

УДК 517.956.4, 51-73

© А. М. Ковалева, А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

**УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ ВОЛНООБРАЗНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ¹**

Рассматривается периодическая краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения, которое называют нелокальным уравнением эрозии. Изучен случай малого отклонения для пространственной переменной. Продемонстрирована возможность бифуркаций пространственно неоднородных решений, для которых получены асимптотические формулы, и изучен вопрос об их устойчивости. Результаты получены на базе применения методов теории бифуркаций.

Ключевые слова: нелокальная модель эрозии, нормальные формы, устойчивость, бифуркации, асимптотика.

Введение

В работе рассматривается нелинейное уравнение с частными производными с отклоняющимся аргументом, которое предложено в качестве математической модели процесса формирования различных типов рельефа на поверхности плоской мишени при ее бомбардировке потоком ионов [1–3]. Следует отметить, что эта математическая модель в определенной степени дополняет известную математическую модель Бредли–Харпера [4], так как при их выводе используют одну и ту же классическую теорию П. Зигмунда [5] о взаимодействии потоков заряженных частиц с твердым телом.

Приведем уравнение нелокальной эрозии в перенормированном виде [1–3], хотя уместно обратить внимание на то обстоятельство, что для перенормировок возможны различные варианты. Итак, далее будем рассматривать уравнение

$$u_t = au_{xx} - cw_x + b(u - w) + b_1(u - w)w_x + b_2(w_x)^2 + b_3(u - w)(w_x)^2 + b_4(w_x)^3, \quad (0.1)$$

где $u = u(t, x)$ — нормированное отклонение от плоского фронта мишени, $w = u(t, x - h)$, $h \in \mathbb{R}$. Коэффициенты a, b, c, b_1, b_2, b_3 характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени. Они зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. При этом $a > 0$. Коэффициент $a = a(J, \Theta)$, и при фиксированном Θ данная функция убывает при возрастании J . Уравнение (0.1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями. С учетом нормировок можно считать, что при всех $x, t > 0$ выполнено равенство

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (0.2)$$

Следует отметить, что краевая задача (0.1), (0.2) наряду с решением $u(t, x)$ допускает решение $u(t, x) = \text{const}$. Более того, она инвариантна относительно замены $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \text{const}$. Поэтому далее будем рассматривать решение в окрестности нулевого состояния равновесия (СР). Окрестность иных состояний равновесия $u(t, x) = \text{const}$, в силу вышесказанного, может быть заменена на окрестность нулевого решения. С физической точки зрения замена $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \text{const}$ означает замену системы координат.

Для изучения вопроса, связанного с описанием структуры окрестности нулевого СР, краевую задачу (0.1), (0.2) следует дополнить начальными условиями

$$u(0, x) = f(x). \quad (0.3)$$

Будем считать, что $f(x) \in H_2^2$, где через H_2^2 обозначим пространство, состоящее из 2π периодических функций $f(x) \in L_2(0, 2\pi)$, у которых существуют обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(0, 2\pi)$. Устойчивость в нашем случае будем понимать в смысле нормы пространства H_2^2 . Напомним, что норма в H_2^2 вводится равенством

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (№ МК-5932.2015.1).

$$\|f\|_{H_2^2} = \|f\|_{L_2(0,2\pi)} + \|f'\|_{L_2(0,2\pi)} + \|f''\|_{L_2(0,2\pi)},$$

$$\|f\|_{L_2(0,2\pi)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x) dx}.$$

Наконец, пространственное отклонение h мы будем считать малым, то есть $h \ll 1$. Без нарушения общности можно считать, что $h > 0$. Случай $h < 0$ может быть сведен к первому заменой $x \rightarrow -x$. При этом, конечно, меняется знак коэффициента c . Подчеркнем, что коэффициенты a, b положительны.

