УДК 517.929

© *Е. И. Бравый*

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1]

Получены условия, при которых решение периодической задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения положительно, но оператор Грина периодической задачи, вообще говоря, положительным не является.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, периодическая краевая задача, положительные решения.

Введение

Во многих работах, посвященных существованию положительных решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений (например, [1–10]), задача сводится к рассмотрению следующей системы:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x)(t) &= (Fx)(t), \quad t \in [0,1], \\ \ell x &= 0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $\mathcal{L}\colon \mathbf{AC}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор; $F\colon \mathbf{AC}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — вообще говоря, нелинейный непрерывный оператор; $\ell\colon \mathbf{AC} \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, задающий краевые условия; $\mathbf{L}[0,1]$ — пространство суммируемых функций $z\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ с нормой $\| z\|_{\mathbf{L}} \equiv \int_0^1 |z(t)|\,dt$; $\mathbf{AC}[0,1]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\| x\|_{\mathbf{AC}} = |x(0)| + \| \dot{x}\|_{\mathbf{L}}$.

При этом от линейной части системы требуется положительная разрешимость: для каждой положительной функции $f \in \mathbf{L}[0,1]$ решение задачи

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = 0, \tag{0.2}$$

неотрицательно. В частности, такое требование присутствует в работах [1–10] и многих других статьях, использующих монотонный метод. Мы отказываемся от этого требования и получаем условия существования положительного решения периодической краевой задачи (0.1) в тех случаях, когда решение задачи (0.2) не является, вообще говоря, неотрицательным при каждой положительной функции f. Вместо конуса всех неотрицательных функций используется специальное семейство конусов ($K_{\mathbf{1},\mu}$ в обозначениях [11, с. 41]). Насколько нам известно, такие конусы применялись в задачах о существовании положительных решений (например, в работах [1, 3–5]) только в случае положительной разрешимости задачи (0.2) и, как правило, для обыкновенного дифференциального линейного оператора $\mathcal{L}$.

Здесь мы в теоремах 1.3–1.5 находим условия действия оператора Грина задачи (0.2) с функционально-дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ в некоторой паре специальных конусов. При этом не требуется, чтобы решение задачи (0.2) было неотрицательным при любой положительной функции f. Это позволяет доказать существование положительного решения периодической краевой задачи для уравнений, для которых известные условия существования положительных периодических решений, например полученные в работах [6, 9, 10], не выполнены.

В теореме 2.1 результаты теорем 1.3–1.5 применяются для доказательства существования положительного периодического решения (0.1) в линейном случае.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание 2014/152, проект № 1890) и поддержана РФФИ (проект № 14–01–00338).

§ 1. Основные результаты

Рассмотрим периодическую краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор, $f \in \mathbf{L}[0,1]$; функция $x \in \mathbf{AC}[0,1]$ называется решением задачи, если она удовлетворяет первому уравнению системы (1.1) при почти всех $t \in [0,1]$, а также удовлетворяет периодическому краевому условию $x(0) = x(1)$. Здесь $\mathbf{C}[0,1]$ — пространство непрерывных функций $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Линейный оператор $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ будем называть положительным, если он отображает каждую неотрицательную функцию из $\mathbf{C}[0,1]$ в почти всюду неотрицательную. Пусть далее оператор T положителен.

Пусть $\mathbf{1}(t) = 1$, $t \in [0,1]$, — единичная функция.

Т е о р е м а 1.1 (теорема 2.1 [12]). *Если*

$$0 < \int_0^1 (T\mathbf{1})(t)\,dt < 4,$$

то задача (1.1) *имеет единственное решение.*

Если задача (1.1) имеет единственное решение $x = Gf$ при каждой функции $f \in \mathbf{L}[0,1]$, то линейный оператор $G\colon \mathbf{L}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1]$ называется оператором Грина. Известно (см., например, [2, с. 49]), что оператор Грина является интегральным.

