УДК 517.977.8, 519.837.4

© *А. И. Благодатских*

ЗАДАЧИ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С РАВНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЩИТНИКОВ УБЕГАЮЩЕГО

Получены необходимые и достаточные условия многократной поимки в задачах группового преследования с равными возможностями при наличии группы защитников убегающего. Под поимкой понимается совпадение геометрических координат убегающего и преследователя, если последнему вплоть до момента поимки удалось избежать встречи со всеми защитниками убегающего. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки совпадали.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, защитники убегающего.

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Р. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой содержательную математическую теорию [2–5] (метод Л.С. Понтрягина, метод экстремального прицеливания Н.Н. Красовского и другие).

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования-убегания с участием группы управляемых объектов (хотя бы с одной из противоборствующих сторон), при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя (или более) группами управляемых объектов. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования, отличных от методов, разработанных для игр двух лиц.

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л.А. Петросяном, им были получены [6] достаточные условия поимки, Б.Н. Пшеничный получил [7] необходимые и достаточные условия поимки. Н.Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены [8] необходимые и достаточные условия многократной поимки. А.А Чикрием и Н.Н. Петровым были получены [9, 10] достаточные условия многократной поимки в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с равными возможностями. Для перечисленных задач приведены [11–15] достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок.

Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка.

В работе [16] введено понятие и получены необходимые и достаточные условия многократной и одновременной многократной поимок убегающего в задаче простого группового преследования с равными возможностями при наличии третьей группы участников — защитников убегающего.

В предлагаемой работе, носящей обзорный характер, приведены необходимые и достаточные условия нестрогой одновременной многократной поимки в задачах группового преследования с равными возможностями, в том числе при наличии защитников убегающего. Рассмотрен ряд модельных примеров нестационарных конфликтно управляемых процессов без защитников и при их наличии.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^k ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников (убегающего) $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lllll} P_i\colon & \dot{x}_i^* = A(t)x_i^* + u_i^*, & u_i^* \in U(t), & x_i^*(t_0) = X_i^0, & i \in I(n), \\ E\colon & \dot{y}^* = A(t)y^* + v^*, & v^* \in U(t), & y^*(t_0) = Y^0, & \\ D_j\colon & \dot{z}_j^* = A(t)z_j^* + w_j^*, & w_j^* \in U(t), & z_j^*(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & j \in I(r), \end{array} \tag{1.1}$$

где x_i^*, y^*, $z_j^* \in R^k$, $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в R^k с гладкой границей, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$, $S(a, b)$ — шар в R^k с центром в точке a радиуса b.

В системе (1.1) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения конфликтно управляемой системы (1.1), причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя бы одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из множества $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < \ldots$$

интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

О п р е д е л е н и е 1. Кусочно-программной стратегией убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту t_l и позициям $x_i^*(t_l)$, $y^*(t_l)$ допустимое управление $v^*(t)$, определенное для $t \in [t_l, t_{l+1})$, то есть

$$v^*(t) = v^*\bigl(t,\ t_l,\ x_i^*(t_l),\ y^*(t_l)\bigr),\ t \in [t_l, t_{l+1}),\ l = 0, 1, 2, \ldots.$$

О п р е д е л е н и е 2. Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту t_l, позициям $x_i^*(t_l)$, $y^*(t_l)$ и допустимому управлению убегающего $v^*(s)$, $s \in [t_l, t_{l+1})$, допустимые управления $u_i^*(t)$, определенные для $t \in [t_l, t_{l+1})$, то есть

$$u_i^*(t) = u_i^*\bigl(t,\ t_l,\ x_i^*(t_l),\ y^*(t_l),\ v^*(s),\ s \in [t_l, t_{l+1})\bigr),\ t \in [t_l, t_{l+1}),\ l = 0, 1, 2, \ldots.$$