§ 1. Условия устойчивости однородных состояний равновесий

Для исследования устойчивости нулевого СР рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (0.1), (0.2) в окрестности тривиального СР. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = A(a)u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (1.1)$$

где линейный дифференциальный оператор (ЛДО)

$$A(a)v = av'' - cv'_h + b(v - v_h), \quad v = v(x), \quad v_h = v(x - h). \quad (1.2)$$

Область определения ЛДО состоит из достаточно гладких 2π периодических функций. Найдем его собственные значения (СЗ). Положим $v(x) = v_n(x) = \exp(inx)$, где $n \in Z$ (множеству целых чисел). В результате получаем, что

$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -an^2 + b(1 - \cos(nh)) - cn \sin(nh), \quad \sigma_n = b \sin(nh) - cn \cos(nh).$$

Ясно, что $\lambda_0 = 0$ ($\tau_0 = \sigma_0 = 0$). Если окажется, что для всех $n \neq 0$ выполнено неравенство $\tau_n \leq 0$, то нулевое решение краевой задачи (0.1), (0.2) устойчиво (оно не может быть асимптотически устойчивым, даже если $\tau_n < 0$). Далее нас будут интересовать СЗ λ_n при $n \neq 0$.

Пусть $\tau_k > 0$ при некотором k . Тогда нулевое СР краевой задачи (1.1) неустойчиво. При $a \gg 1$ выполнено неравенство $\tau_n < 0$. Если же $a = 0$, то последовательность τ_n меняет знак. Следовательно, существуют такие a , что выполнены два условия:

$$1) \tau_n \leq 0 \text{ при всех } n; \quad 2) \tau_m = 0 \text{ при } m \neq 0.$$

Последний случай назовем критическим, а наибольшее из возможных $a = a_{кр}$ — критическим значением параметра a . Потеря устойчивости происходит при уменьшении a и после достижения некоторой критической величины $a_{кр}$.

Пусть при некоторых $m \neq 0$ справедливо $\tau_m = 0$. Ясно, что $\tau_{-m} = \tau_m = 0$. Пусть дополнительно известно, что реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Тогда равенство $\tau_m = 0$ может быть переписано в эквивалентной форме

$$a = \frac{b(1 - \cos(mh)) - cm \sin(mh)}{m^2}.$$

Из этих рассуждений вытекает, что

$$a_{кр} = \max_{n \neq 0} \psi_n, \quad \psi_n = \frac{b(1 - \cos(nh)) - cn \sin(nh)}{n^2},$$

если такой положительный максимум существует.

Из формулы для ψ_n видно, что $\psi_{-n} = \psi_n$. Поэтому при изучении вопроса об определении $a_{кр}$ достаточно ограничиться разбором той ситуации, когда $n \in N$ (множеству натуральных чисел). Итак, рассмотрим последовательность ψ_n , где $n \in N$. Нетрудно заметить, что при всех натуральных n справедливо неравенство

$$|\psi_n| \leq (2|b| + |c|n)/n^2,$$

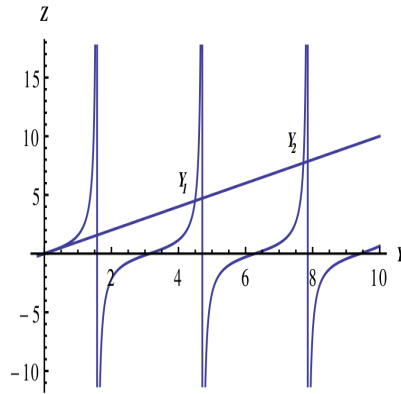


Рис. 1

то есть она ограничена. Более того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 0$. Поэтому последовательность ψ_n заведомо имеет наибольший и наименьший элементы и $a_{\text{кр}}$ определяется, если $\max_{n \in N} \psi_n > 0$.

Можно указать некоторые частные случаи выбора коэффициентов b и c , когда $\max_{n \in N} \psi_n$ можно найти достаточно просто и практически в явном виде.

