствие 1.1. *Пусть $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и $x \in \big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$, тогда найдутся π_{j_0} и $M'_{j_0} \subseteq M_{j_0}$ такие, что $x \in [C_{\pi_{j_0}|M'_{j_0}}] \subseteq \big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$.*

Определим

$$\Gamma_{1,i} = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : \pi \in T_i,\ T' \subset T_i,\ |T'| < \omega,\ M \subseteq \omega \Big\} \ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Заметим тот факт, что $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ можно представить в виде объединения двух множеств из $\Gamma_{1,1}$ и $\Gamma_{1,2}$ соответственно, тогда как, в силу бесконечности $\{s \in \mathfrak{N}_3 \colon \operatorname{dom} s = n\}$ для каждого $n \in \omega$, для $\mathfrak{N}_3$ это неверно. Поэтому нам необходимо определить еще семейство $\Theta_{1,3} = \{\mathfrak{N}_3 \setminus (\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi) : T' \subset T_3,\ |T'| < \omega\}$.

Теперь по предложению 1.9 и следствию 1.1 мы получаем

Т е о р е м а 1.2. *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,1} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,1} \big\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,2} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,2} \big\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,3} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3} \big\}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{1,1}$, $S\mathfrak{B}_{1,2}$ *и* $S\mathfrak{B}_{1,3}$ *соответственно.*

Теперь рассмотрим булевы алгебры второго типа на наших частично упорядоченных множествах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$, порожденные другими семействами множеств.

Обозначим $\mathfrak{B}_{2,i}$ булеву алгебру, порожденную семейством множеств

$$B_{2,i} = \{C_s \colon s \in \mathfrak{N}_i\}.$$

Соответственно, $S\mathfrak{B}_{2,i}$ — пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Аналогично предложению 1.8 определяются базы пространств $S\mathfrak{B}_{2,i}$.

П р е д л о ж е н и е 1.10. *Семейство*

$$\Big\{ \Big[\big(\bigcap_{s \in N'} C_s\big) \cap \big(\bigcap_{s \in N''} \mathfrak{N}_i \setminus C_{t_k}\big) \Big] \colon N' \subset \mathfrak{N}_i,\ N'' \subset \mathfrak{N}_i,\ |N'| < \omega,\ |N''| < \omega \Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Доказательство данного предложения основывается на предложении 1.1 и повторяет доказательство предложения 1.8.

Построим другие базы данных пространств.

П р е д л о ж е н и е 1.11. *Если* $\{s_j \colon j \leqslant n\} \subseteq \mathfrak{N}_i$, *то* $\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{s_j} \neq \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\{s_j \colon j \leqslant n\}$ *является цепью.*

Доказательство. Непосредственно из определения C_s следует, что $C_s \cap C_t$ не пусто тогда и только тогда, когда s и t сравнимы (то есть один является продолжением другого). Отсюда и следует данное предложение. □

С л е д с т в и е 1.2. *Если* $\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{s_j} \neq \varnothing$ *для* $\{s_j \colon j \leqslant n\} \subseteq \mathfrak{N}_i$, *то* $\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{s_j} = C_{s_{j_0}}$, *где* $\operatorname{dom} s_{j_0} = \max\{\operatorname{dom} s_j \colon j \leqslant n\}$.

Определим

$$\Gamma_{2,i} = \Big\{ C_s \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t : s \in \mathfrak{N}_i,\ N' \subset \mathfrak{N}_i,\ |N'| < \omega, \Big\}\ (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t \colon N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.3. *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,1} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,1} \big\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,2} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,2} \big\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,3} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3} \big\}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ *и* $S\mathfrak{B}_{2,3}$ *соответственно.*

§ 2. Основные результаты

§ 2.1. Пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$

В данном подпараграфе рассматривается $S\mathfrak{B}_{1,1}$, построенное Беллом [15]. Данное пространство изначально было первым объектом нашего изучения пространств Стоуна булевых алгебр. Здесь приведены результаты Белла о том, что нарост $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабелен. Данные результаты доказаны Беллом на основании леммы о представлении булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$ в виде счетного объединения 2-сцепленных семейств множеств.

Также приведены результаты о существовании в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ сходящихся последовательностей и открыто-замкнутых копий $\beta\omega$. Полученные результаты опубликованы в [18, 8].

Пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$ строилось Беллом, как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$ порожденной семейством

$$B_{1,1} = \left\{ C_\pi : \pi \in T_i \right\}.$$

Обозначим $\mathfrak{B}'_{1,1} = \left\{U \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon |U| = \omega \right\}$.

Приведем основные результаты, полученные Беллом, для данного пространства.

Т е о р е м а 2.1. [15] *$S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ не сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_n \colon n \in \omega\} \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,1}$. Заметим, что для всех $n \in \omega$ выполнено

$$S\mathfrak{B}^*_{1,1} = \cup\{C^*_s \colon \operatorname{dom} s = n+1\}.$$

Тогда для каждого $n \in \omega$ найдется $s_n \in \mathfrak{N}_1$ такое, что $x \in [C_{s_n}]$ и $\operatorname{dom} s_n = n+1$. Тогда можно определить $\pi \in T_1$ следующим образом: $\pi(n) = s_n$.

Получаем $X \subseteq [C_\pi]$, и при этом $(\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi)^*$ является непустым открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ множеством, которое не пересекается с X. □

Л е м м а 2.1. [15] *Алгебра $\mathfrak{B}_{1,1}$ является счетным объединением 2-сцепленных семейств.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{B}'_{1,1} = \{U \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon |U| = \omega\}$ есть объединение счетного числа 2-сцепленных семейств. Для каждого $j \in \omega$ и $s \in \mathfrak{N}_1$ такого, что $\operatorname{dom} s \geqslant 2j-1$, определим

$$B(j,s) = \{U \in \mathfrak{B}'_{1,1} \colon \text{найдется конечное}\, K \subseteq T_1 \text{ и } L \in \exp_j T_1 \text{ такое, что}$$

$$s \in (\cap\{C_\pi \colon \pi \in K\}) \cap (\cap\{\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi \colon \pi \in L\}) \in \exp_\omega U\}.$$

Покажем, что каждое $B(j,s)$ является 2-сцепленным семейством.

Зафиксируем $j \in \omega$ и $s \in \mathfrak{N}_1$ такие, что $\operatorname{dom} s \geqslant 2j-1$. Пусть $U_0, U_1 \in B(j,s)$. Тогда существует конечное $K_i \in T_1$ и $L_i \in \exp_j T_1$ $(i = 0,\ 1)$ такие, что

$$s \in D_i = (\cap\{C_\pi \colon \pi \in K_i\}) \cap (\cap\{\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi \colon \pi \in L_i\}) \in \exp_\omega U_i\,(i = 0,\,1).$$

Теперь построим $h \in P_1$ такое, что $\{h|_n \colon n \geqslant \operatorname{dom} s\} \subseteq D_0 \cap D_1$.

Строить $h \in P_1$ будем по индукции по $n \geqslant \operatorname{dom} s$. Пусть $h|_{\operatorname{dom} s} = s$. По построению имеем $h|_{\operatorname{dom} s} \in D_0 \cap D_1$.

Предположим, что мы определим $h|_n$ для $n \geqslant \operatorname{dom} s$ так, что $h|_n \in D_0 \cap D_1$.

Определим $h|_{n+1}$ как продолжение $h|_n$ на $n+1$ так, что

$$h|_{n+1} \notin \{\pi(n) \colon \pi \in L_0 \cup L_1\}.$$

Это возможно, поскольку существует $n+2$ различных продолжений $h|_n$ на $n+1$, а $|L_0 \cup L_1| \leqslant 2j \leqslant n+1 < n+2$. Тогда найдется требуемое продолжение $h|_n$ до $h|_{n+1}$. Итак, $h \in P_1$ с нужным нам свойством $\{h|_n \colon n \geqslant \operatorname{dom} s\} \subseteq D_0 \cap D_1$ построено и, следовательно, $|D_0 \cap D_1| = \omega$.

Остается показать, что $\mathfrak{B}'_{1,1} = \cup\{B(j,s) \colon j \in \omega,\ \operatorname{dom} s \geqslant 2j-1\}$. Это следует из того, что, во-первых, всякое бесконечное $U \in \mathfrak{B}_{1,1}$, $|U| = \omega$, содержит некоторое бесконечное множество D, являющееся пересечением элементов или дополнений элементов из $B_{1,1}$, и, во-вторых, всякое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}_1$ содержит элементы со сколь угодно большими областями определения. □

Непосредственно из данной леммы получаем

Т е о р е м а 2.2. [15] *Пространство $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ удовлетворяет условию Суслина.*

Заметим, что в доказательстве леммы 2.1 можно изменить условие, накладываемое на s при определении $B(j,s)$, заменив $2j-1 \leqslant \operatorname{dom} s$ на $nj-1 \leqslant \operatorname{dom} s$. Тогда $\mathfrak{B}'_{1,1}$ представимо в виде счетного объединения n-сцепленных семейств.

Рассмотрим свойства пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$, которые существенно отличают данное пространство от $\beta\omega$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть семейство $\{C_{s_i} \colon i \in \omega\}$ такое, что $\{s_i \colon i \in \omega\}$ — бесконечная строгая антицепь в $\mathfrak{N}_1$, и $X = \{x_i : i \in \omega\}$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\lambda = \{C_{s_i} \colon i \in \omega\}$.

Для ультрафильтра $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$ и $F \in \xi$ определим

$$W_F = \cup\{C_{s_i} \colon i \in F\},$$
$$\lambda_\xi = \{W_F \colon F \in \xi\},$$
$$L_\xi = \cap\{[W_F] \colon W_F \in \lambda_\xi\}.$$

Легко видеть, что

1) $L_\xi \cap L_\eta = \varnothing$ для $\xi \neq \eta$;

2) $\{X \cap W_F \colon F \in \xi\}$ — ультрафильтр на множестве X;

3) $|L_\xi \cap [X]| = 1$.

Пусть $x_\xi = \cap\{[X \cap W_F] \colon F \in \xi\}$.

Из конструкции следует, что $X \cup \{x_\xi \colon \xi \in \beta\omega \setminus \omega\} = [X]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Заметим, что X^* нигде не плотно в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, поскольку $c(S\mathfrak{B}^*_{1,1}) = 2^\omega$.

С л е д с т в и е 2.1. *Существует $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ такое, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. В качестве A достаточно взять бесконечную строгую антицепь в $\mathfrak{N}_1$. □

С л е д с т в и е 2.2. *Если $X = \{x_i : i \in \omega\}$ — дискретное подмножество $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ такое, что $x_i \in C^*_{s_i}$, и при этом $C^*_{s_i} \cap C^*_{s_j} = \varnothing$ для $i \neq j$, тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Для доказательства данного следствия достаточно заметить, что

$$C^*_s = \cup\{C^*_t \colon \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1,\ s \leqslant t\} \text{ для произвольного } C^*_s.$$

□

Из данных теорем и свойств $\beta\omega$ мы получаем некоторые кардинальные характеристики нашего пространства.

С л е д с т в и е 2.3. *Вес, теснота и наследственное число Суслина* (*спред*) *пространства* $SB_{1,1}$ *равны* 2^ω, *а мощность равна* 2^{2^ω}.

Если замыкание строгой антицепи в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ гомеоморфно $\beta\omega$, то цепь из $\mathfrak{N}_1$ является сходящейся последовательностью в $S\mathfrak{B}_{1,1}$.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть* $A = \{s_i : i \in \omega\}$ — *бесконечная цепь на* $\mathfrak{N}_1$. *Тогда* A *является сходящейся последовательностью в* $S\mathfrak{B}_{1,1}$.

Доказательство. Рассмотрим бесконечную цепь $A = \{s_i \colon i \in \omega\}$ в $\mathfrak{N}_1$. Предположим, $x \in [A] \setminus A$ и $Ox = \Big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\Big]$ — базисная окрестность точки x.