О п р е д е л е н и е 3. Кусочно-программной контрстратегией защитников D_j, $j \in I(r)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие начальным позициям X_i^0, Y^0, начальные позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$, моменту времени t_l, реализовавшимся в этот момент позициям $x_i^*(t_l)$, $y^*(t_l)$, $z_j^*(t_l)$ и допустимым управлениям убегающего и преследователей $v^*(s)$, $u_i^*(s)$, $i \in I(n)$, $s \in [t_l, t_{l+1})$, допустимые управления $w_j^*(t)$, определенные для $t \in [t_l, t_{l+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0,\ X_i^0,\ Y^0);$$

$$w_j^*(t) = w_j^*\bigl(t, t_l, x_i^*(t_l), y^*(t_l), z_j^*(t_l), v^*(s), u_i^*(s), i \in I(n), s \in [t_l, t_{l+1})\bigr), t \in [t_l, t_{l+1}), l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Будем считать, что при совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\}$ защитников и столько же преследователей (для определенности считаем, что погибают участники с наименьшими порядковыми номерами). Неформально, каждый защитник может уничтожить одного преследователя, и при этом он сам погибает. Кроме того, при совпадении геометрических координат убегающего E и защитника D_j последний погибает.

Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

О п р е д е л е н и е 4. В игре Γ возможна поимка, если существует конечный момент времени $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, что для любых кусочно-программных контрстратегий защитников D_j найдутся индекс $\alpha \in I(n)$ и момент $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha^*(\tau_\alpha) = y^*(\tau_\alpha), \ \tau_\alpha < T(P_\alpha).$$

Отметим, что в ситуации $x_\alpha^*(\tau_\alpha) = y^*(\tau_\alpha) = z_j^*(\tau_\alpha)$ поимки не происходит, так как $\tau_\alpha = T(P_\alpha)$ и условие $\tau_\alpha < T(P_\alpha)$ не выполнено.

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \bigl\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} \colon i_1 < i_2 < \ldots < i_q, \ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\bigr\}.$$

О п р е д е л е н и е 5. В игре Γ возможна m-кратная поимка ($m \geqslant 1$), если существует конечный момент времени $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, что для любых кусочно-программных контрстратегий защитников D_j найдутся множество $\Lambda \in \Omega(m)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha^*(\tau_\alpha) = y^*(\tau_\alpha), \ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ для всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 6. В игре Γ возможна нестрогая одновременная m-кратная поимка ($m \geqslant 1$), если существует конечный момент времени $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, что для любых кусочно-программных контрстратегий защитников D_j найдутся множество $\Lambda \in \Omega(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha^*(\tau) = y^*(\tau), \ \tau < T(P_\alpha) \text{ для всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $m = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают, а m-кратная поимка сразу следует из нестрогой одновременной m-кратной поимки ($\tau_\alpha = \tau$ для всех $\alpha \in \Lambda$).

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II – группой преследователей, III – группой защитников), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна; кроме того, в процессе игры у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае нескольких преследователей первый из них «защищает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный).

§ 2. Решение задачи без защитников (случай $r = 0$)

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Введем обозначения

$$V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), \quad \lambda_i(v, t) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in V(t)\bigr\}, \quad J_i(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_i(v(s), s)ds,$$

$$\delta(t) = \min_{v \in V(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t), \quad \Delta = \int_{t_0}^{\infty} \delta(s)ds.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $r = 0$ и $\Delta = \infty$. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m-кратная поимка.*

У с л о в и е 1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, \ p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - m + 1)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $r = 0$. Тогда условие 1 является необходимым для осуществления m-кратной поимки.*

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [17].

Т е о р е м а 3. *Пусть $r = 0$, матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, и $U(t) = U = \mathrm{const}$. Тогда условие 1 является необходимым и достаточным для осуществления нестрогой одновременной m-кратной поимки.*

Отметим, что матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда $A(t) \equiv O$ — нуль-матрица или $A(t) = A = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

П р и м е р 1. В R^2 рассмотрим игру Γ_1 4 лиц: преследователей P_1, P_2, P_3 и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, \quad i \in I(3), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 1. *В игре Γ_1 возможна однократная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 2. В R^2 рассмотрим игру Γ_2 6 лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}, 2\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i \in I(5), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что начальные позиции преследователей P_i, $i \in I(5)$, образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего E. Проверяя, получаем, что при $m = 1, 2$ условие 1 имеет место, а при $m \geqslant 3$ условие 1 не выполнено. Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 2. *В игре Γ_2 возможна нестрогая одновременная двукратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Обобщим результаты примеров 1, 2.