Т е о р е м а 1.2 (теорема 2.2 [12]). *Если* $0 < \int_0^1 (T\mathbf{1})(t)\,dt < 1$, *то при каждой неотрицательной функции* $f \not\equiv 0$ *решение задачи* (1.1) *положительно.*

Получим условие положительности решения при положительном линейном операторе T в случае, когда условия теоремы 1.2 не выполнены, то есть

$$1 \leqslant \int_0^1 (T\mathbf{1})(t)\,dt < 4.$$

Л е м м а 1.1. *Пусть заданы неотрицательные функции* p, $f \in \mathbf{L}[0,1]$, *и*

$$1 \leqslant \int_0^1 p(t)\,dt < 4. \tag{1.2}$$

Для того чтобы решение периодической задачи (1.1) *было положительным при каждом таком линейном положительном операторе* $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$, *что*

$$(T\mathbf{1})(t) = p(t), \quad t \in [0,1], \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех t_1, t_2, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, *были выполнены неравенства*

$$\int_0^1 f(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \left(\int_0^1 f(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt\right), \tag{1.4}$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \left(\int_0^1 p(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right). \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено неравенство (1.2) и линейный положительный оператор $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ удовлетворяет равенству (1.3). Тогда по теореме 1.1 задача (1.1) имеет единственное решение. По лемме 1 [13] существуют такая функция $p_1 \in \mathbf{L}[0,1]$ и такие точки t_1, $t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, что

$$0 \leqslant p_1(t) \leqslant p(t), \quad t \in [0,1], \tag{1.6}$$

и решение (1.1) x удовлетворяет периодической краевой задаче

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + p_1(t)x(t_1) + (p(t) - p_1(t))x(t_2) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \end{gathered} \tag{1.7}$$

причем t_1 и t_2 — точки минимума и максимума функции x. По теореме 1.1 задача (1.7) также имеет единственное решение. Найдем $x_1 \equiv x(t_1)$ и $x_2 \equiv x(t_2)$. Из (1.7) следует, что

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt - x_1 \int_{t_1}^{t_2} p_1(t)\,dt - x_2 \int_{t_1}^{t_2} (p(t) - p_1(t))\,dt,$$
$$\int_0^1 f(t)\,dt = x_1 \int_0^1 p_1(t)\,dt + x_2 \int_0^1 (p(t) - p_1(t))\,dt.$$

Таким образом, x_1, x_2 удовлетворяют линейной системе

$$\begin{gathered} x_1 \int_0^1 p_1(t)\,dt + x_2 \int_0^1 (p(t) - p_1(t)) = \int_0^1 f(t)\,dt, \\ x_1 \left(-1 + \int_{t_1}^{t_2} p_1(t)\,dt \right) + x_2 \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) - p_1(t))\,dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Решая систему (1.8) относительно x_1, x_2, получаем, что если неравенства (1.4) и (1.5) выполнены, то величины x_1 и x_2 положительны, следовательно, и решение задачи (1.1) положительно. □

Очевидно, что при фиксированной неотрицательной функции $p \in \mathbf{L}[0,1]$ дополненное тождественным нулем множество неотрицательных функций $f \in \mathbf{L}[0,1]$, удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5), является конусом, который обозначим $K(p)$. В частности, из леммы 1.1 следует, что $p \in K(p)$, так как при всех операторах $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$, удовлетворяющих условию (1.3), единственным решением задачи

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + (Tx)(t) = p(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \end{gathered}$$

является положительная функция $x = \mathbf{1}$ (легко также проверить, что для функции $f = p$ в условиях леммы 1.1 неравенства (1.4), (1.5) выполнены).

Лемма 1.1 утверждает, что если $f \in K(p)$, $f \not\equiv 0$, то для всякого линейного положительного оператора T, удовлетворяющего равенству (1.3), решение задачи (1.1) положительно.

Обозначим [11, с. 41] Λ^μ, $\mu \in [1,\infty)$, конус таких неотрицательных функций $f \in \mathbf{L}[0,1]$, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} f(t) \leqslant \mu \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,1]} f(t).$$

Пусть Λ^∞ — конус таких неотрицательных функций $f \in \mathbf{L}[0,1]$, что $\operatorname{vrai\,inf}_{t\in[0,1]} f(t) > 0$.

Т е о р е м а 1.3. *Если* $\int_0^1 p(t)\,dt = 1$, *то* $\Lambda^\infty \in K(p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение непосредственно следует из леммы 1.1. □

С л е д с т в и е 1.1. *Если* $\int_0^1 p(t)\,dt = 1$, *то оператор Грина задачи* (1.1) *отображает конус* Λ^∞ *в себя.*