Поскольку $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ и $x \in [A]$, имеем $\Big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\Big) \cap A \neq \varnothing$, то есть найдется $i_0 \in \omega$ такое, что $s_{i_0} \in C_{\pi|M}$. Поскольку A — цепь, то $s_i \in C_{\pi|M}$ для всех $i \geqslant i_0$.

С другой стороны, мы имеем
$$\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \cap A = \varnothing.$$
Действительно, в противном случае, поскольку A — цепь, $\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi$ содержало бы всё множество A, за исключением конечного числа точек. И тогда $Ox \cap [A] = \varnothing$.

Итак, x — предел сходящейся последовательности $A = \{s_i \colon i \in \omega\}$. □

Копий $\beta\omega$ и пределов сходящихся последовательностей в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ достаточно много.

Т е о р е м а 2.5. *Пусть*
$$Q = \{x \in S\mathfrak{B}^*_{1,1} \colon x \text{ — предел сходящейся последовательности точек } \mathfrak{N}_1\},$$
$$\mu = \{A^* \colon A \subseteq \mathfrak{N}_1,\ [A] \text{ гомеоморфно } \beta\omega\}.$$
Тогда Q *всюду плотно, а семейство* μ *является* π-*сетью в* $SB^*_{1,1}$.

Доказательство. Рассмотрим $V = C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$ — элемент $\Gamma_{1,1}$ такой, что $|V| = \omega$.

По индукции построим две последовательности $\{s_k \colon k \in \omega\}$ и $\{t_k \colon k \in \omega\}$ элементов V такие, что

(1) $\{s_k \colon k \in \omega\}$ — цепь в $\mathfrak{N}_1$;

(2) $\{t_k \colon k \in \omega\}$ — строгая антицепь в $\mathfrak{N}_1$;

(3) $s_k < t_{k+1}$ для всех $k \in \omega$.

Положим n_0 и $s \in C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i}$ такие, что $n_0 \geqslant m + 1$ и $\operatorname{dom} s = n_0 + 1$.

Определим $s_0 = t_0 = s$.

Пусть мы определили $\{s_k \colon k \leqslant \ell\}$ и $\{t_k \colon k \leqslant \ell\}$, удовлетворяющие условиям (1)–(3). Определим s_{l+1} и t_{l+1}. Поскольку $\ell \geqslant n_0 \geqslant m+1$, то существует не менее двух продолжений s_ℓ, лежащих в $C_{\pi|M} \setminus (\bigcup\limits_{i \leqslant m} C_{\pi_i})$. Определим одно из них как $s_{\ell+1}$, а другое — как $t_{\ell+1}$. Тогда семейства $\{s_k \colon k \leqslant l + 1\}$ и $\{t_k \colon k \leqslant l + 1\}$ удовлетворяют условиям (1)–(3).

В результате получаем две последовательности $\{s_k \colon k \in \omega\}$ и $\{t_k \colon k \in \omega\}$, удовлетворяющие условиям (1)–(3). Из условий (1)–(3) и теорем 2.3, 2.4 получаем, что $\{s_k \colon k \in \omega\} \subseteq V$, $\{s_k \colon k \in \omega\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{k \to \infty} s_k \in V^*$, а также $\{t_k \colon k \in \omega\} \subseteq V$, $[\{t_k \colon k \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $(\{t_k \colon k \in \omega\})^* \subseteq V^*$. □

А.А. Грызловым в [19] были описаны сходящиеся последовательности и множества, замыкания которых гомеоморфны $\beta\omega$.

Т е о р е м а 2.6. [19] *Если множество $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ такое, что $|[A] \setminus A| = 1$, тогда существует конечное множество $K \subseteq A$ такое, что $A \setminus K$ — цепь.*

Т е о р е м а 2.7. [19] *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ — копия $\beta\omega$, тогда A — объединение конечного числа антицепей.*

С л е д с т в и е 2.4. [19] *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ — копия $\beta\omega$, тогда длины всех цепей, входящих в A, ограничены одной константой.*

Точки пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ можно рассматривать как максимальные центрированные системы некоторых классов множеств из $\mathfrak{B}_{1,1}$.

Т е о р е м а 2.8. *Если $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система элементов семейства*

$$\{\, C_{\pi|M} \colon \pi \in T_1,\ M \subseteq \omega \,\},$$

то $\left|\cap\left\{\, C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi \,\right\}\right| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ и бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,1}$ следует, что $\cap\left\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\} \neq \varnothing$.

Покажем, что $\left|\cap\left\{[C_{\pi|M}] \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\}\right| = 1$. Предположим противное: пусть найдутся две различные точки $x, y \in \cap\left\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\}$. Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x

$$Ox = \Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = \Big[C_{\pi_0|M_0}\Big] \setminus \Big[\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big]$$

такую, что $y \notin Ox$.

Множество $\left[C_{\pi_0|M_0}\right]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, отсюда $C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. В силу максимальности ξ получаем $C_{\pi_0|M_0} \in \xi$ и, следовательно, $[C_{\pi_0|M_0}] \ni y$.

Так как $y \notin Ox$, получаем, что $y \in \Big[\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = \bigcup\limits_{\pi \in T'} [C_\pi]$. Тогда найдется $\pi' \in T'$ такое, что $y \in [C_{\pi'}]$.

Так как $[C_{\pi'}]$ открыто-замкнуто и $[C_{\pi'}] \ni y \in \cap\left\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\}$, получаем, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$, а значит, $C_{\pi'} \in \xi$.

Получаем $\cap\left\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\} \subseteq C^*_{\pi'}$, и, следовательно, $x \notin \cap\left\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\right\}$. Это противоречие доказывает теорему. □

Т е о р е м а 2.9. *Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система элементов семейства*

$$\Big\{\, G = \mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : T' \subset T_1,\ |T'| < \omega \Big\},$$

то $\left|\cap\left\{\, G^* : G \in \xi \,\right\}\right| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,1}$ следует, что $\cap\{G^* \colon G \in \xi\} \neq \varnothing$. Предположим, что найдутся $x, y \in \cap\{G^* \colon G \in \xi\}$, $x \neq y$.

Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x $Ox = \Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\Big]$ такую, что $y \notin Ox$. Заметим, что

$$\Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = [C_{\pi_0|M_0}] \setminus \Big[\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = [C_{\pi_0|M_0}] \setminus \Big(\bigcup_{\pi \in T'} [C_\pi]\Big).$$

Имеем: $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigcap\limits_{\pi\in T'}[\mathfrak{N}_1\setminus C_\pi]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x. Отсюда и из максимальности системы ξ следует, что $\bigcap\limits_{\pi\in T'}(\mathfrak{N}_1\setminus C_\pi)\in\xi$, из этого вытекает, что $y\in\bigcap\limits_{\pi\in T'}[\mathfrak{N}_1\setminus C_\pi]$. Так как $y\notin Ox$, получаем, что $y\notin[C_{\pi_0|M_0}]$.

По предложению 1.9 существуют $\pi_1,\pi_2\in T_1$ такие, что $C_{\pi_0|M_0}=C_{\pi_1}\cap C_{\pi_2}$. Но тогда $y\notin[C_{\pi_1}\cap C_{\pi_2}]=[C_{\pi_1}]\cap[C_{\pi_2}]$.

Пусть $y\notin[C_{\pi_1}]$. Тогда $y\in[\mathfrak{N}_1\setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[\mathfrak{N}_1\setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $\mathfrak{N}_1\setminus C_{\pi_1}\in\xi$. Отсюда $[\mathfrak{N}_1\setminus C_{\pi_1}]\ni x$, следовательно, $x\notin[C_{\pi_1}]$, что противоречит тому, что

$$[C_{\pi_1}]\supseteq\big[C_{\pi_0|M_0}\big]\ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Данные теоремы послужили основанием для введения следующих определений.

О п р е д е л е н и е 2.1. Точку $x\in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ назовем u-точкой, если

$$x=\cap\big\{\,C^*_{\pi|M}\colon C_{\pi|M}\in\xi\,\big\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi=\{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств

$$\big\{\,C_{\pi|M}\colon \pi\in T_1,\ M\subseteq\omega\,\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Точку $x\in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ назовем ℓ-точкой, если

$$x\in\cap\big\{\,C^*\colon C\in\xi\,\big\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi=\{C\}$ в семействе множеств

$$\Big\{\mathfrak{N}_1\setminus\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi : T'\subset T_1,\ |T'|<\omega\Big\}.$$

Из определений следует, что u-точки суть точки $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, которые имеют базу окрестностей в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из множеств вида $C^*_{\pi|M}$, где $\pi\in T_1$, $M\subseteq\omega$, а ℓ-точки суть точки $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, которые имеют базу окрестностей в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из множеств вида $\big(\mathfrak{N}_1\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi\big)^*$, где $T'\subset T_1$, $|T'|<\omega$.

В [4] доказана теорема об эквивалентных определениях ℓ-точек.

Т е о р е м а 2.10. [4] Для точки $x\in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ следующие утверждения эквивалентны:

(a) точка x есть предел некоторой цепи $\{s_k\colon k\in\omega\,\}$ элементов $\mathfrak{N}_1$;

(b) точка x имеет базу в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей вида

$$\Big(\mathfrak{N}_1\setminus\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi\Big)^*;$$

(c) из того, что $x\in[C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi\in T_1$, $M\subseteq\omega$, следует, что существует $i\in M$ такое, что $x\in[C_{\pi(i)}]$.

Данная теорема показывает, что l-точки являются пределами цепей. В [9] доказана теорема 2.11, определяющая предельные точки антицепей в терминах центрированных систем множеств.

Будем говорить, что $C_{\pi|M}$ приведенное, если $\pi(M)$ — строгая антицепь, и положим

$$\mathcal{M}'_{\pi|M} = \left\{C_{\pi|M_i} \colon M_i = M \cap \{n \colon n \geqslant i\}, i \in \omega\right\},$$

$$\mathcal{M}_L = \Big\{G = \mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon T' \subset T_1,\ |T'| < \omega\Big\},$$

$$\mathcal{M}_{\pi|M} = \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}.$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Центрированную систему $\xi = \{G\}$ в семействе $\mathcal{M}_{\pi|M}$ будем называть *$\pi|M$-центрированной для $C_{\pi|M}$*, если $\mathcal{M}'_{\pi|M} \subseteq \xi$.

Всякую $\pi|M$-центрированную систему можно дополнить до максимальной $\pi|M$-центрированной системы.

Т е о р е м а 2.11. [9] *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и $|M| = \omega$. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для $C_{\pi|M}$, то*

$$|\cap \{G^* \colon G \in \xi\}| = 1.$$

§ 2.2. Пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$

Прежде всего выясним соотношение пространств $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Л е м м а 2.2. *Пусть $\mathfrak{B}_{1,1} = \{G\}$ — булева алгебра расширения Белла.*
Тогда семейство $\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$ — это булева алгебра $\mathfrak{B}_{1,2}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что семейство $\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$ есть булева алгебра на $\mathfrak{N}_2$. Покажем, что $\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\} = \mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого достаточно заметить, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_2$ выполняется

$$C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_1 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\} \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}.$$

Отметим, что для $s \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ справедливо $C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \varnothing$. □

Т е о р е м а 2.12. *Существует гомеоморфизм $\phi \colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ такой, что $\phi|_{\mathfrak{N}_2}$ — тождественное отображение.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку нароста $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$. Точка $x = \{G \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon x \in [G]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}\}$ — это ультрафильтр в булевой алгебре $\mathfrak{B}_{1,1}$.

Тогда $\xi_x = \{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in x\}$ является ультрафильтром в $\mathfrak{B}_{1,2}$, то есть точкой расширения $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Определим отображение ϕ по правилу:

$\phi(x) = \xi_x$ для $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$; на множестве $\mathfrak{N}_2$ отображение ϕ тождественно.

Отображение ϕ является отображением «на».