П р и м е р 3. В R^2 рассмотрим игру Γ_3 $2 + 2b$ $(b \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2b}$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, 3\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2b} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2b} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1+2b), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 3. *В игре Γ_3 возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 4. В R^3 рассмотрим игру Γ_4 $2 + 3b$ $(b \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+3b}$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2b} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_l^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$i \in I(1 + 2b)$, $l = 2 + 2b, 3 + 2b, \ldots, 1 + 3b$. Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 4. *В игре* Γ_4 *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 5. В R^{2k} ($k \geqslant 1$) рассмотрим игру Γ_5 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 2k-1 \\ 2k \end{pmatrix}, 2\right), \quad A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_k^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota$, $\pm a_2\iota, \ldots, \pm a_k\iota$ (ι — мнимая единица), и матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора. Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 5. *В игре* Γ_5 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

П р и м е р 6. В R^2 рассмотрим игру Γ_6 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$U(t) \equiv \left\{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in R^2 : \frac{(e_1 - 3)^2}{4} + \frac{(e_1 + 12)^2}{9} \leqslant 1\right\}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 6. *В игре* Γ_6 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

П р и м е р 7. В R^2 рассмотрим игру Γ_7 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где $r = 0$,

$$U(t) \equiv \left\{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in R^2 : \frac{e_1^2}{16} + \frac{e_1^2}{25} \leqslant 1\right\}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теоремы 3 следует

У т в е р ж д е н и е 7. *В игре* Γ_7 *возможна нестрогая одновременная* m*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

Покажем, что условие 1 в общем случае не является достаточным (см. теорему 2) для осуществления m-кратной поимки.

П р и м е р 8. В R^2 рассмотрим игру Γ_8 6 лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), где $r=0$, $t_0=0$,

$$A(t)\equiv O,\quad U(t)=S\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, e^{-t}\right),\quad X_i^0=\begin{pmatrix}5\cos\dfrac{2\pi i}{5}\\ 5\sin\dfrac{2\pi i}{5}\end{pmatrix},\quad i\in I(5),\quad Y^0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что условие 1 выполнено при $m=1,2$. При всех допустимых управлениях

$$x_i(t)\in X_i^0+S\left((0,0)^{\mathrm{T}},1\right),\quad i\in I(5),\quad y(t)\in S\left((0,0)^{\mathrm{T}},1\right),\quad t\in[0,\infty).$$

Поскольку $|X_i^0|=5$, то

$$\left(X_i^0+S\left((0,0)^{\mathrm{T}},1\right)\right)\bigcap\ S\left((0,0)^{\mathrm{T}},1\right)\ =\ \varnothing,$$

следовательно, $x_i(t)\neq y(t)$, $i\in I(5)$, $t\in[0,\infty)$ при любых допустимых управлениях.

У т в е р ж д е н и е 8. *В игре Γ_8 поимка невозможна.*

П р и м е р 9. В R^k ($k\geqslant 2$) рассмотрим игру Γ_9 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где $r=0$,

$$A(t)=\frac{\dot a(t)}{a(t)}\mathcal{I},\quad U(t)=S\left((0,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}, a(t)\right),$$

$a(t)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция такая, что $a(t_0)=1$ и $a(t)>0$ для всех $[t_0,\infty)$. Тогда

$$\Phi(t)=a(t)\mathcal{I},\quad \Phi^{-1}(t)=a^{-1}(t)\mathcal{I},\quad V(t)=\Phi^{-1}(t)U(t)=S\left((0,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},1\right).$$