Далее рассмотрим случай, когда
$$1 < \int_0^1 p(t)\,dt < 4. \tag{1.9}$$
Введем следующие обозначения:
$$e_1(p) \equiv \left\{(t_1,t_2) : 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1,\ \int_0^1 p(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt > 1\right\},$$
$$e_2(p) \equiv \left\{(t_1,t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1,\ t_2 - t_1 < 1,\ \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt > 1\right\},$$
$$\mathcal{M}_1(p) \equiv \min_{(t_1,t_2)\in e_1(p)} \frac{1 - t_2 + t_1}{(t_2 - t_1)\left(\int_0^1 p(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt - 1\right)},$$
$$\mathcal{M}_2(p) \equiv \min_{(t_1,t_2)\in e_2(p)} \frac{t_2 - t_1}{(1 - t_2 + t_1)\left(\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt - 1\right)},$$
$$\mathcal{M}(p) \equiv \min\{\mathcal{M}_1(p), \mathcal{M}_2(p)\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если функция p не убывает и $t\displaystyle\int_t^1 p(s)\,ds < 1$, то
$$\mathcal{M}(p) = \min_{t\in(0,1),\int_d^1 p(s)ds>1} \frac{1-t}{t\left(\int_t^1 p(s)\,ds - 1\right)} > 1;$$
если функция p не возрастает и $(1-t)\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds < 1$ для каждого $t \in [0,1]$, то
$$\mathcal{M}(p) = \min_{t\in(0,1),\int_0^t p(s)ds>1} \frac{t}{(1-t)\left(\int_0^t p(s)\,ds - 1\right)} > 1. \tag{1.10}$$

В этих случаях $\mathcal{M}_1(p) = \mathcal{M}_2(p) = \mathcal{M}(p)$.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть функция* $p \in \mathbf{L}[0,1]$ *неотрицательна, выполнены неравенства* (1.9) *и неравенства*
$$\begin{gathered}\max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1}(t_2 - t_1)\left(\int_0^1 p(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right) < 1,\\ \max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1}(1 - (t_2 - t_1))\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt < 1.\end{gathered} \tag{1.11}$$
Тогда $\mathcal{M}(p) > 1$ *и* $\Lambda^\mu \subset K(p)$ *при всех* $\mu \in [1, \mathcal{M}(p))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.1 следует, что множество Λ^μ лежит в $K(p)$ тогда и только тогда, когда для всех $f \in \Lambda^\mu$ и для всех t_1, t_2, $t_1 \leqslant t_2$, выполнены неравенства (1.4), (1.5). Обозначим $E \equiv [0,1]$, $E_1 \equiv [t_1,t_2]$, $E_2 = [0,1] \setminus E_1$. Неравенство (1.4) выполнено, если
$$\begin{gathered}\int_{E_1} p(t)\,dt < \min_{f\in\Lambda^\mu, f\not\equiv 0} \frac{\int_E f(t)\,dt}{\int_{E_2} f(t)\,dt} = 1 + \frac{t_2 - t_1}{(1 - t_2 + t_1)\mu}\\ \text{при всех } t_1 \leqslant t_2,\ t_2 - t_1 < 1.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Неравенство (1.5) выполнено, если
$$\int_{E_2} p(t)\,dt < \min_{f\in\Lambda^\mu, f\not\equiv 0} \frac{\int_E f(t)\,dt}{\int_{E_1} f(t)\,dt} = 1 + \frac{1 - t_2 + t_1}{(t_2 - t_1)\mu} \quad \text{при всех } t_1 < t_2. \tag{1.13}$$

Если $\mu \leqslant \mathcal{M}_1(p)$, то выполнено условие (1.13); если $\mu \leqslant \mathcal{M}_2(p)$, то выполнено условие (1.12). При этом неравенства (1.11) гарантируют, что $\mathcal{M}(p) > 1$. □

С л е д с т в и е 1.2. *Если* $p(t) \equiv P \in (1,4)$, $t \in [0,1]$, *то* $\Lambda^{\mathcal{M}(p)} \subset K(p)$ *при*

$$\mathcal{M}(p) = \frac{1}{(\sqrt{P}-1)^2}. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При постоянной функции p для вычисления $\mathcal{M}(p)$ воспользуемся равенством (1.10). Имеем

$$\mathcal{M}(p) = \min_{t \in (1/P,1)} \frac{t}{(1-t)(P\,t-1)}.$$

Дробь в последнем равенстве принимает минимальное значение при $t = 1/\sqrt{P}$, откуда следует равенство (1.14). □

Итак, если выполнены условия теоремы 1.4 и $f \in \Lambda^\mu$ при $\mu \in [1, \mathcal{M}(p))$, то решение задачи (1.1) положительно для каждого линейного положительного оператора T, удовлетворяющего равенству (1.3). Найдем такие показатели $\nu \geqslant 1$, что это решение будет принадлежать Λ^ν.