Пусть $\xi = \{G'\}$ — ультрафильтр в $\mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $|\cap \{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \colon G' \in \xi\}| = 1$. Действительно, если бы нашлись x, $y \in \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \colon G' \in \xi\}$, $x \neq y$, то нашлись бы и $G_x \in x$, $G_y \in y$ (x и y можно рассматривать как ультрафильтры на $\mathfrak{B}_{1,1}$) такие, что $G_x \cap G_y = \varnothing$.

В силу того, что $[G_x]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ и $[G_y]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ — открыто–замкнутые множества, получаем следующее: $G'_x = G_x \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$ и $G'_y = G_y \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$, $G'_x, G'_y \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и $G'_x,\ G'_y \in \xi$, что невозможно.

Положим $x = \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \colon G' \in \xi\}$. По определению отображения ϕ имеем $\phi(x) = \xi$.

Аналогично доказывается и взаимная однозначность отображения ϕ. Непрерывность ϕ очевидна. Таким образом, $\phi \colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ — искомый гомеоморфизм. □

Таким образом, $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество. При этом $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ является нигде не плотным в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ в силу вида базисных окрестностей.

Оказалось, что в наросте данного пространства есть изолированные точки, а в самом пространстве есть открыто-замкнутые копии $\beta\omega$.

Теорема 2.13. *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ верно следующее:*

1) $A = \{s_i \in \mathfrak{N}_2 \colon i \in \omega\}$ — *полная цепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A] \setminus A$ состоит из одной точки.*

2) *Если $A = \{s_n = f|_n \colon n \in M\}$ — цепь, где $f \in P_2$ и $|M| = |\omega \setminus M| = \omega$. Тогда $[A]$ не является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.*

3) $A = \{\pi(n) \colon n \in M \subseteq \omega\}$ — *бесконечная строгая антицепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. 1. Покажем, что $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого построим $\pi_1, \pi_2 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

Определим $\pi_1(i) = s_i$ для всякого $i \in \omega$. $\pi_2(0)(0) = (s_0(0) + 1) mod\ 2$ и $\pi_2(i)|_i = s_{i-1}$, $\pi_2(i)(i) = (s_i(i)+1) mod\ 2$ при $i > 0$ (другими словами, $\pi_2(i)$ — это продолжение s_{i-1} на i, отличное от s_i). Из построения очевидно, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

В теореме 2.4 доказано, что бесконечная цепь из $\mathfrak{N}_1$ есть сходящаяся последовательность. Поскольку $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество и в силу теоремы 2.12 получаем, что $[A] \setminus A$ состоит из одной точки. Поскольку $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

2. Предположим противное: пусть $[A]$ — открыто-замкнутое множество в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Множества A и $A' = \{s_n = f|_n \colon n \in \omega \setminus M\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. Отсюда $[A] = A \cup \{x\}$ и $[A'] = A' \cup \{x\}$, где x — предел последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. При этом $A' \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$.

В силу нашего предположения множество $S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$ замкнуто. Тогда получаем, что $\{x\} \cup A' = [A'] \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$. Это противоречит тому, что $x \in [A]$.

3. По предложению 1.9 имеем $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Положим $M' = \{n+1 \colon n \in M\}$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi|M} \setminus (C_{\pi_0|M'} \cup C_{\pi_1|M'})$.

Для $n \in M$ положим $\pi_0(n+1)|_{n+1} = \pi_1(n+1)|_{n+1} = \pi(n)$. Положим $\pi_0(n+1)(n+1) = 0$ и $\pi_1(n+1)(n+1) = 1$. Другими словами, $\pi_0(n+1)$ и $\pi_1(n+1)$ — это два различных продолжения $\pi(n)$ на следующий шаг. В точках $n \notin M'$ $\pi_0(n)$ и $\pi_1(n)$ выбираем произвольно.

Требуемое равенство выполнено в силу построения, так как $C_{\pi_0|M'} \cup C_{\pi_1|M'}$ вырезает из $C_{\pi|M}$ все продолжения элементов антицепи, оставляя только их. В теореме 2.3 доказано, что замыкание бесконечной строгой антицепи из $\mathfrak{N}_1$ гомеоморфно $\beta\omega$. Отсюда и из теоремы 2.12 следует, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Поскольку $A \in B_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. $\square$

Заметим, что согласно пункту (1) доказанной теоремы предел цепи из $\mathfrak{N}_2$ есть изолированная точка нароста $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$.

Для неизолированных точек нароста доказан следующий результат.

Теорема 2.14. *В любой окрестности Ox произвольной неизолированной точки из нароста $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ содержится открыто-замкнутая копия $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную базисную окрестность неизолированной точки нароста $Ox = [C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi]$, $T' \subset T_2$, $|T'| < \omega$. Докажем, что найдется бесконечная строгая антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi = G$.

Поскольку x — точка нароста, то $|G| = \omega$. Введем обозначение, $s+1$ — это множество продолжений s на $\operatorname{dom} s + 1$, то есть $s + 1 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s,\ \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1\}$.

Определим множества $I_{Ox} = \{s \in G\colon |s+1 \cap G| = 0\}$, $V_{Ox} = \{s \in G\colon |s+1 \cap G| = 2\}$ и $U_{Ox} = \{s \in G\colon |s+1 \cap G| = 1\}$. Они задают разбиение $G = I_{Ox} \cup V_{Ox} \cup U_{Ox}$.

Докажем, что если $|I_{Ox}| = \omega$, то теорема верна. Поскольку $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = n\}$ конечно для всех $n \in \omega$, то найдется бесконечное $M \subseteq \omega$ такое, что $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}_2^n \neq \varnothing$ для всех $n \in M$, $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$.

В качестве s_i выбираем произвольный элемент из $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}_2^{n_i}$. В итоге получаем бесконечную строгую антицепь $\{s_i\colon i \in \omega\} \subseteq I_{Ox} \subseteq G$. Далее будем считать, что I_{Ox} конечно.

Теперь рассмотрим V_{Ox}. Если оно конечно, то $|U_{Ox}| = \omega$, и найдется n_0 такой, что $\operatorname{dom} s < n_0$ для всех $s \in I_{Ox} \cup V_{Ox}$. Тогда для всех $m > n_0$ выполнено $\mathfrak{N}_2^m \cap G = \mathfrak{N}_2^m \cap U_{Ox}$. Рассмотрим произвольное $s \in \mathfrak{N}_2^m \cap G$ при $m > n_0$. Поскольку $s \in U_{Ox}$, то $s+1 = \{s', s''\}$, где $s' \in U_{Ox}$ и $s'' \in \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi$. Так как $s \in G$ и $s'' \notin G$, то найдется $\pi \in T'$ такое, что $s'' = \pi_i(m+1)$.

Заметим, что для различных $s_1, s_2 \in \mathfrak{N}_2^m \cap G$ при $m > n_0$ найдутся π', $\pi'' \in T'$ такие, что $s_1 < \pi'(m+1)$ и $s_2 < \pi''(m+1)$, то есть $|\mathfrak{N}_2^m \cap G| \leqslant |T'|$ для всех $m > n_0$. При этом для любого $s \in \mathfrak{N}_2^m \cap G$ при $m > n_0$ найдется $s' \in \mathfrak{N}_2^{m+1} \cap G$, которое является его продолжением.

Таким образом, $G \setminus \{s \in G\colon \operatorname{dom} s \leqslant n_0\}$ представляет собой не более $|T'|$ бесконечных цепей. Согласно пункту 1 теоремы 2.13 нарост G состоит из конечного числа изолированных точек. Это противоречит тому, что x — не изолированная точка.

Осталось рассмотреть случай, когда $|V_{Ox}| = \omega$. Возможны два варианта.

1. $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$ для всех $s \in V' \subseteq V_{Ox}$, где $|V'| = \omega$. В качестве s_1 берем произвольный $s \in V'$, при этом $|V' \setminus C_{s_1}| = \omega$. В качестве s_2 берем $s \in V' \setminus C_{s_1}$ такое, что $\operatorname{dom} s_2 > \operatorname{dom} s_1$.

На k-ом шаге получаем: $\{s_i\colon i \leqslant k\}$ — строгая антицепь и $|V' \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{s_i}| = \omega$. После счетного числа шагов получим бесконечную строгую антицепь

$$\{s_i\colon i \in \omega\} \subseteq V' \subseteq V_{Ox} \subseteq G.$$

2. Найдется $s_0 \in V_{Ox}$ такое, что $|C_{s_0} \cap V_{Ox}| = \omega$.

Построим бесконечную цепь $\{t_i\colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$. В качестве t_1 возьмем s_0. Если для всех $s \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$ выполнено $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$, то переходим к пункту 1, где $V' = C_{t_1} \cap V_{Ox}$.

В противном случае найдется $t_2 \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$ такое, что $|C_{t_2} \cap V_{Ox}| = \omega$. Для t_2 повторяем рассуждения, что и для t_1. И так далее. В итоге либо будет построена бесконечная строгая цепь $\{t_i\colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$, либо на конечном шаге мы обратимся к пункту 1 и построим искомую антицепь.

В качестве s_i будем брать то продолжение t_i на $\operatorname{dom} t_i + 1$, которое не равно $t_{i+1}|_{\operatorname{dom} t_i}$. В итоге получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i\colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox} \subseteq G$.

Согласно пункту 3 теоремы 2.13 $[\{s_i\colon i \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Следствие 2.5. *Для любой неизолированной точки нароста $x \in SB^*_{1,2}$ и произвольной ее окрестности Ox справедливо $c(Ox) = 2^\omega$.*

Удалось описать множества из $\mathfrak{N}_2$, замыкания которых являются открыто-замкнутыми копиями $\beta\omega$.

Теорема 2.15. *Пусть $A \subseteq \mathfrak{N}_2$, $|A| = \omega$. Замыкание $[A]$ является открыто-замкнутой копией $\beta\omega$ тогда и только тогда, когда A есть объединение конечного числа строгих антицепей из $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Согласно теореме 2.12 и следствию 2.4 длины всех цепей, входящих в A, ограничены некоторой константой h. Посколку $[A]$ открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и является бикомпактом, то существует конечное покрытие $[A] = \bigcup\limits_{i \leqslant \widetilde{n}} [U_i]$, где $U_i = C_{\pi_i|M_i} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$.

Напомним, что $U_i = \left\{C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j} \colon n \in M_i\right\}$ и при этом длины цепей, входящих в U_i, ограничены одной константой h.

Заметим, что для любых $s_1 < s_2 \in U_i$ и произвольного $t \in \mathfrak{N}_2$ такого, что $s_1 \leqslant t \leqslant s_2$, выполнено $t \in U_i$ (другими словами, в цепях, содержащихся в U_i нет «дырок»), поскольку в противном случае $t \in \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$, но тогда $s_2 \in C_t \subseteq \bigcup j \leqslant n_i C_{\pi^i_j}$ и $s_2 \notin U_i$. Отсюда следует, что для всех $n \in M_i$ и любого $t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup j \leqslant n_i C_{\pi^i_j}$ выполнено $n \leqslant \operatorname{dom} t \leqslant n + h - 1$.

Поскольку у каждого элемента продолжений на следующий шаг ровно два, то

$$\left|\left\{t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j} \colon \operatorname{dom} t = n + k\right\}\right| \leqslant 2^k.$$

Тогда для всех $n \in M_i$ выполнено $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$.

Представим M_i в виде объединения h непересекающихся подмножеств $M_i = \bigcup\limits_{l\leqslant h} M_i^l$ таких, что для всякого $l \leqslant h$ и любых $m_1, m_2 \in M_i^l$ и $m_1 \neq m_2$ выполнено $|m_2 - m_1| \geqslant h$.

Рассмотрим множество $U_i^l = C_{\pi_i|M_i^l} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$. Заметим, что для любых двух различных $m_1, m_2 \in M_i^l$ и любых $t_1 \in C_{\pi_i(m_1)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $t_2 \in C_{\pi_i(m_2)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $\operatorname{dom} t_1 \neq \operatorname{dom} t_2$. Тогда построим разбиение U_i^l на конечное число строгих антицепей.

