УДК 517.927.25

© *М. Ю. Ватолкин*

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье рассматривается представление собственных функций одной квазидифференциальной краевой задачи второго порядка в виде сумм степенных рядов. Получены оценки для их коэффициентов.

Ключевые слова: собственные функции, собственные значения, степенные ряды, оценки для коэффициентов, квазидифференциальное уравнение, краевая задача, сумма ряда.

§ 1. О представлении собственных функций квазидифференциальной краевой задачи второго порядка в виде сумм степенных рядов и об оценках для их коэффициентов

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathcal{P} = (p_{ik})_0^2$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik}\colon I \to \mathbb{R}$, такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а $\dfrac{1}{p_{11}(\cdot)}$, $\dfrac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}$, $\dfrac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$, $\dfrac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ локально суммируемы в I.

Определим квазипроизводные ${}^{0}_{\mathcal{P}}x$, ${}^{1}_{\mathcal{P}}x$, ${}^{2}_{\mathcal{P}}x$ функции $x\colon I \to \mathbb{R}$ равенствами

$$ {}^{0}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x, \quad {}^{1}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{11}\frac{d({}^{0}_{\mathcal{P}}x)}{dt} + p_{10}({}^{0}_{\mathcal{P}}x), \quad {}^{2}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{22}\frac{d({}^{1}_{\mathcal{P}}x)}{dt} + p_{21}({}^{1}_{\mathcal{P}}x) + p_{20}({}^{0}_{\mathcal{P}}x). $$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение [1]

$$ ({}^{2}_{\mathcal{P}}x)(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1.1} $$

Его решением называется всякая функция $x\colon I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до первого порядка включительно и удовлетворяющая (1.1) почти всюду в I. Уравнение (1.1) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением [1]

$$ ({}^{2}_{\mathcal{R}}y)(t) = 0 \ \ (\mathcal{R} = (r_{\nu k})_0^2 \text{ — нижняя треугольная матрица}), \ \ t \in I, \tag{1.2} $$

$r_{\nu k} = \dfrac{(-1)^{\nu+k} p_{n-k,n-\nu} p_{n-\nu,n-\nu}}{p_{n-k,n-k}} \quad (k \in 0{:}\nu,\ \nu \in 0{:}2).$

Уравнение (1.1) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$ (здесь $J = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля [1].

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$ ({}^{2}_{\mathcal{P}}x)(t) = -\lambda\ ({}^{0}_{\mathcal{P}}x)(t) \quad (t \in J), \tag{1.3} $$

$$ {}^{0}_{\mathcal{P}}x(a) = {}^{0}_{\mathcal{P}}x(b) = 0. \tag{1.4} $$

Решение $u(t, \lambda)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее первому условию из условий (1.4), представимо в виде ряда [2]

$$ u(t, \lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \ \ldots . \tag{1.5} $$

Последовательность решений $\{x_k\}_0^\infty$ построим следующим образом: $x_0(\cdot)$ — решение задачи

$$ ({}^{2}_{\mathcal{P}}x)(t) = 0 \ (t \in J), $$

$$ {}^{0}_{\mathcal{P}}x(a) = 0, \quad {}^{1}_{\mathcal{P}}x(a) = 1; $$

$x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения задач:

$$({}^{2}_{\mathcal{P}}x_k)(t) = ({}^{0}_{\mathcal{P}}x_{k-1})(t) \quad (t \in J),$$

$${}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0, \qquad {}^{1}_{\mathcal{P}}x_k(a) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Собственные значения задачи (1.3), (1.4) представляют собой корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ — сумма ряда (1.5) при $t = b$.

$$u(t, \lambda^*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda^*)^k x_k(t) \ (t \in J)$$

есть собственная функция задачи (1.3), (1.4), отвечающая собственному значению λ^*.

Пусть уравнение (1.1) неосцилляционно на J и $C(t,s)\,(C^*(t,s))$ — функция Коши уравнения (1.1)((1.2)),

$$M_1 \doteq \max_{t \in [a,b]} {}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,a), \quad M_2 \doteq \max_{(s,t) \in [a,b] \times [a,b]} \left| {}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) \right|$$

и $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$, функция

$$\xi(t) \doteq \min\{p_{11}(t), p_{22}(t)\}$$

при каждом значении аргумента t из J. Будем предполагать, что функция $\dfrac{1}{\xi(t)}$ суммируема на J, и пусть $\psi(t) \doteq \displaystyle\int_a^t \frac{1}{\xi(s)}\, ds \ (t \in J)$.