Отметим, что если выполнено условие 1, то $\Delta=\infty$, при этом $\Phi(t)$ не всегда является почти периодической в смысле Бора (например, при $a(t)=1+(t-t_0)^2$). Из теоремы 1 следует

У т в е р ж д е н и е 9. *В игре Γ_9 возможна нестрогая одновременная m-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

§ 3. Решение задачи при наличии защитников (случай $r\geqslant 1$)

Рассмотрим игру Γ при наличии группы защитников D_j, $j\in I(r)$. Пусть

$$\delta_r(t)=\min_{v\in V(t)}\ \max_{\Lambda\in\Omega(m+r)}\ \min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v,t),\qquad \Delta_r=\int_{t_0}^{\infty}\delta_r(s)ds.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть $\Delta_r=\infty$. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m-кратная поимка.*

У с л о в и е 2. $Y^0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_p^0,\ p\in K\}$ для всех множеств $K\in\Omega(n-m-r+1)$.

Т е о р е м а 5. *Условие 2 является необходимым для осуществления m-кратной поимки.*

Т е о р е м а 6. *Пусть матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, и* $U(t)=$ $=U=\mathrm{const}$. *Тогда условие 2 является необходимым и достаточным для осуществления нестрогой одновременной m-кратной поимки.*

Таким образом из полученных результатов следует, что добавление одного защитника снижает кратность поимки на единицу.

П р и м е р 10. В R^2 рассмотрим игру Γ_{10}, в которой $r=1$, остальные условия совпадают с условиями примера 1.

У т в е р ж д е н и е 10. *В игре* Γ_{10} *поимка невозможна.*

П р и м е р 11. В R^2 рассмотрим игру Γ_{11}, в которой $r = 1$, остальные условия совпадают с условиями примера 2.

У т в е р ж д е н и е 11. *В игре* Γ_{11} *возможна однократная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 12. В R^2 рассмотрим игру Γ_{12}, в которой $1 \leqslant r \leqslant b-1$, остальные условия совпадают с условиями примера 3.

У т в е р ж д е н и е 12. *В игре* Γ_{12} *возможна нестрогая одновременная* $(b-r)$*-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

На базе рассмотренных выше примеров 4–9 можно построить примеры для случая $r \geqslant 1$.

Список литературы

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1977. 222 с.
5. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 272 с.
6. Петросян Л.А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5 С. 331–340.
7. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
9. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
10. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
11. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
12. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
13. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 13–18.
14. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.
15. Благодатских А.И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 20–26.
16. Благодатских А.И. Задача простого группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 2. С. 32–41.
17. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Поступила в редакцию 20.08.2015

Благодатских Александр Иванович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aiblag@mail.ru

A. I. Blagodatskikh

Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, evader defenders.

MSC: 49N70, 49N75

The necessary and sufficient conditions for multiple capture in the group pursuit problems with equal opportunities in the presence of a group of defenders for an evader are obtained. Capture means a coincidence of geometric coordinates for the evader and the pursuer if the latter up to the moment of capture was possible to avoid a meeting with all the defenders of the evader. Multiple capture occurs when a given number of pursuers catch an evader and the moments of capture may not coincide. In the nonstrict simultaneous multiple capture problem, one needs a coincidence of capture times.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.
2. Pontryagin L.S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematis*, 1971, vol. 112, pp. 27–60.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Positsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
4. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Pursuit differential games), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
5. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978, 272 p.
6. Petrosyan L.A. Games prosecution with the line of life with many participants, *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR. Matematika*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340 (in Russian).
7. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objets, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
9. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict control processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.
10. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732.
11. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
12. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40.
13. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 13–18 (in Russian).
14. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320.
15. Blagodatskikh A.I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 20–26 (in Russian).
16. Blagodatskikh A.I. Problem of simple group pursuit with equal opportunities at presence defenders evader, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 32–41 (in Russian).
17. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

Received 20.08.2015

Blagodatskikh Aleksandr Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aiblag@mail.ru