Для каждого $n \in M_i^l$ отметим по точке в $C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ (если данное множество не пусто). Это и будет первой строгой антицепью $D_1^{i,l}$.

Затем для каждого $n \in M_i^l$ отмечаем по точке в непустых $(C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}) \setminus D_1^{i,l}$, это будет $D_2^{i,l}$. И так далее.

Процесс остановится не более чем через 2^h шагов, так как $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$ для всех $n \in M_i$. Значит U_i^l можно представить в виде объединения не более чем 2^h строгих антицепей, а U_i — в виде объединения не более чем $h \cdot 2^h$ строгих антицепей.

В итоге получаем, что $A = \bigcup\limits_{i\leqslant n_0} D'_i$, где D'_i — строгая антицепь, а $n_0 \leqslant \widetilde{n} \cdot h \cdot 2^h$.

Докажем достаточность. Пусть $A = \bigcup\limits_{i\leqslant n} D_i$, где D_i — строгая антицепь элементов $\mathfrak{N}_2$ и $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Покажем, что для произвольного $A' \subseteq A$ справедливо $A' \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Действительно, множество $D'_i = D_i \cap A'$ для всех $i \leqslant n$ является строгой антицепью, а значит, по пункту (3) теоремы 2.13 $D'_i \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $A' = \bigcup\limits_{i\leqslant n} D'_i \in \mathfrak{B}_{1,2}$.

Рассмотрим произвольные $A_1,\ A_2 \subseteq A$ такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. По доказанному A_1 и A_2 элементы булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$, а значит $[A_1] \cap [A_2] = \varnothing$. Тогда $[A]$ гомеоморфно βA и A — счетное дискретное множество. □

С л е д с т в и е 2.6. *Если $U \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ — открыто-замкнутое множество, гомеоморфное $\beta\omega \setminus \omega$. Тогда $U = [A] \setminus A$ и при этом A является объединением конечного числа антицепей из $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Данное следствие непосредственно вытекает из теоремы 2.15 и предложения 1.5. □

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о существовании не открыто-замкнутых копий $\beta\omega$ в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и открыто-замкнутых подмножеств, не гомеоморфных $\beta\omega$ и не содержащих предельных точек цепей. Ответами на данные вопросы служат следующие примеры.

П р и м е р 2.1. Пример не открыто-замкнутой копии $\beta\omega$ в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $[A]$ не открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i)\colon i \in M, M \subseteq \omega\}$. Представим ее в виде счетного объединения конечных не пересекающихся множеств возрастающей мощности, то есть $F = \bigcup\limits_{i\in\omega} F_i$, где $|F_i| = i$. Для каждого F_i определим мажорирующую ее нестрогую антицепь A_i, для этого каждому $s \in F_i$ сопоставим его продолжение s' такое, что $\operatorname{dom} s' = max\{\operatorname{dom} t\colon t \in F_i\} = n(i)$.

Определим $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Согласно теоремам 2.3 и 2.12 $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$, при этом открыто-замкнутым в $SB_{1,2}$ оно быть не может, так как в противном случае A, согласно теореме 2.15, можно было бы представить в виде конечного объединения строгих антицепей, то есть количество элементов антицепи, имеющих один и тот же dom, не превосходило бы количества строгих антицепей. А это невозможно в силу того, что для любого $n \in \omega$ найдется $i(n) \in \omega\colon |A_{i(n)}| > n$, а все элементы $A_{i(n)}$ имеют одинаковый dom.

З а м е ч а н и е 1. Согласно теореме 2.14, нарост нашего пространства представим следующим образом: $S\mathfrak{B}^*_{1,2} = [A \cup B]$, где A— множество всех изолированных точек нароста, B— объединение наростов отрыто-замкнутых копий $\beta\omega$, A и B открытые подмножества $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $A \cap B = \varnothing$. По теореме 2.14 имеем $[B] = S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus A$ и, в силу приведенного примера 2.1, $[A] \neq S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus B$.

П р и м е р 2.2. Пример открыто-замкнутого подмножества не гомеоморфного $\beta\omega$ и без изолированных точек в наросте.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ является открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, не гомеоморфно $\beta\omega$ и $[A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i)\colon i \in \omega\}$. По индукции построим семейство конечных цепей со следующими свойствами:

(1) $A_i \subset C_{\pi(i)}$ и $|A_i| = i$;

(2) A_i — цепь без «дырок», то есть для любых s, $t \in A_i$ и произвольного $k \in \mathfrak{N}_2$ из того, что $s \leqslant k \leqslant t$ следует $k \in A_i$;

(3) для произвольных $i \in \omega$, $t \in A_i$ и $s \in A_{i+1}$ выполнено $\operatorname{dom} t < \operatorname{dom} s$.

В качестве A_1 возьмем $\{\pi(1)\}$. Пусть построены A_i для всех $i \leqslant n$, тогда в качестве первого элемента цепи A_{i+1} возьмем то продолжение $\pi(n+1)$, для которого выполнено условие (3), далее нетрудно достроить цепь до нужной длинны ($|A_{i+1}| = i+1$) с выполнением условия (2).

Все элементы цепи A_i, за исключением последнего, имеют в качестве одного продолжения на следующий шаг другой элемент A_i, а в качестве второго продолжения элемент из дополнения к данной цепи. И только оба продолжения последнего элемента цепи, не будут элементом данной цепи.

Определим $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Нетрудно показать, что A является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$. Легко построить $\widetilde{\pi} \in T_2$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\widetilde{\pi}(M) = A$.

Тогда $A = C_{\widetilde{\pi}|M} \setminus (C_{\pi'|M'} \cup C_{\pi''|M''})$, где $C_{\pi'|M'}$ обрезает те продолжения элементов наших цепей, которые туда не попадут, $C_{\pi''|M''}$ нужно для удаления вторых продолжений последних элементов наших цепей.

Согласно теореме 2.15 $[A]$ не гомеоморфно $\beta\omega$. Заметим также, что A не содержит ни одной бесконечной цепи, а значит в силу теорем 2.6 и 2.12, $A^* = [A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

В итоге мы получили подмножество $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и не гомеоморфно $\beta\omega$, а нарост не содержит изолированных точек.

Таким образом, нарост нашего пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ помимо копий $\beta\omega \setminus \omega$ и изолированных точек содержит и другие точки.

Следующие результаты показывают тесную связь полных цепей и полных антицепей в $\mathfrak{N}_2$.

Т е о р е м а 2.16. *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ справедливо следующее:*

1) *если $\{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ — полная строгая антицепь, то $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n\colon n \in \omega\}$ — полная строгая цепь и $t_n = \pi(n+1)|_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.*

2) *Пусть $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Если $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ таково, что $|\mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M}| = 1$ для всех $n \in \omega$, то $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ — полная строгая антицепь.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что $|\mathfrak{N}_2^n \setminus C_\pi| = 1$ для всякого $n \in \omega$ и $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \cup\{\mathfrak{N}_2^n\colon n \in \omega\} \setminus C_\pi$ — полная строгая цепь.

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 0$ верно.

Пусть верно для $n \leqslant \widetilde{n}$, то есть $\{t_n\} = \mathfrak{N}_2^n \setminus C_\pi$ для всех $n \in \{0, \dots, \widetilde{n}\}$ и они образуют цепь.

Рассмотрим $\mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = \widetilde{n}+2\}$. Для любого $s \in \mathfrak{N}_2^n \setminus \{t_n\}$ $(n \leqslant \widetilde{n})$ верно $s \in C_\pi$. Тогда всякий элемент $t \in \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_{t_{\widetilde{n}}}$ является продолжением некоторого $s \in \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}} \setminus \{t_{\widetilde{n}}\} \subset C_\pi$, и поэтому он не равен $\pi(\widetilde{n}+1)$, так как $\{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ есть антицепь.

Следовательно, $\pi(\widetilde{n}+1)$ есть одно из продолжений элемента $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$, то есть $\pi(\widetilde{n}+1)|_{\widetilde{n}+1} = t_{\widetilde{n}}$. Тогда другое продолжение $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$ и есть элемент $t_{\widetilde{n}+1}$. Получаем, что $\{t_{\widetilde{n}+1}\} = \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_\pi$.

Построенное таким образом множество $\{t_n\colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi$ и есть искомая полная цепь.

2. Обозначим $M_n = \omega \cap \{0, 1, \dots, n\}$ для всех $n \in \omega$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M} = \mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M_n}$. Предположим, что $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ не является полной строгой цепью.

Тогда найдется $n' = \min\{n\colon n \notin M$ или $(n \in M$ и $\pi(n) \in C_{\pi|M_{n-1}})\}$. В случае если $n' = 0$, получаем $C_{\pi|M_0} = \varnothing$, чего быть не может. Имеем $C_{\pi|M_{n'}} = C_{\pi|M_{n'-1}}$. По условию теоремы $\mathfrak{N}_2^{n'-1} \setminus C_{\pi|M_{n'-1}} = \{t'\}$, тогда $\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'-1}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \cap C_{t'}$ состоит из двух продолжений t' на n', а это противоречит $|\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'}}| = 1$.

Таким образом, наше предположение неверно и $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ является полной строгой антицепью. $\square$

С л е д с т в и е 2.7. *Для всякой полной антицепи $A = \{s_n\colon n \in \omega\}$ найдется $f \in P_2$ такое, что $[A] \setminus A \subseteq F_f$, где $F_f = \bigcap\limits_{n \in \omega} [C_{f|_n}]$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.16 для полной антицепи A найдется полная цепь $\{t_n\colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus (\cup\{C_{s_n}\colon s_n \in A\})$. При этом для всех $n \in \omega$ справедливо $t_n < s_{n+1}$. Данная полная цепь и определяет искомое $f \in P_2$ $(f|_{n+1} = t_n$ для всех $n \in \omega)$.

Получаем, что $A \cap C_{f|_n} = \{s_i\colon i > n\}$. То есть $C_{f|_{n+1}} = C_{t_n}$ содержит все элементы нашей антицепи начиная с некоторого. Но $[C_{f|_{n+1}}]$ открыто-замкнуто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $\{(C_{f|_{n+1}})^*\colon n \in \omega\}$ образуют базу F_f в $S\mathfrak{B}_{1,2}^*$. Отсюда следует, что $[A] \setminus A \subseteq F_f$. $\square$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Для всякой полной цепи $A = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ найдется полная антицепь $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ такая, что $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$.*

Доказательство. Определим $\pi' \in T_2$ следующим образом: $\pi'(n)|_n = \pi(n-1)$ для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ и $\pi'(n)(n) = (\pi(n)(n) + 1)$ *mod* 2 для всех $n \in \omega$.

Таким образом, $\pi'(n+1)$ является продолжением $\pi(n)$ на $n+1$ отличным от $\pi(n+1)$ для всех $n \in \omega$, а значит, $\{\pi'(n) \colon n \in \omega\}$ является полной антицепью. Заметим, что $A \cap C_{\pi'} = \varnothing$ и в силу теоремы 2.14 имеем $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$. □

Следствие 2.8. $A = \{\pi(n) \colon n \in M \subseteq \omega\}$ — *строгая антицепь. A можно дополнить до полной антицепи тогда и только тогда, когда* $G = \{\pi(n)|_n \colon n \in M \setminus \{0\}\}$ *образует цепь.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $A' = \{\pi(n) \colon n \in \omega\}$ — полная антицепь и $A \subseteq A'$. Тогда по теореме 2.16 получаем, что

$$G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n = \pi(n+1)|_{n+1} \colon n \in \omega\}$$

есть полная цепь. Очевидно, что $G \subseteq G'$, а значит, G является цепью.