Считаем также, что $p_{21}(t) \geqslant 0 \ (t \in J)$.

Теорема 1.1. *Справедливы оценки*

$$0 \leqslant {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J, \ \ k = 0, 1, \ldots). \tag{1.6}$$

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции.

При $k = 0$ оценка (1.6) верна. Действительно, ${}^{0}_{\mathcal{P}}x_0(t) = {}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,a)$, следовательно,

$${}^{0}_{\mathcal{P}}x_0(t) \leqslant M_1 \leqslant M.$$

Пусть оценка (1.6) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k+1$:

$${}^{0}_{\mathcal{P}}x_{k+1}(t) = \int_a^t \frac{{}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,s)\,{}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(s)}{p_{22}(s)}\, ds \leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k)!} \int_a^t \frac{{}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,s)\psi^{2k}(s)}{p_{22}(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k)!} \int_a^t \frac{{}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,s)\psi^{2k}(s)}{\xi(s)}\, ds = \Big(\text{заметим (см. [1]), что } {}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,s) = -{}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\Big) =$$

$$= -\frac{M^{k+1}}{(2k)!} \int_a^t {}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\psi^{2k}(s)\, d\psi(s) =$$

$$= -\frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t {}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\, d\psi^{2k+1}(s) = \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t \psi^{2k+1}(s) \left({}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) \right)'_s ds =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{p_{11}(s) \left({}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) \right)'_s}{p_{11}(s)} \psi^{2k+1}(s)\, ds =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{p_{11}(s) \left({}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) \right)'_s - \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\, {}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) + \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\, {}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)}{p_{11}(s)} \psi^{2k+1}(s)\, ds =$$

$$= \Big(\text{заметим (см. [1]), что } {}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) = p_{11}(s)\left({}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\right)'_s - \frac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\ {}^{0}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\Big) =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{{}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t) - \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\ {}^{0}_{\mathcal{P}}C(t,s)}{p_{11}(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{{}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)}{p_{11}(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{\left|{}^{1}_{\mathcal{R}}C^*(s,t)\right|}{\xi(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}M_1}{(2k+1)!}\int_a^t \psi^{2k+1}(s)\,d\psi(s) \leqslant \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!}\psi^{2k+2}(t) = \frac{M^{(k+1)+1}\psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}.$$

Таким образом, ${}^{0}_{\mathcal{P}}x_{k+1}(t) \leqslant \dfrac{M^{(k+1)+1}\psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}$.

По индукции оценки (1.6) имеют место для всех $k\in\mathbb{N}$. Теорема доказана. □

С л е д с т в и е 1.1. *Если* $p_{11}(t) = p_{22}(t) \equiv 1$ *на* J *или* $1 \leqslant p_{11}(t)$ *при всех* t *из* J *и* $p_{22}(t) \equiv 1$ *на* J ($1 \leqslant p_{22}(t)$ *при всех* t *из* J *и* $p_{11}(t) \equiv 1$ *на* J), *то оценки* (1.6) *выглядят так:*

$$0 \leqslant {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}(t-a)^{2k}}{(2k)!} \quad (t \in J,\ \ k = 0,1,\ldots).$$

Введем в рассмотрение функции $\varphi_k(t)\colon J \to \mathbb{R}$ с помощью следующих равенств:

$$\varphi_k(t)\frac{M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} = {}^{0}_{\mathcal{P}}x_k(t),$$

где $k = 0,1,\ldots$ $(0 \leqslant \varphi_k(t) \leqslant 1)$.

Пусть

$$v(t,\lambda) \doteq \varphi_0(b)M + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k\varphi_k(b)M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J). \tag{1.7}$$

Т е о р е м а 1.2. *Функция* $v(t,\lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\lambda\big(v(t,\lambda)\big)''_{\sqrt{\lambda}} = \psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) \tag{1.8}$$

и условиям

$$v(b,\lambda) = {}^{0}_{\mathcal{P}}u(b,\lambda), \quad \left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)\Big|_{t=a} = 0,$$

$$v(t,\lambda)\big|_{\lambda=0} = {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a), \ \left(\big(\sqrt{\lambda}\,v(t,\lambda)\big)'_{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_{\lambda=0} = {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a). \tag{1.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В том, что функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.8), убедимся непосредственной подстановкой правой части формулы (1.7) в левую и правую части уравнения (1.8):

$$\lambda\big(v(t,\lambda)\big)''_{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t) + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{4!} + \ldots,$$

$$\psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) =$$

$$= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t) + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{4!} + \ldots .$$

Получили одно и то же выражение.