Определим величины

$$N_1(p,\mu) \equiv \max_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1} \frac{(1-t_2+t_1)\mu + (t_2-t_1)\left(1 - \int_0^1 p(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right)}{t_2 - t_1 + \left(1 - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right)(1-t_2+t_1)\mu},$$

$$N_2(p,\mu) \equiv \max_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1} \frac{(t_2-t_1)\mu + (1-t_2+t_1)\left(1 - \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right)}{1 - t_2 + t_1 + \left(1 - \int_0^1 p(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt\right)(t_2-t_1)\mu},$$

$$\mathcal{N}(p,\mu) \equiv \max\{N_1(p,\mu), N_2(p,\mu)\}.$$

Т е о р е м а 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4 *и* $\mu \in [1, \mathcal{M}(p))$.

Тогда для каждой функции $f \in \Lambda^\mu$ *решение задачи* (1.1) *принадлежит множеству* $\Lambda^{\mathcal{N}(p,\mu)}$ *при всех линейных положительных операторах* $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$, *удовлетворяющих равенству* (1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнены условия теоремы 1.4 и $f \in \Lambda^\mu$ при $\mu \in [1, \mathcal{M}(p))$, то решение задачи (1.1) принадлежит конусу Λ^ν при некотором $\nu \geqslant 1$, если для решений x_1, x_2 задачи (1.8) выполнено условие $x_1/x_2 \in [1/\nu, \nu]$ при всех $f \in \Lambda^\mu$, всех $p_1 \in \mathbf{L}[0,1]$, удовлетворяющих условию (1.6), и всех $t_1 \leqslant t_2$. Аналогично доказательству теоремы 1.4 показывается, что минимальное ν, обладающее таким свойством, равно $\mathcal{N}(p,\mu)$. □

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 1.5 следует, что $\mathcal{N}(p,\mu) > 1$, за исключением одного случая $\mu = 1$ и постоянной функции $p(t) = P$, $t \in [0,1]$, когда $\mathcal{N}(P,1) = 1$.

Простые примеры показывают, что, вообще говоря, величины $N_1(p,\mu)$ и $N_2(p,\mu)$ различны. Если функция p не убывает или не возрастает, то $N_1(p,\mu) = N_2(p,\mu)$. Более того, легко видеть, что если p не убывает, то

$$\mathcal{N}(p,\mu) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{(1-t)\mu + t\left(1 - \int_0^{1-t} p(s)\,ds\right)}{t + \left(1 - \int_{1-t}^1 p(s)\,ds\right)(1-t)\mu}, \tag{1.15}$$

а если p не возрастает, то

$$\mathcal{N}(p,\mu) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{(1-t)\mu + t\left(1 - \int_t^1 p(s)\,ds\right)}{t + \left(1 - \int_0^t p(s)\,ds\right)(1-t)\mu}.$$

С л е д с т в и е 1.3. *Если* $p(t) \equiv P \in (1,4)$, $t \in [0,1]$, *и*

$$\mu \in \left[1, \frac{1}{(\sqrt{P}-1)^2}\right), \tag{1.16}$$

то для каждой функции $f \in \Lambda^\mu$ *решение задачи* (1.1) *принадлежит множеству* Λ^ν *при*

$$\nu = \frac{\left(\sqrt{\mu}+1\right)^2 - P}{\left(\sqrt{\mu}+1\right)^2 - P\mu}. \tag{1.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяем теорему 1.5. Для вычисления $\mathcal{N}(p,\mu)$ при постоянной функции p воспользуемся равенством (1.15). Имеем

$$\mathcal{N}(p,\mu)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{(1-t)\mu+t(1-(1-t)P)}{t+(1-t\,P)(1-t)\mu}=\max_{0<t<1}\frac{R(t)-P}{R(t)-P\mu},$$

где $R(t)=\frac{1}{1-t}+\frac{\mu}{t}$. Функция $R(t)$ принимает свое минимальное значение $(\sqrt{\mu}+1)^2$ при $t=$ $=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}+1}$. Из условия (1.16) следует, что $\left(\sqrt{\mu}+1\right)^2>P\mu$. Отсюда по теореме 1.5 следует, что для $f\in\Lambda^\mu$ решение задачи (1.1) принадлежит Λ^ν, если ν определено равенством (1.17). □