Докажем достаточность. Пусть найдется полная цепь $G' = \{\pi_1(n) \colon n \in \omega\}$ такая, что $G \subseteq G'$ и $A \cap G' = \varnothing$. Тогда по предложению 2.1 найдется π_2 такое, что $G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi_2}$ и $A' = \{\pi_2(n) \colon n \in \omega\}$ является полной антицепью.

Поскольку $\pi(n)|_n = \pi_1(n-1) = \pi_2(n)|_n$ для всех $n \in M \setminus \{0\}$ и $A,\ A'$ — антицепи, то $\pi(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ и $\pi_2(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ для всех $n \in M$. Тогда $\pi(M) = \pi_2(M)$, то есть $A \subseteq A'$. □

Также приведем пример строгой антицепи, которую нельзя продолжить до полной антицепи.

Пример 2.3. Для начала пронумеруем произвольным образом элементы $\mathfrak{N}_2$, то есть $\mathfrak{N}_2 = \{s_n \colon n \in \omega\}$. Строить нашу антицепь $A = \{t_n \colon n \in \omega\}$ будем по индукции. Положим $s_{n_1} = s_1$, в качестве t_1 берем произвольное собственное продолжение s_{n_1}. Пусть выбраны $s_{n_1}, \ldots, s_{n_k}$ и их собственные продолжения $t_1, \ldots, t_k$ такие, что $\{t_i \colon i \leqslant k\}$ — антицепь и $\operatorname{dom} t_1 < \ldots < \operatorname{dom} t_k$.

Тогда положим $n_{k+1} = \min\{n \colon s_n \nleqslant t_i$ и $t_i \nleqslant s_n$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k\}$. В качестве t_{k+1} берем собственное продолжение $s_{n_{k+1}} \colon \operatorname{dom} t_k < \operatorname{dom} t_{k+1}$. В силу выбора n_{k+1} имеем, что $\{t_i \colon i \leqslant k+1\}$ — строгая антицепь.

Этот процесс продолжается до бесконечности. В итоге получим строгую антицепь $A = \{t_n \colon n \in \omega\}$.

Докажем следующие свойства полученной антицепи:

1) для любого $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ найдется номер $k \in \omega$ такой, что $s < t_k$;

2) для всякого $f \in P_A = \{f \in P_2 \colon f|_n \notin \bigcup\limits_{t \in A} C_t$ для всех $n \in \omega\}$ выполнено $A^* \cap F_f \neq \varnothing$;

3) Существует ультрафильтр $\xi \in A^*$ такой, что для любой строгой полной антицепи D найдется $A' \in \xi$ такое, что $A' \cap D = \varnothing$.

1. Предположим противное. Пусть нашелся $s_{\widetilde{n}}$ такой, что $s_{\widetilde{n}} \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ и $s_{\widetilde{n}} \nless t_k$ для всех $k \in \omega$. Но тогда для $n_k > \widetilde{n}$ (такое n_k найдется в силу бесконечности $\{s_{n_k} \colon k \in \omega\}$) получаем противоречие с выбором n_k, так как его роль должен был играть $\widetilde{n}$, в силу его минимальности.

2. Достаточно доказать, что $|C_{f|_n} \cap A| = \omega$ для любого $f \in P_A$ и $n \in \omega$. Предположим противное: $|C_{f|_n} \cap A| < \omega$. Данное пересечение не пусто, поскольку $f \in P_A$. Пусть $C_{f|_n} \cap A = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}\}$. В силу $\operatorname{dom} f|_n < \operatorname{dom} t_{k_1} < \ldots < \operatorname{dom} t_{k_m}$ получаем $|C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}| = \omega$. То есть найдется s такое, что $f|_n < s$, $\operatorname{dom} s > \operatorname{dom} t_m$ и $s \in C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}$. Значит, $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$.

Тогда из построения A следует, что найдется $k \notin \{k_1, \dots, k_m\}$ такое, что $s < t_k$. Получаем $t_k \in C_{f|_n} \cap A$. Что противоречит предположению.

Множество P_A бесконечно. Из следствия 2.7 и того факта, что нарост A пересекается со многими F_f, следует, что A нельзя продолжить до полной антицепи.

3. Рассмотрим систему $\gamma = \{A^* \setminus D^* \colon D$ — строгая полная антицепь$\}$. По следствию 2.7 для любой строгой полной антицепи D найдется $f \in P_2$ такое, что $D^* \subseteq F_f$.

В силу доказанного свойства 2 имеем $A^* \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} D_i^* \neq \varnothing$. Тогда система γ центрирована и ее элементы замкнуты в силу пункта 3 теоремы 2.13. В бикомпактном расширении $S\mathfrak{B}_{1,2}$ пересечение центрированной системы замкнутых множеств не пусто, а значит, найдется $\xi \in \cap\{U \colon U \in \gamma\}$. ξ и есть искомый ультрафильтр.

В $S\mathfrak{B}_{1,1}$ были введены понятия u-точки и l-точки. Аналогичные построения можно провести и для $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Определение 2.4. $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ назовем u-точкой, если $\{x\} = \cap\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M} \in \xi\}$ в семействе множеств

$$\{C_{\pi|M} \colon \pi \in T_2,\ M \subseteq \omega\}.$$

Определение 2.5. $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ назовем l-точкой, если $\{x\} = \cap\{C^* \colon C \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\{\mathfrak{N}_2 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon T' \subset T_2,\ |T'| < \omega\}.$$

Доказательства существования u и l-точек в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ полностью повторяют соответствующие доказательства, проведенные для пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ (теоремы 2.8, 2.9).

В $SB_{1,2}$, как и в пространстве $SB_{1,1}$ (теорема 2.10), полностью перенеся соответствующее доказательство, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.17. *Для точки $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Точка x является l-точкой, то есть имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида $[\mathfrak{N}_2 \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi]$.*

2. *Точка x является пределом сходящейся последовательности $\{\, f|_n \colon n \in \omega\,\} \subseteq \mathfrak{N}_2$.*

Отсюда получаем, что каждое из условий 1 или 2 является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ была l-точкой.

Так как $S\mathfrak{B}_{1,2}$ по теореме 2.12 вложимо в пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$, возникает вопрос: как соотносятся понятия u- и l-точек в данных пространствах? Ответом на данный вопрос служат следующие теоремы.

Теорема 2.18. *Если $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}$, то x не является u-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Доказательство. Построим бесконечную строгую антицепь $D \subsetneqq \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$. Сначала упорядочим $\mathfrak{N}_2 = \{t_n \colon n \in \omega\}$. Для всякого $t_n \in \mathfrak{N}_2$ фиксируем $\widetilde{t}_n \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ такое, что $t_n < \widetilde{t}_n$, $\operatorname{dom} \widetilde{t}_n > \operatorname{dom} \widetilde{t}_n - 1$ и $\widetilde{t}_n(m) = 2$, где $m = \operatorname{dom} t_n + 1$. Таким образом, в качестве $\widetilde{t}_n$ берем достаточно длинное продолжение t_n, которое уже в точке $m = \operatorname{dom} t_n + 1$ выходит из $\mathfrak{N}_2$.

Построенное таким образом D является строгой антицепью, поскольку в противном случае нашлись бы $t_{n_1} \neq t_{n_2}$ из $\mathfrak{N}_2$ такие, что $\widetilde{t}_{n_1} < \widetilde{t}_{n_2}$. Поэтому либо $\widetilde{t}_{n_1} \leqslant t_{n_2}$ (чего быть не может, поскольку $\widetilde{t}_{n_1} \notin \mathfrak{N}_2$), либо $t_{n_2} < \widetilde{t}_{n_1}$. Тогда либо $t_{n_1} < t_{n_2}$ (в этом случае $t_{n_2}(\operatorname{dom} t_{n_1} + 1) = 2$), либо $t_{n_2} < t_{n_1}$.

Получаем, что $\widetilde{t}_{n_2}|_m = t_{n_1}|_m$, где $m = \operatorname{dom} t_{n_2} + 1$. А это противоречит тому, что $t_{n_1} \in \mathfrak{N}_2$. Антицепь D является строгой в силу того, что $\operatorname{dom} \widetilde{t}_n < \operatorname{dom} \widetilde{t}_{n+1}$.

Тогда найдутся $\pi \in T_1$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\pi(M) = D$. При этом $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \subseteq [C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ — открыто-замкнутое множество и $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$.

Тогда $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$.

Докажем, что $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ не может быть u-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,1}$. Предположим противное, тогда у точки x есть база из множеств вида $C_{\pi|M}$. Поэтому если $t \in \mathfrak{N}_2 \cap Ox$, то $\widetilde{t} \in D \cap Ox$. Поскольку $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, то $x \in [D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, а это противоречит тому, что $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$. □

С л е д с т в и е 2.9. *Если x является u-точкой из $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x не является u-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Т е о р е м а 2.19.

1. *Если x является l-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, то x является l-точкой и в объемлющем пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

2. *Если x является l-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, то для любого $X \subseteq \mathfrak{N}_1\colon [X]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus X = \{x\}$ выполнено $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$.*

Доказательство. 1. Поскольку любая цепь из $\mathfrak{N}_2$ также является цепью и в $\mathfrak{N}_1$, а $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $SB_{1,1}$ как замкнутое подмножество (теорема 2.12), то теорема верна согласно эквивалентному определению l-точки (теорема 2.17).

2. По теореме 2.6 найдется бесконечное $X' \subseteq X$ такое, что $|X \setminus X'| < \omega$, и X' является цепью из $\mathfrak{N}_1$, которая сходится к x. С другой стороны, согласно теореме 2.17, найдется бесконечная цепь $X'' \subset \mathfrak{N}_2$, которая также сходится к x.

Если $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| = \omega$, то найдется $s' \in X'$ такое, что $C_{s'} \cap X'' = \varnothing$ и $|X' \setminus C_{s'}| < \omega$. Таким образом, цепи X' и X'' можно отделить базисными окрестностями, что противоречит тому, что они сходятся к одной точке.

Получаем, что $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$, а значит, и $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$. □

§ 2.3. Пространство $S\mathfrak{B}_{1,3}$

Данное пространство отличается от двух рассмотренных ранее тем, что множество фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_3$ не является его дискретным подпространством.

Л е м м а 2.3. *Множество свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ всюду плотно в $S\mathfrak{B}_{1,3}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $U \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3}$. Легко построить бесконечную цепь $\{s_n\colon n \in \omega\} \subseteq U$. Для этого достаточно заметить, что для произвольного $s \in U$ количество его продолжений на следующий шаг бесконечно, а по определению $\Gamma_{1,3}$и $\Theta_{1,3}$ только конечное их число может не содержаться в U.

Для каждого $k \in \omega$ определим $A_k = \{s_n\colon n \geqslant k\}$. Тогда для всякого A_k $(k \in \omega)$ выполнены следующие свойства:

1) $[A_k] \cap \widehat{\mathfrak{N}}_3 = A_k$;

2) $[A_k] \subseteq U$.

Получаем центрированную систему замкнутых множеств $\{[A_k]\colon k \in \omega\}$ и, в силу бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,3}$, $\bigcap\limits_{k\in\omega} [A_k] \neq \varnothing$, и при этом $\bigcap\limits_{k\in\omega} [A_k] \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,3}$. □

Выделим несколько типов точек данного пространства с базами определенного вида.

Л е м м а 2.4. $\Theta_{1,3}=\{\mathfrak{N}_3\setminus(\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi):T'\subset T_3,\ |T'|<\omega\}$ *является базисом некоторого ультрафильтра* ξ_0.

Доказательство. Семейство $\Theta_{1,3}$ центрировано. Пусть $\xi_0\in S\mathfrak{B}_{1,3}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{1,3}$. Никакое множество из $\Gamma_{1,3}$ вида $C_{\pi|M}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi$ $(T'\subset T_3,\ |T'|<\omega)$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит, поскольку $\mathfrak{N}_3\setminus C_{\pi|M}\in\Theta_{1,3}$. Таким образом, $\Theta_{1,3}$ — базис ультрафильтра ξ_0. □

Л е м м а 2.5. *Пусть* $s\in\mathfrak{N}_3$. *Семейство множеств*

$$\sigma_s=\{C_s\setminus\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi\colon T'\subseteq T_3,\ |T'|<\omega,\ s\notin\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi\}$$

является базисом фиксированного по s *ультрафильтра* $\widehat{s}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что всякое множество семейства σ_s содержит s и является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$, следовательно, принадлежит ультрафильтру $\widehat{s}$.