Подставляем правую часть формулы (1.7) в левые части каждого условия из четырех условий (1.9):

$$v(b,\lambda) = \varphi_0(b)M - \frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(b)}{2!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(b)}{4!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(b)}{6!} + \ldots =$$

$$= p_{00}(b)\Big(x_0(b) - \lambda x_1(b) + \lambda^2 x_2(b) - \lambda^3 x_3(b) + \ldots\Big) = {}^{0}_{\mathcal{P}}u(b,\lambda),$$

$$\Big(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\Big)\Big|_{t=a} = \left(-\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(t)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(t)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(t)}{5!} + \ldots\right)\Big|_{t=a} =$$

$$= -\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(a)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(a)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(a)}{5!} + \ldots = (\psi(a)=0) = 0,$$

$$v(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \left(\varphi_0(b)M - \frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t)}{2!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{4!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{6!} + \ldots\right)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a),$$

$$\Big(\big(\sqrt{\lambda}\,v(t,\lambda)\big)'_{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \left(\left(\varphi_0(b)M\sqrt{\lambda} - \frac{(\sqrt{\lambda})^3\varphi_1(b)M^2\psi^2(t)}{2!} + \frac{(\sqrt{\lambda})^5\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{4!} - \ldots\right)'_{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \varphi_0(b)M + 0 = {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a).$$

Убеждаемся, что функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет условиям (1.9). Теорема доказана. □

Уравнение (1.8) назовем квазидифференциальным уравнением в частных производных.

То, что решение задачи (1.8), (1.9) — функция $v(t,\lambda)$ — удовлетворяет первому условию из условий (1.9), означает, что собственные значения задачи (1.3), (1.4) могут быть найдены как корни уравнения

$$v(b,\lambda) = 0. \tag{1.10}$$

Поэтому определенный интерес представляют вопросы об исследовании свойств и об аппроксимации корней уравнения (1.10) в тех случаях, когда корни не могут быть найдены точно.

§ 2. О построении одного тригонометрического полинома

Ниже предлагается некоторый подход к решению поставленных воросов, который, возможно, не лишен недостатков и, конечно же, не является единственным.

Вначале обратим внимание читателя на то, что имеет место следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:*

$$\Big(\big(v(t,\lambda)\big)^{(k)}_{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big|_{\lambda=0} = \left[\begin{array}{l} 0, \quad \text{если } k = 2m-1, \\ \\ (-1)^{(\frac{k}{2})}\varphi_{\frac{k}{2}}(b)M^{\frac{k}{2}+1}\psi^k(t), \quad \text{если } k = 2m, \quad \text{где } m = 1,2,\ldots . \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m = 1, 2, \ldots$. Найдем $\big(v(t,\lambda)\big)^{(2m-1)}_{\sqrt{\lambda}}$ и $\big(v(t,\lambda)\big)^{(2m)}_{\sqrt{\lambda}}$ соответственно:

$$\begin{gathered}\big(v(t,\lambda)\big)^{(2m-1)}_{\sqrt{\lambda}} \;=\; (-1)^m\sqrt{\lambda}\,\varphi_m(b)M^{m+1}\psi^{2m}(t)+\\ +\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1+j}(\sqrt{\lambda})^{3+2j}\varphi_{m+1+j}(b)M^{m+2+j}\psi^{2m+2+2j}(t)}{(3+2j)!},\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}\big(v(t,\lambda)\big)^{(2m)}_{\sqrt{\lambda}} \;=\; (-1)^m\varphi_m(b)M^{m+1}\psi^{2m}(t)+\\ +\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1+j}(\sqrt{\lambda})^{2+2j}\varphi_{m+1+j}(b)M^{m+2+j}\psi^{2m+2+2j}(t)}{(2+2j)!}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя в правые части формул (2.2) и (2.3) $\lambda = 0$, убеждаемся в справедливости равенства (2.1). Утверждение доказано. □

Построим некоторую функцию, которая удовлетворяла бы уравнению (1.8), а также второму, третьему и четвертому условиям из условий (1.9) и нескольким первым условиям вида (2.1).