С л е д с т в и е 1.4. *Пусть $p(t)\equiv P\in(1,4)$, $t\in[0,1]$, — положительная постоянная и выполнено условие* (1.16). *Тогда оператор Грина G периодической задачи* (1.1) *отображает множество Λ^μ в себя, если*

$$P\in(1,2],\quad 1\leqslant\mu\leqslant\left(\frac{1+\sqrt{P(2-P)}}{P-1}\right)^2. \tag{1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что из (1.18) следует условие (1.16). Таким образом, применимо следствие (1.3), по которому оператор Грина G отображает множество Λ^μ в себя, если $\mathcal{N}(p,\mu)\leqslant\mu$. Последнее неравенство выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.18). □

§ 2. Приложения

Рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)+(Tx)(t)=(Qx)(t)+f(t),\quad t\in[0,1],\\ x(0)=x(1),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где T, $Q\colon\mathbf{C}[0,1]\to\mathbf{L}[0,1]$ — ненулевые линейные положительные операторы, $f\in\mathbf{L}[0,1]$. Предполагаем, что для функции $p\equiv T\mathbf{1}$ выполнены неравенства (1.9) и (1.11).

Для каждого $\rho\geqslant 1$ обозначим $V^\rho\equiv\mathbf{C}[0,1]\cap\Lambda^\rho$. Конусы V^ρ определены и исследованы, в частности, в [11, с. 41].

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $\mu\in[1,\mathcal{M}(p))$, $\nu\geqslant\mathcal{N}(p,\mu)$, $Q(V^\nu)\subset\Lambda^\mu$.*
Если существует такая абсолютно непрерывная на $[0,1]$ *функция $\alpha\in V^\nu$, что*

$$\alpha(0)=\alpha(1),\quad \phi\equiv\dot{\alpha}+T\alpha-Q\alpha\in\Lambda^\mu,\quad \phi\not\equiv 0, \tag{2.2}$$

то при каждой функции $f\in\Lambda^\mu$ единственное решение задачи (2.1) *принадлежит множеству V^ν.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы задача (1.1) имеет единственное решение. По теореме 1.5 оператор Грина G задачи (1.1) действует из множества Λ^μ в множество V^ν. Поэтому задача (2.1) эквивалентна уравнению в пространстве $\mathbf{C}[0,1]$

$$x=GQx+g, \tag{2.3}$$

где линейный оператор GQ действует в конусе V^ν, функция $g=Gf$ принадлежит V^ν.

Из условия (2.2) получаем, что при $\alpha\in C_\nu$, $\alpha\neq\mathbf{0}$, выполнено равенство

$$\alpha=GQ\alpha+G\phi,\quad G\phi\in V^\nu.$$

По известной теореме об оценке спектрального радиуса (например, здесь выполнены условие *в* теоремы 16.2 и условие *в* теоремы 16.3 [11]) спектральный радиус положительного оператора $GQ\colon\mathbf{C}[0,1]\to\mathbf{C}[0,1]$ меньше единицы. Таким образом, уравнение (2.3) и эквивалентная задача (2.1) имеют в пространстве $\mathbf{C}[0,1]$ единственное решение, представимое в виде равномерно сходящегося ряда

$$x=g+GQg+(GQ)^2g+\ldots.$$

Отсюда следует, что задача (2.2) имеет единственное решение, принадлежащее V^ν при любой функции $f \in \Lambda^\mu$. $\square$

Для иллюстрации теоремы 2.1 приведем без доказательства два вытекающих из нее утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть* $\tau, \theta\colon [0,1] \to [0,1]$ *— измеримые функции,* P *и* Q *— константы, для которых выполнены неравенства* $1 < P \leqslant 2$ *и* $0 \leqslant Q < P$. *Если*

$$1 \leqslant \mu \leqslant \left(\frac{1 + \sqrt{P(2-P)}}{P-1} \right)^2,$$

то при каждой функции $f \in \Lambda^\mu$ *решение задачи*

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + Px(\tau(t)) = Qx(\theta(t)) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \end{gathered}$$

принадлежит конусу V^μ.

Следствие 2.2. *Пусть* $\tau\colon [0,1] \to [0,1]$ *— измеримая функция, число* $P \in (1,4)$, $q\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *— положительная непрерывная функция. Пусть, далее,* $P > \max\limits_{t\in[0,1]} \displaystyle\int_0^1 q(t,s)\,ds$ *и число* μ *удовлетворяет условию*

$$\max \left\{ \frac{P - \min\limits_{t\in[0,1]} \int_0^1 q(t,s)\,ds}{P - \max\limits_{t\in[0,1]} \int_0^1 q(t,s)\,ds}, \frac{\max\limits_{t,s\in[0,1]} q(t,s)}{\min\limits_{t,s\in[0,1]} q(t,s)} \right\} \leqslant \mu < \frac{1}{(\sqrt{P}-1)^2}.$$

Тогда при любой функции $f \in \Lambda^\mu$, $f \not\equiv \mathbf{0}$, *решение задачи*

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + Px(\tau(t)) = \int_0^1 q(t,s)x(s)\,ds + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0)Z = x(1), \end{gathered}$$

положительно и принадлежит конусу V^ν, *где* ν *определено равенством* (1.17).