Если множество $C_{\pi|M}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi\in\widehat{s}$ для некоторых $\pi\in T_3$, $M\subseteq\omega$ и конечного $T'\subseteq T_3$, то $C_{\pi|M}\in\widehat{s}$. А это значит, что $C_{\pi(n)}\ni s$ для некоторого $n\in M$. Таким образом, $C_{\pi(n)}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi\in\sigma_s$ и $C_{\pi(n)}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi\subseteq C_{\pi|M}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi$. □

Л е м м а 2.6. *Пусть* $\alpha=\{s_n\colon n\in\omega\}$ — *бесконечная цепь в* $\mathfrak{N}_3$. *Тогда семейство непустых множеств*

$$\sigma_\alpha=\{C_s\setminus\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi\colon T'\subseteq T_3,\ |T'|<\omega,\ \alpha\cap(\bigcup_{\pi\in T'}C_\pi)=\varnothing\}$$

является базисом свободного ультрафильтра ξ_α.

Доказательство. Из определения семейства σ_α следует, что семейство σ_α центрировано. Дополним σ_α до ультрафильтра, обозначим его ξ_α. Покажем, что σ_α является базисом этого ультрафильтра.

Пусть $C_{\pi|M}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi\in\xi_\alpha$ для некоторых $\pi\in T_3$, $T'\subseteq T_3$, $|T'|<\omega$ и $M\subseteq\omega$. Тогда найдутся $s_n\in\alpha$ и $m\in M$ такие, что $C_{\pi(m)}\ni s_n$. Действительно, в противном случае $\alpha\cap C_{\pi|M}=\varnothing$ и найдется $\pi'\in T_3$ такое, что $\pi'|M=\pi|M$ и $\alpha\cap C_{\pi'}=\varnothing$.

Тогда для $s_n\in\alpha$ имеем $U=C_{s_n}\setminus\big((\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi)\cup C_{\pi'}\big)\in\sigma_\alpha$ и, следовательно, $U\in\xi_\alpha$. С другой стороны, поскольку $C_{\pi'}\supseteq C_{\pi|M}$, имеем $U\cap(C_{\pi|M}\setminus\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi)=\varnothing$, что противоречит центрированности ξ_α как ультрафильтра.

Поскольку α — бесконечная цепь, то ξ_α является свободным ультрафильтром. При этом для всякой бесконечной цепи $\alpha'\subseteq\alpha$ имеем $\xi_{\alpha'}=\xi_\alpha$. □

Множество свободных ультрафильтров ξ_α, построенных по бесконечным цепям α из $\mathfrak{N}_3$, будем обозначать $\widehat{F}_1$, а сами ультрафильтры ξ_α будем называть ультрафильтрами первого рода.

Л е м м а 2.7. *Если* $\xi\in S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ — *свободный ультрафильтр и* $\xi\notin\widehat{F}_1\cup\{\xi_0\}$, *то найдется множество* $C_{\pi|M}$ *такое, что* $\pi\in T_3$, $M\subseteq\omega$, $|M|=\omega$, *и* $\{\pi(n)\colon n\in M\}$ *есть строгая антицепь и*

$$\xi\ni C_{\pi|M}\ \textit{и}\ C_{\pi(n)}\notin\xi\ \textit{для всякого}\ n\in M.$$

Доказательство. Предположим, что для всякого $C_{\pi|M}$ такого, что $C_{\pi|M} \in \xi$, найдется $n \in M$ такое, что $C_{\pi(n)} \in \xi$.

Рассмотрим семейство $\lambda = \{s \in \mathfrak{N}_3 \colon C_s \in \xi\}$. Тогда λ — цепь.

В силу нашего предположения ультрафильтр ξ обладает базисом следующего вида: $\sigma = \{C_s \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi \colon \lambda \cap (\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi) = \varnothing,\ T' \subseteq T_3,\ |T'| < \omega\}$. Тогда ξ есть или фиксированный ультрафильтр, или свободный ультрафильтр 1 рода, что противоречит условию леммы. □

Свободные ультрафильтры из множества $\widehat{F}_2 = S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus (\widehat{F}_1 \cup \{\xi_0\})$ будем называть свободными ультрафильтрами второго рода.

Из лемм 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 следует

Т е о р е м а 2.20. $S\mathfrak{B}_{1,3} = \{\xi_0\} \cup \widehat{\mathfrak{N}}_3 \cup \widehat{F_1} \cup \widehat{F}_2$.

Л е м м а 2.8. *Пусть $\xi \in \widehat{F}_1 \cup \widehat{F}_2$ — свободный ультрафильтр.*
Тогда существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,3}$ такое, что

1) $|M| = \omega$;

2) $\xi \ni C_{\pi|M}$;

3) если $\{M_k \colon k \leqslant k_0\}$ — конечное разбиение M, то найдется k', $k' \leqslant k_0$, такое, что $|M_{k'}| = \omega$ и $\xi \ni C_{\pi|M_{k'}}$.

Доказательство. Если $\xi \in \widehat{F}_1$ — свободный ультрафильтр 1 рода, порожденный полной цепью $\alpha = \{s_n \colon n \in \omega\}$, то определим $\pi \in T_3$ по правилу $\pi(n) = s_n$. Положим $M = \omega$. Тогда C_π — искомое множество.

Если $\xi \in \widehat{F}_2$ — свободный ультрафильтр 2 рода, то по лемме 2.7 существует $C_{\pi|M}$ такое, что $|M| = \omega$, $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и при этом

$$\xi \in [C_{\pi|M}] \setminus \cup \big\{[C_{\pi(n)}] \colon n \in M\big\}.$$

Тогда $C_{\pi|M}$ — искомое. □

Т е о р е м а 2.21. $c(S\mathfrak{B}^*_{1,3}) = \omega$.

Доказательство. Рассмотрим в $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ произвольную дизъюнктную систему открытых множеств $\nu = \{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$. По теореме 1.2 найдется система множеств $\nu' = \{V_\alpha \colon \alpha \in A\}$ такая, что $V_\alpha \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3}$ и $[V_\alpha] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Покажем, что ν' дизъюнктно. Предположим противное. Тогда найдутся $\alpha,\ \beta \in A$ такие, что $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Заметим, что $V_\alpha \cap V_\beta \in \mathfrak{B}_{1,3}$, а значит, $[V_\alpha \cap V_\beta]$ — открыто-замкнутое множество, и по лемме 2.3 справедливо $[V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \neq \varnothing$.

Получаем $\varnothing \neq [V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq [V_\alpha] \cap [V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, что противоречит дизъюнктности ν.

Предположим, что $|A| > \omega$. Тогда из дизъюнктности ν следует существование на счетном $\mathfrak{N}_3$ несчетной системы дизъюнктных множеств, чего быть не может. □

Т е о р е м а 2.22. *Подпространство свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ не сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $A = \{\xi_n \colon n \in \omega\}$ — счетное подмножество $S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus \{\xi_0\}$. Мы покажем, что существует строгая антицепь $\{s_n \colon n \in \omega\}$ такая, что $A \subseteq \big[\cup\{C_{s_n} \colon n \in \omega\}\big]$.

Рассмотрим произвольное $n \in \omega$ и $\xi_n \in A$. Обозначим $C_{\pi_n|M_n}$ множество булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$, удовлетворяющее условиям леммы 2.8.

Тогда существует число $m_n \in \{0, \dots, 10^{n+1} - 1\}$ такое, что для класса вычетов $\overline{m_n}$ по $mod\ 10^{n+1}$, определяемого числом m_n, выполняется $C_{\pi_n|\overline{m_n} \cap M} \in \xi$. Класс вычетов $\overline{m_n}$ состоит из точек вида $p^r_n = 10^{n+1} \cdot r + m_n$, где $r \in \omega$, $n \in \omega$.

Обозначим $\overline{m_n}' = \{p^r_n \in \overline{m_n} \colon r \geqslant 1\}$.

Для любых чисел $p^r_n,\ p^{r-1}_n \in \overline{m_n}'$ $(r \geqslant 1)$ мы определим числа k^r_n и $t^r_n \in \mathfrak{N}_3$ такие, что выполнены следующие условия:

(1) $p^{r-1}_n \leqslant k^r_n < p^r_n$;

(2) $\operatorname{dom} t^r_n = k^r_n + 1$;

(3) $\pi_n(p^r_n) \geqslant t^r_n$;

(4) $k^r_n \neq k^{r'}_{n'}$, если не выполнено $n = n'$ и $r = r'$.

Мы будем обозначать $\widetilde{M}_n = \{k^r_n \colon r \geqslant 1\}$. Построение множеств $\{\widetilde{M}_n \colon n \in \omega\}$ будем осуществлять по индукции.

Для $n = 0$ положим $\widetilde{M}_0 = \{\overline{m_0}'\}$.

Пусть построены множества $\widetilde{M}_i$ для $i < n$. Построим множество $\widetilde{M}_n$.

Рассмотрим произвольные $r \geqslant 1$ и $p^r_n \in \overline{m_n}'$, то есть $p^r_n = 10^{n+1} \cdot r + m_n$. Рассмотрим также $p^{r-1}_n = 10^{n+1} \cdot (r - 1) + m_n$.

Обозначим $I = \big[10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n,\ 10^{n+1} \cdot r + m_n\big]$ отрезок натуральных чисел. Нетрудно видеть, что $|I \cap (\cup\{\widetilde{M}_i \colon i < n\})| < 10^{n+1}$. Тогда найдется число $k^r_n \in I \setminus \cup\{\widetilde{M}_i \colon i < n\}$. Обозначим $\widetilde{M}_n = \{k^r_n \colon r \geqslant 1\}$.

Для чисел k^r_n выберем и зафиксируем элемент $t^r_n \in \mathfrak{N}_3$ такой, что

$$t^r_n \leqslant \pi_n(p^r_n) \text{ и } \operatorname{dom} t^r_n = k^r_n + 1.$$

Тогда для множеств $\{\widetilde{M}_i \colon i \leqslant n\}$ и $\{t^r_i \colon i \leqslant n,\ r \geqslant 1\}$ выполнены условия (1)–(4).

Таким образом, построены множество $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \widetilde{M}_n$ и множество $\{t(k^r_n) = t^r_n \colon k^r_n \in \widetilde{M}\}$.

В силу условия (4) множество $\cup\{C_{t(k^r_n)} \colon k^r_n \in \widetilde{M}\}$ есть элемент булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$.

В силу условия (3) мы имеем $\xi_n \ni \cup\{C_{t(k^r_n)} \colon k^r_n \in \widetilde{M}\}$ для всех $n \in \omega$, и, следовательно, $\{\xi_n \colon n \in \omega\}$ лежит в открыто-замкнутом множестве $\big[\cup\{C_{t(k^r_n)} \colon k^r_n \in \widetilde{M}\}\big]$. При этом $S\mathfrak{B}_{1,3} \setminus \big[\cup\{C_{t(k^r_n)} \colon k^r_n \in \widetilde{M}\}\big] \neq \varnothing$. □

§ 2.4. Пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$

Данные пространства существенно отличаются от рассмотренных ранее. Это связано с тем, что булевы алгебры здесь порождены другими семействами множеств. Прежде всего отметим, что пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,1}$ являются нульмерными бикомпактами и обладают счетной базой, поэтому пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$, $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$ и $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ как пространства без изолированных точек гомеоморфны канторову совершенному множеству.