С этой целью сначала определим следующую вспомогательную функцию:

$$Q_n(t,\lambda) \;\doteq\; {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a)+\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k(\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))-1)+c_k\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t))\Big), \tag{2.4}$$

где параметры $d_k\in\mathbb{R}$ и $c_k\in\mathbb{R}$.

Легко видеть, что функция $Q_n(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.8). Действительно, подсталяя в левую и в правую части уравнения (1.8) правую часть формулы (2.4), получаем соответственно следующие равенства:

$$\lambda(Q_n(t,\lambda))''_{\sqrt{\lambda}} \;=\; -\lambda\psi^2(t)\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k\,k^2\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))+c_k\,k^2\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t))\Big),$$

$$\psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(Q_n(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) \;=\; -\lambda\psi^2(t)\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k\,k^2\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))+c_k\,k^2\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t))\Big).$$

Получили одно и то же выражение.

Очевидно, что функция $Q_n(t,\lambda)$ удовлетворяет третьему и четвертому условиям из условий (1.9).

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Выполнения функцией $Q_n(t,\lambda)$ первых $2n$ ($n\in\mathbb{N}$) условий вида* (2.1) *и одновременно выполнения второго условия из условий* (1.9) *можно добиться за счет выбора параметров d_k и c_k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m = 1, 2, \ldots, n$. Найдем $\big(Q_n(t,\lambda)\big)^{(2m-1)}_{\sqrt{\lambda}}$ и $\big(Q_n(t,\lambda)\big)^{(2m)}_{\sqrt{\lambda}}$ соответственно:

$$\begin{gathered}\big(Q_n(t,\lambda)\big)^{(2m-1)}_{\sqrt{\lambda}} \;=\\ =\psi^{2m-1}(t)\sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^m d_k\,k^{2m-1}\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t))+(-1)^{m-1}c_k\,k^{2m-1}\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))\Big),\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\big(Q_n(t,\lambda)\big)^{(2m)}_{\sqrt{\lambda}} \;=\; (-1)^m\psi^{2m}(t)\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k\,k^{2m}\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))+c_k\,k^{2m}\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t))\Big). \tag{2.6}$$

Подставляя правые части формул (2.5) и (2.6) в начальные условия (2.1), получаем, что должны выполняться следующие равенства:

$$\psi^{2m-1}(t)\sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^m d_k\, k^{2m-1}\sin(k\sqrt{0}\psi(t))+(-1)^{m-1}c_k\, k^{2m-1}\cos(k\sqrt{0}\psi(t))\Big)=0,$$

$$(-1)^m\psi^{2m}(t)\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k\, k^{2m}\cos(k\sqrt{0}\psi(t))+c_k\, k^{2m}\sin(k\sqrt{0}\psi(t))\Big)=(-1)^m\varphi_m(b)M^{m+1}\psi^{2m}(t).$$

Следовательно, должны выполняться два следующих равенства:

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\, k^{2m-1}=0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n}d_k\, k^{2m}=\varphi_m(b)M^{m+1}.$$

Отсюда получаем две системы линейных алгебраических уравнений для определния параметров c_k и d_k:

$$\begin{cases} c_1+2c_2+3c_3+\ \ldots\ +nc_n\ =\ 0,\\ c_1+2^3c_2+3^3c_3+\ \ldots\ +n^3c_n\ =\ 0,\\ \qquad\qquad \cdots\\ c_1+2^{2n-3}c_2+3^{2n-3}c_3+\ \ldots\ +n^{2n-3}c_n\ =\ 0,\\ c_1+2^{2n-1}c_2+3^{2n-1}c_3+\ \ldots\ +n^{2n-1}c_n\ =\ 0\end{cases} \tag{2.7}$$