Список литературы

1. Liz E., Nieto J.J. Periodic boundary value problems for a class of functional differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1996. Vol. 200 (3). P. 680–686.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
3. Jiang D., Wei J. Monotone method for first- and second-order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2002. Vol. 50 (7). P. 885–898.
4. Jiang D., Nieto J.J., Zuo W. On monotone method for first and second order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol. 289 (2). P. 691–699.
5. Nieto J.J., Rodríguez-López R. Monotone method for first-order functional differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 2006. Vol. 52 (3–4). P. 471–484.
6. Wong F.H., Wang S.P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56 (10). P. 2580–2587.
7. Domoshnitsky A., Hakl R., Šremr J. Component-wise positivity of solutions to periodic boundary problem for linear functional differential system // Journal of Inequalities and Applications. 2012. Vol. 2012.
8. Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012. XVI+520 p.
9. Ma R., Lu Y. Existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations // Monatshefte fur Mathematik. 2014. Vol. 173 (1). P. 67–81.
10. Calamai A., Infante G. Nontrivial solutions of boundary value problems for second-order functional differential equations // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2015. DOI: 10.1007/s10231-015-0487-x

11. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.
12. Lomtatidze A.G., Hakl R., Půža B. On the periodic boundary value problem for first-order functional-differential equations // Differential Equations. 2003. Vol. 39. № 3. P. 344–352.
13. Bravyi E. On estimates of solutions of the periodic boundary value problem for first-order functional differential equations // Boundary Value Problems. 2014. Vol. 2014. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-119

Поступила в редакцию 02.10.2015

Бравый Евгений Ильич, к. ф.-м. н., с. н. с., научно-исследовательский центр «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.
E-mail: bravyi@perm.ru

E. I. Bravyi

On positive periodic solutions of first order functional differential equations

Keywords: functional differential equations, periodic boundary value problem, resonance, positive solutions.

MSC: 34K10

The periodic boundary value problem for linear functional differential equations is considered. In the case when the Green function changes its sign, conditions for the positiveness of solutions are obtained.

REFERENCES

1. Liz E., Nieto J.J. Periodic boundary value problems for a class of functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 200, no. 3, pp. 680–686.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of functional differential equations), Moscow: Nauka, 1991.
3. Jiang D., Wei J. Monotone method for first- and second-order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods* & *Applications*, 2002, vol. 50, no. 7, pp. 885–898.
4. Jiang D., Nieto J.J., Zuo W. On monotone method for first and second order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, vol. 289, no. 2, pp. 691–699.
5. Nieto J.J., Rodríguez-López R. Monotone method for first-order functional differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2006, vol. 52, no. 3-4, pp. 471–484.
6. Wong F.H., Wang S.P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, vol. 56, no. 10, pp. 2580–2587.
7. Domoshnitsky A., Hakl R., Šremr J. Component-wise positivity of solutions to periodic boundary problem for linear functional differential system, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012, vol. 2012.
8. Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications*, New York: Springer, 2012, XVI+520 p.
9. Ma R., Lu Y. Existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations, *Monatshefte fur Mathematik*, 2014, vol. 173, no. 1, pp. 67–81.
10. Calamai A., Infante G. Nontrivial solutions of boundary value problems for second-order functional differential equations, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2015. DOI: 10.1007/s10231-015-0487-x
11. Krasnosel'skii M.A., Lifshits E.A., Sobolev A.V. *Positivnye lineinye sistemy* (Positive linear systems), Moscow: Nauka, 1985.
12. Lomtatidze A.G., Hakl R., Půža B. On the periodic boundary value problem for first-order functional-differential equations, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 3, pp. 344–352.
13. Bravyi E. On estimates of solutions of the periodic boundary value problem for first-order functional differential equations, *Boundary Value Problems*, 2014, vol. 2014. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-119

Received 02.10.2015

Bravyi Evgenii Il'ich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Perm National Research Polytechnical University, Komsomol'skii pr., 29, Perm, 614990, Russia.
E-mail: bravyi@perm.ru