Мы рассмотрим внутреннее строение этих пространств, дадим классификацию их точек. На этой основе нами будут построены гомеоморфизмы данных пространств и их подмножеств на канторово совершенное множество и пространства ему гомеоморфные.

Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ отличается от двух других рассматриваемых в данном параграфе тем, что фиксированные ультрафильтры в нем не являются изолированными точками.

Рассмотрим пространство $S\mathfrak{B}_{2,2}$.

Л е м м а 2.9. *Для всякого свободного ультрафильтра $\xi \in S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ найдется функция $f \in P_2$ такая, что семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} \colon n \in \omega\}$ является базисом ультрафильтра ξ.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $n \in \omega$, $n \geqslant 1$, найдется $r \in \mathfrak{N}_2$ такой, что $\operatorname{dom} r = n$ и $C_r \in \xi$.

Действительно, пусть найдется $n_0 \in \omega$ такое, что $C_r \notin \xi$ для всякого $r \in \mathfrak{N}_2$, $\operatorname{dom} r = n_0$. Тогда множество $\mathfrak{N}_2 \setminus \cup\{C_r \colon \operatorname{dom} r = n_0\}$ или пусто, если $n_0 = 1$, или есть элемент ультрафильтра ξ и, следовательно, ξ — фиксированный ультрафильтр, что противоречит нашему предположению.

По предложению 1.11 множество $\{r \colon C_r \in \xi\}$ является цепью, и, следовательно, найдется $f \in P_2$ такая, что $\{C_r \colon C_r \in \xi\} = \{C_{f|_n} \colon n \in \omega\} = \sigma_f$. Будем обозначать ультрафильтр ξ как ξ_f.

Покажем, что σ_f является базисом ультрафильтра ξ_f. Пусть $C_s \setminus (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t)$ ($N' \subset \mathfrak{N}_2$, $|N'| < \omega$) — элемент базиса ультрафильтра ξ_f. Пусть $k = \max\{\operatorname{dom} s,\ \operatorname{dom} t \colon t \in N'\}$. По предложению 1.11 $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s$ и $C_{f|_{k+1}} \cap (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t) = \varnothing$. Тогда $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s \setminus (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t)$. □

Очевидно, что если $f,\ g \in P_2$ различны, то $\xi_f \neq \xi_g$ и всякая функция $f \in P_2$ определяет свободный ультрафильтр, для которого семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} \colon n \in \omega\}$ является базисом.

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$, определенное по правилу $h(f) = \xi_f$ для всякого $f \in P_2$. Если множество P_2 наделить тихоновской топологией, то справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2.23. *Отображение $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Заметим, что семейство множеств вида $O(s) = \{f \in P_2 \colon f|_{\operatorname{dom} s} = s\}$, где $s \in \mathfrak{N}_2$, определяет базу тихоновской топологии на P_2.

Отображение $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ определили по следующему правилу: если $f \in P_2$, то $h(f) = \xi_f$. Из свойств отображения h и топологии P_2 следует, что h является взаимно-однозначным, непрерывным, вместе с обратным, отображением пространства P_2 на $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$. □

Заметим, что пространство P_2 с тихоновской топологией гомеоморфно канторову совершенному множеству (см., например, [1]) и, следовательно, $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что пространство $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$ гомеоморфно P_1 с тихоновской топологией.

Основные результаты данного параграфа связаны с пространством $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Сначала рассмотрим внутреннюю структуру этого пространства, дав характеристики его точкам.

Рассмотрим три вида ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ обозначим через $\widehat{s}$ фиксированный ультрафильтр из $S\mathfrak{B}_{2,3}$, определяемый s, то есть состоящий из всех элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,3}$, содержащих s.

Обозначим $\widehat{\mathfrak{N}}_3 = \{\widehat{s} \colon s \in \mathfrak{N}_3\}$ — множество всех фиксированных ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Л е м м а 2.10. *Пусть $\widehat{s} \in \widehat{\mathfrak{N}}_3$. Тогда семейство*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t \colon s \notin \bigcup_{t \in N'} C_t,\ N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega\}$$

является базисом ультрафильтра $\widehat{s}$.

Доказательство. Отметим, что $\sigma_s \subseteq \widehat{s}$, поскольку всякий элемент семейства σ_s содержит s. Рассмотрим базис ультрафильтра $\widehat{s}$, состоящий из элементов вида $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$, где $r \in \mathfrak{N}_3$, $N' \subset \mathfrak{N}_3$, $|N'| < \omega$. И пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ — один из элементов этого базиса.

Поскольку $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t \ni s$, $r \leqslant s$ и всякий элемент $t \in N'$ либо не сравним с s, либо $s < t$, то для множества $C_s \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t \in \sigma_s$ выполняется $C_s \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$. Таким образом, семейство σ_s есть базис ультрафильтра $\widehat{s}$. $\square$

Л е м м а 2.11. *Пусть $f \in P_3$ и $\{s_n = f|_n \colon n \in \omega\}$ — полная цепь в $\mathfrak{N}_3$. Тогда семейство $\sigma_f = \{C_{s_n} \colon n \in \omega\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.*

Доказательство. Поскольку σ_f является центрированной системой множеств, ее можно дополнить до ультрафильтра $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$. Покажем, что σ_f является базисом этого ультрафильтра. Отметим, что отсюда будет следовать единственность ультрафильтра ξ_f, мажорирующего σ_f.

Рассмотрим базис ультрафильтра ξ_f, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$:

$$\Gamma_{2,3} = \Big\{ C_s \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t : s \in \mathfrak{N}_i,\ N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\},$$

$$\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t : N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}.$$

Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса.

Рассмотрим множество $C_{s_{n_0}} \in \sigma_f$ такое, что $\operatorname{dom} s_{n_0} > max\{\operatorname{dom} r,\ \operatorname{dom} t\ (t \in N')\}$. Так как $\sigma_f \subseteq \xi_f$, то по предложению 1.11 имеем $C_r \supseteq C_{s_{n_0}}$ и $C_{s_{n_0}} \cap C_t = \varnothing$ для всех $t \in N'$. Следовательно, $C_{s_{n_0}} \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$. Таким образом, семейство σ_f есть базис ультрафильтра ξ_f. $\square$

Заметим, что если $f,\ g \in P_3$ различны, то ультрафильтры ξ_f и ξ_g, определяемые цепями $\sigma_f = \{C_{f|_n} \colon n \in \omega\}$ и $\sigma_g = \{C_{g|_n} \colon n \in \omega\}$, различны.

Отметим также, что всякая полная цепь в $\mathfrak{N}_3$ — это множество вида $\{f|_n \colon n \in \omega\}$ для некоторой $f \in P_3$.

Обозначим $\widehat{F} = \{\xi_f \colon f \in P_3\}$, где ξ_f — ультрафильтр, мажорирующий семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} \colon n \in \omega\}$ для $f \in P_3$.

Л е м м а 2.12. *Семейство $\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t \colon N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.*

Доказательство. Семейство $\Theta_{2,3}$ центрировано. Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$— ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{2,3}$. Имеем, с одной стороны, $\Theta_{2,3} \subseteq (\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3})$, с другой стороны, никакое множество из $\Gamma_{2,3}$ вида $C_s \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит. Таким образом, $\Theta_{2,3}$— базис ультрафильтра ξ_0. $\square$

В качестве итога этих лемм мы можем сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 2.24. $S\mathfrak{B}_{2,3} = \{\xi_0\} \cup \widehat{F} \cup \widehat{\mathfrak{N}}_3$.

Доказательство. Пусть $\xi \in SB_{2,3}$ — произвольный ультрафильтр.

Положим $A = \{C_s \colon C_s \in \xi, s \in \mathfrak{N}_3\}$. Возможны три случая:

(1) $A = \varnothing$;

(2) A конечно;

(3) A бесконечно.

(1) Пусть $A = \varnothing$. Тогда $\sigma_0 = \{\mathfrak{N}_3 \setminus C_s \colon s \in \mathfrak{N}_3\} \subseteq \xi$ и, следовательно, $\xi = \xi_0$.

(2) Пусть A конечно, $A = \{C_{s_i} \colon i \leqslant k\}$. По предложению 1.11 множество A является конечной цепью, будем считать, что $C_{s_0} \subseteq \ldots \subseteq C_{s_k}$. Тогда $\bigcap\limits_{i \leqslant k} C_{s_i} = C_{s_k}$ и $C_{s_k} \in \xi$.

Покажем, что ξ есть фиксированный ультрафильтр $\widehat{s_k}$, что означает, что всякий элемент ξ содержит s_k. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$.

Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса. Отметим, во-первых, что $r \leqslant s_k$. Действительно, если r не сравним с s_k, то $(C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t) \cap C_{s_k} = \varnothing$; если $s_k < r$, то получаем противоречие с максимальностью s_k в A.

Итак, $r \leqslant s_k$, следовательно, $s \in C_r$. Для всякого $t \in N'$ имеем либо $s_k < t$, либо t не сравним с s_k. В противном случае $C_{s_k} \notin \xi$.

Следовательно, $s_k \in C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$. Таким образом, всякий элемент $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ базиса ультрафильтра ξ содержит s_k и $\xi = \widehat{s_k}$.

(3) Пусть A бесконечно. Тогда по предложению 1.11 A является бесконечной цепью. Пусть $\sigma_f = \{f|_n \colon n \in \omega\}$ для некоторой функции $f \in \omega^\omega$ — полная цепь, содержащая A. Тогда σ_f является базисом ультрафильтра $\xi_f \in \widehat{F}$ и $\xi_f = \xi$. □

Таким образом, пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ состоит из точки ξ_0, множества пределов цепей элементов из $\mathfrak{N}_3$ и множества фиксированных ультрафильтров.

Т е о р е м а 2.25. *Подпространство $\widehat{F}$ пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Доказательство. Множество P_3 является счетным произведением счетных множеств. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ определим множество $O(s) = \{f \in P_3 \colon f|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. Тогда семейство $\{O(s) \colon s \in N_3\}$ является базой тихоновской топологии на P_3. Известно, что $P_3 = \omega^\omega$ с тихоновской топологией гомеоморфно множеству $\mathbb{P}$ иррациональных чисел (см., например, [1]).

Покажем, что подмножество $\widehat{F} \subseteq S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно P_3 с тихоновской топологией. Построим отображение $\phi \colon P_3 \to \widehat{F}$ по следующему правилу: если $f \in P_3$, то $\phi(f) = \xi_f$. Нетрудно видеть, что ϕ есть взаимно-однозначное отображение P_3 на $\widehat{F}$. Его непрерывность и непрерывность обратного отображения следуют из того, что $\phi(O(s)) = [C_s] \cap \widehat{F}$. □

П р и м е р 2.4. Множество J — совершенное нигде не плотное ограниченное подмножество прямой.

Построим нигде не плотное совершенное подмножество J отрезка $[0, 1]$, гомеоморфное пространству $SB_{2,3}$.

Для произвольного отрезка $[a,b]$ семейство отрезков $\{[a_i,b_i]\colon i\in\omega\}$ назовем правильным, если $a_0=\frac{a+b}{2}$, $a_{i+1}>b_i$ для всякого $i\in\omega$, и последовательность $\{a_i\colon i\in\omega\}$ сходится к точке b.

Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Обозначим: $\Delta_0=\{[a_{i^0},b_{i^0}]\colon i^0\in\omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[0,1]$. Положим: $\widetilde{\Delta}_0=\cup\{[a_{i^0},b_{i^0}]\colon i^0\in\omega\}$ — тело семейства Δ_0, $\overline{\Delta}_0=[\widetilde{\Delta}_0]$. Очевидно, $\overline{\Delta}_0=\widetilde{\Delta}_0\cup\{1\}$.