и

$$\begin{cases} d_1+2^2d_2+3^2d_3+\ \ldots\ +n^2d_n\ =\ \varphi_1(b)M^2,\\ d_1+2^4d_2+3^4d_3+\ \ldots\ +n^4d_n\ =\ \varphi_2(b)M^3,\\ \qquad\qquad \cdots\\ d_1+2^{2n-2}d_2+3^{2n-2}d_3+\ \ldots\ +n^{2n-2}d_n\ =\ \varphi_{n-1}(b)M^n,\\ d_1+2^{2n}d_2+3^{2n}d_3+\ \ldots\ +n^{2n}d_n\ =\ \varphi_n(b)M^{n+1}.\end{cases} \tag{2.8}$$

Системы (2.7) и (2.8) однозначно разрешимы. Решения системы (2.7) есть $c_1^*=\ \ldots\ =c_n^*\ =\ 0$. Решения системы (2.8) обозначим через $d_1^*,\quad d_2^*,\quad d_3^*,\ \ldots\ ,\ d_n^*$.

Проверим выполнение функцией $Q_n(t,\lambda)$ второго условия из условий (1.9) при найденных значениях c_k^* и d_k^* параметров c_k и d_k:

$$\xi(t)\big(Q_n(t,\lambda)'_t\big)\Big|_{t=a}=\ \xi(a)\left(\frac{1}{\xi(t)}\sum_{k=1}^{n}d_k^*(-\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(t)))\right)\Big|_{t=a}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}d_k^*(-\sin(k\sqrt{\lambda}\psi(a)))\ =\ \sum_{k=1}^{n}d_k^*(-\sin(k\sqrt{\lambda}\,0))\ =\ 0.$$

Второе условие из условий (1.9) выполнено. Утверждение доказано. □

Определим следующую функцию:

$$P_n(t,\lambda)\ \doteq\ {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a)+\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k^*\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))-1\Big)\ =\ {}^{0}_{\mathcal{P}}C(b,a)+\sum_{k=1}^{n}d_k^*\cos(k\sqrt{\lambda}\psi(t))-n. \tag{2.9}$$

Функция $P_n(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.8), а также второму, третьему и четвертому условиям из условий (1.9) и первым $2n$ ($n\in\mathbb{N}$) условиям вида (2.1).

Функция $P_n(b,\lambda)$ представляет собой тригонометрический полином относительно переменной λ. Заметим, что нули тригонометрического полинома могут быть выражены через нули некоторого квазиполинома (относительно таких задач и их решений см., например, [3]).

Выдвинем следующую гипотезу.

Гипотеза 2.1. *Функция $v(t,\lambda)$ (см. (1.7)) может быть сколь угодно точно аппроксимирована функцией $P_n(t,\lambda)$, а корни уравнения (1.10) могут быть сколь угодно точно приближены нулями тригонометрического полинома $P_n(b,\lambda)$ при больших значениях $n\in\mathbb{N}$.*

На этой гипотезе закончим рассмотрение предлагаемого подхода к решению вопроса об аппроксимации корней уравнения (1.10).

В заключение отметим, что изучение нулей тригонометрического полинома $P_n(b, \lambda)$ необходимо для исследования асимптотики спектра краевой задачи (1.3), (1.4).

Список литературы

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1999. Вып. 1 (16). С. 3–105.
2. Ватолкин М.Ю., Дерр В.Я. О представлении решений квазидифференциального уравнения // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 27–34.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.

Поступила в редакцию 29.09.2015

Ватолкин Михаил Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики и информатики, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.
E-mail: pmi@istu.ru

M. Yu. Vatolkin

On the eigenfunctions and eigenvalues of a quasidifferential second order boundary value problem

Keywords: eigenfunctions, eigenvalues, power series, estimations for coefficients, quasidifferential equation, boundary value problem, sum of series.

MSC: 34B09

In this paper, the representation of the eigenfunctions of one quasidifferential boundary value problem of the second order in the form of the sums of power series is considered. The estimations for their coefficients are obtained.

REFERENCES

1. Derr V.Ya. Disconjugacy of solutions of a linear quasidifferential equation, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1999, no. 1 (16), pp. 3–105 (in Russian).
2. Vatokin M.Yu., Derr V.Ya. On the representation solutions of a quasidifferential equation, *Russian Mathematics*, 1995, vol. 39, no. 10, pp. 25–32.
3. Polya G., Szego G. *Zadachi i teoremy iz analiza* (The problems and the theorems from analysis), vol. 2, Moscow: Nauka, 1978, 432 p.

Received 29.09.2015

Vatolkin Mikhail Yur'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: pmi@istu.ru