Пусть $\delta_{i^0}=\{[a_{i^0i^1},b_{i^0i^1}]\colon i^1\in\omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0},b_{i^0}]$ $(i^0\in\omega)$. Положим: $\Delta_1=\cup\{\delta_{i^0}\colon i^0\in\omega\}$, $\widetilde{\Delta}_1$ — тело семейства Δ_1, $\overline{\Delta}_1=[\widetilde{\Delta}_1]$. Нетрудно видеть, что $\overline{\Delta}_1=\widetilde{\Delta}_1\cup\{1\}\cup\{b_{i^0}\colon i^0\in\omega\}$.

Пусть $\delta_{i^0i^1}=\{[a_{i^0i^1i^2},b_{i^0i^1i^2}]\colon i^2\in\omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0i^1},b_{i^0i^1}]$, $(i^0,i^1\in\omega)$. Тогда $\Delta_2=\cup\{\delta_{i^0i^1}\colon i^0,i^1\in\omega\}$, $\widetilde{\Delta}_2$ — тело Δ_2, $\overline{\Delta}_2=[\widetilde{\Delta}_2]$. Нетрудно видеть, что $\overline{\Delta}_2=\widetilde{\Delta}_2\cup\{1\}\cup\{b_{i^0}\colon i^0\in\omega\}\cup\{b_{i^0i^1}\colon i^0,i^1\in\omega\}$.

Продолжая этот процесс построения, получим для всякого $k\in\omega$ семейство

$$\Delta_k=\cup\{\delta_{i^0\dots i^k}\colon i^0,\dots,i^k\in\omega\},$$

где $\delta_{i^0\dots i^k}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0\dots i^k},b_{i^0\dots i^k}]$,

$$\delta_{i^0\dots i^k}=\{[a_{i^0\dots i^ki^{k+1}},b_{i^0\dots i^ki^{k+1}}]\colon i^{k+1}\in\omega\},$$

$\widetilde{\Delta}_k$ — тело Δ_k, $\overline{\Delta}_k=[\widetilde{\Delta}_k]$.

Имеем $\overline{\Delta}_k=\widetilde{\Delta}_k\cup\{1\}\cup\{b_{i^0}\colon i^0\in\omega\}\cup\ldots\cup\{b_{i^0\dots i^k}\colon i^0,\dots,i^k\in\omega\}$.

Положим $J=\cap\{\overline{\Delta}_k\colon k\in\omega\}$. Нетрудно видеть, что J — совершенное нигде не плотное подмножество отрезка $[0,1]$.

Точками множества J являются точки $\{1\}$, $\{b_{i^0\dots i^k}\colon i^0,\dots,i^k\in\omega,k\in\omega\}$, а также точки $x(f)$, где $f\in P_3$, определяемые следующим образом

$$x(f)=[a_{f(0)},b_{f(0)}]\cap\ldots\cap[a_{f(0)\dots f(k)},b_{f(0)\dots f(k)}]\cap\ldots.$$

Базу окрестностей в точке $\{1\}$ образуют множества вида $([0,1]\setminus[a_{i^0\dots i^k},b_{i^0\dots i^k}])\cap J$.

Базу окрестностей в точке $\{b_{i^0\dots i^k}\}$ образуют множества вида

$$([a_{i^0\dots i^k},b_{i^0\dots i^k}]\setminus[a_{i^0\dots i^ki^{k+1}},b_{i^0\dots i^ki^{k+1}}])\cap J.$$

Базу окрестностей в точках $x(f)$, $f\in P_3$ образуют множества вида

$$[a_{f(0)\dots f(k)},b_{f(0)\dots f(k)}]\cap J.$$

Т е о р е м а 2.26. *Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно J.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h\colon S\mathfrak{B}_{2,3}\to J$, определяемое по следующему правилу:
– $h(\xi_0)=1$;
– для фиксированного ультрафильтра $\widehat{s}\in\widehat{\mathfrak{N}}_3$, где $s\in\mathfrak{N}_3$, то есть $s=f|_n$ для некоторой функции $f\in P_3$ и $n\in\omega$, положим $h(\widehat{s})=b_{f(0)\dots f(n-1)}$;
– для ультрафильтра $\xi_f\in\widehat{F}$, определяемого функцией $f\in P_3$, положим $h(\xi_f)=x(f)$.

Из конструкции и определения топологий пространств $S\mathfrak{B}_{2,3}$ и J следует, что $h\colon S\mathfrak{B}_{2,3}\to J$ — взаимно-однозначное и непрерывное вместе с обратным отображение $S\mathfrak{B}_{2,3}$ на J. □

Так как всякое совершенное нигде не плотное ограниченное подмножество прямой гомеоморфно канторову совершенному множеству, то пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Список литературы

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
3. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. № 6. С. 29–34.
4. Бастрыков Е.С. О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
5. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 14–19.
6. Головастов Р.А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24.
7. Грызлов А.А. О бикомпактных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 3. С. 803–848.
8. Грызлов А.А, Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
9. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С. Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 76–82.
10. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна булевых алгебр и канторовом совершенном множестве // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16.
11. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О плотности и числе Суслина подмножеств одного пространства Стоуна // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 18–24.
12. Малыхин В.И. Ненормальность некоторых подпространств βX, где X — дискретное пространство // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. С. 781–783.
13. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
14. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. С. 751.
15. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. URL: `http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`
16. Gryzlov A.A. On the Rudin–Keisler order on ultrafilters // Topol. Appl. 1997. Vol. 76. P. 151–155.
17. Gryzlov A.A. Independent matrices and some points of $\beta\tau$ // Topol. Appl. 2002. Vol. 107. P. 79–81.
18. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185.
19. Gryzlov A.A. On convergent sequences and copies of βN in the Stone space of one boolean algebra // Topology Proceedings. 2013. Vol. 42. P. 165–171.
20. Frolik Z. Homogenity problems for extremally disconnected spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1967. Vol. 8. P. 757–763.
21. Frolik Z. Sums of ultrafilters // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 87–91.
22. Kunen K. Ultrafilters and independent sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 172. P. 295–306.
23. Kunen K. Some points in βN // Math. Proc. Cambrige Phil. Soc. 1976. Vol. 80. P. 385–398.
24. Kunen K. Weak p-points in N^* // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23. Topology. 1978. P. 741–749.

25. van Mill J. Weak p-points in compact P-spaces // Topology Proceedings. 1979. Vol. 4. № 2. P. 605–628.
26. van Mill J. An introduction to $\beta\omega \setminus \omega$. Amsterdam: Vrige Univ, 1981.
27. van Mill J. Weak p-points in Chech–Stone compactifications // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 173. № 2. P. 657–678.
28. Rudin M.E. Types of ultrafilters // Topology Seminar. Wisconsin. 1965. P. 145.
29. Rudin M.E. Partial orders on the types in βN // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 155. № 2. P. 353–362.
30. Rudin M.E. Lectures on set-theoretic topology // Reg. Conf. Ser. Math. 23, Univ. Wyoming. 1974.
31. Rudin W. Homogenety problems in the theory of Čech compactifications // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. № 3. P. 409–426.

Поступила в редакцию 30.03.2015

Головастов Роман Александрович, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rpa4@bk.ru

R. A. Golovastov

Stone spaces of some Boolean algebras

Keywords: compactification, Boolean algebra, Stone space, ultrafilter.

MSC: 54D35

We study the Stone spaces of some Boolean algebras and establish relations between subsets of this spaces and Chech–Stone space $\beta\omega$, Cantor set, and other spaces. We consider three countable partially ordered sets and two type of Boolean algebras for each set. First, we consider space $S\mathfrak{B}_{1,1}$ constructered by M. Bell. We prove existence of subsets homeomorphic to $\beta\omega$ and convergent sequences in $S\mathfrak{B}_{1,1}$. For space $S\mathfrak{B}_{1,2}$, we prove that there are clopen subsets which is homeomorphic to $\beta\omega$ and remainder $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ consists of isolated points. We describe clopen subsets of $S\mathfrak{B}_{1,1}$ which are gomeomorphic to $\beta\omega$. We construct two examples: subset of $\mathfrak{N}_2$ which closure is non-open copy of $\beta\omega$ and subset of $\mathfrak{N}_2$ which closure is clopen and not gomeomorphic to $\beta\omega$. $S\mathfrak{B}_{1,2}$ is closure subset of $S\mathfrak{B}_{1,1}$ and $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ is nowhere dense in $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$. Next, we consider the space $S\mathfrak{B}_{1,3}$. The subspace of free ultrafilters of $S\mathfrak{B}_{1,3}$ has the countable Suslin number, but is not separable. The points of the space are described as ultrafilters possessing basis of certain types. Next, we consider the spaces $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$, and $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Boolean algebras for those Stone spaces have more simple structure. $S\mathfrak{B}_{2,3}$ is homeomorphic to Cantor set. The subset of free ultrafilters $S\mathfrak{B}^*_{2,3}$ is homeomorphic to the set of irrational numbers with natural topology. The subsets of free ultrafilters $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ and $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ are homeomorphic to Cantor set.

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshuyu topologiyu* (Introduction to the set theory and general topology), Moscow: Nauka, 1977.
2. Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* (Fundamentals of general topology in problems and exercises), Moscow: Nauka, 1974.
3. Arkhangel'skii A.V. Construction and classification of topological spaces and cardinal numbers, *Usp. Mat. Nauk*, 1978, vol. 33, no. 6, pp. 29–34 (in Russian).
4. Bastrykov E.S. About some points of Bell's compactification of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
5. Golovastov R.A. About one compactifications of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).
6. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian).
7. Gryzlov A.A. On compactifications of discrete spaces, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1996, vol. 2, no. 3, pp. 803–848 (in Russian).

8. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).
9. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S. Some centered systems of sets and points defined by them, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 76–82 (in Russian).
10. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
11. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. On the density and Suslin number of subsets of one Stone space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 18–24 (in Russian).
12. Malykhin V.I. Some non-normal subspaces of βX where X is discrete space, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 211, pp. 781–783 (in Russian).
13. Sikorski R. *Bulevy algebry* (Boolean algebras), Moscow: Mir, 1969.
14. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.
15. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. `http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`
16. Gryzlov A.A. On the Rudin–Keisler order on ultrafilters, *Topol. Appl.*, 1997, vol. 76, pp. 151–155.
17. Gryzlov A.A. Independent matrices and some points of $\beta\tau$, *Topol. Appl.*, 2002, vol. 107, pp. 79–81.
18. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N, *Topology Proceedings*, 2010, vol. 35, pp. 177–185.
19. Gryzlov A.A. On convergent sequences and copies of βN in the Stone space of one boolean algebra, *Topology Proceedings*, 2013, vol. 42, pp. 165–171.
20. Frolik Z. Homogenity problems for extremally disconnected spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 1967, vol. 8, pp. 757–763.
21. Frolik Z. Sums of ultrafilters, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, pp. 87–91.
22. Kunen K. Ultrafilters and independent sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 172, pp. 295–306.
23. Kunen K. Some points in βN, *Math. Proc. Cambrige Phil. Soc.*, 1976, vol. 80, pp. 385–398.
24. Kunen K. Weak p-points in N^*, *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23. Topology*, 1978, pp. 741–749.
25. van Mill J. Weak p-points in compact P-spaces, *Topology Proceedings*, 1979, vol. 4, no. 2, pp. 605–628.
26. van Mill J. *An introduction to* $\beta\omega \setminus \omega$, Amsterdam: Vrige Univ., 1981.
27. van Mill J. Weak p-points in Chech–Stone compactifications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 173, no. 2, pp. 657–678.
28. Rudin M.E. Types of ultrafilters, *Topology Seminar. Wisconsin*, 1965, p. 145.
29. Rudin M.E. Partial orders on the types in βN, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 155, no. 2, pp. 353–362.
30. Rudin M.E. Lectures on set-theoretic topology, *Reg. Conf. Ser. Math. 23, Univ. Wyoming*, 1974.
31. Rudin W. Homogenety problems in the theory of Čech compactifications, *Duke Math. J.*, 1956, vol. 23, no. 3, pp. 409–426.

Received 30.03.2015

Golovastov Roman Aleksandrovich, Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rpa4@bk.ru