Случай 1. Пусть $b = 0$, $c > 0$, то есть

$$\psi_n = -c \frac{\sin(nh)}{n}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f_1(y) = -\frac{\sin y}{y}, \quad y \in [h, \infty).$$

Ясно, что $\psi_n = -ch f_1(nh)$. Необходимые условия экстремума для $f_1(y)$ выполнены в точках y_k , где $f_1'(y_k) = 0$. При этом y_k следует искать как положительные корни уравнения

$$y = \operatorname{tg} y.$$

Последнее уравнение имеет счетный набор положительных корней y_1, y_2, y_3, \dots . На рисунке 1 это проиллюстрировано. На нем отмечены несколько первых точек пересечения графиков функций $z = y, z = \operatorname{tg} y$. Для положительных корней характеристического уравнения $y = \operatorname{tg} y$ справедливо включение

$$y_k \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi(k-1), \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом, уравнение $y = \operatorname{tg} y$ может быть решено численно. Для локализации корней был использован метод деления отрезка пополам. Оказалось, что

$$y_1 = 4.49, \quad y_2 = 7.73.$$

Результаты приведены с точностью до двух знаков после запятой.

Пусть y_k — корень данного уравнения. Тогда справедливо равенство

$$|f_1(y_k)| = |\cos y_k| = (1 + y_k^2)^{-1/2}.$$

Действительно,

$$|f_1(y_k)| = \left| \frac{\sin y_k}{y_k} \right|,$$

но $y_k = \operatorname{tg} y_k$. Поэтому $|f_1(y_k)| = |\cos y_k|$. С другой стороны, $\sin^2 y_k + \cos^2 y_k = 1$, а $\sin y_k = y_k \cos y_k$. Откуда выводим обсуждаемое здесь равенство. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_1(y_k)| = 0$$

и, кроме того, последовательность $f_1(y_k)$ монотонно убывает с ростом k . Поэтому функция $f_1(y)$ имеет при $c > 0$ положительный максимум в точке $y = y_1$. Положим теперь $m = \lfloor y_1/n \rfloor$. Из предшествующих вычислений вытекает, что последовательность ψ_n достигает положительного максимума, если $n = m$ или $n = m + 1$. В иной форме запишем

$$a_{\text{кр}_1} = -\text{ch} \frac{\sin(mh)}{mh}$$

или

$$a_{\text{кр}_2} = -\text{ch} \frac{\sin((m+1)h)}{(m+1)h}.$$

Истинное $a_{\text{кр}} = \max\{a_{\text{кр}_1}, a_{\text{кр}_2}\}$. Отметим, что при $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}_1}$ ЛДО $A_1 = A(a_{\text{кр}_1})$ имеет СЗ

$$\lambda_{m,-m} = \pm i\sigma_m, \quad \sigma_m = -cm \cos(mh),$$

а остальные СЗ ЛДО A_1 лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\text{Re} \lambda_n \leq -\gamma < 0 \quad (n \neq m, -m).$$

При $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}_2}$ ЛДО $A_2 = A(a_{\text{кр}_2})$ имеет следующие СЗ:

$$\lambda_{m+1,-(m+1)} = \pm i\sigma_{m+1}, \quad \sigma_{m+1} = -c(m+1) \cos((m+1)h),$$

а остальные СЗ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Особый случай реализуется, если $a_{\text{кр}_1} = a_{\text{кр}_2} = a_{\text{кр}}$. Тогда у ЛДО $A(a_{\text{кр}})$ на мнимой оси лежат две пары чисто мнимых СЗ:

$$\lambda_{m,-m} = \pm i\sigma_m, \quad \lambda_{m+1,-(m+1)} = \pm i\sigma_{m+1}.$$

Такой вариант реализуется за счет специального выбора $h = h_*$ ($h_* \approx 2y_1/(2m+1)$). Далее такой выбор $h = h_*$ не будем рассматривать.

Случай 2. Пусть $b = 0$, $c < 0$. В таком случае повторяются все построения из предыдущего случая, но вместо корня y_1 следует выбрать следующий корень характеристического уравнения $\text{tg} y = y$, то есть y_2 .

Случай 3. Пусть $c = 0$, $b > 0$. Тогда

$$\psi_n = b \frac{1 - \cos(nh)}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}, \quad \psi_n = bh^2 f_2(nh).$$

Понятно, что необходимые условия экстремума реализуются в точке y_s , где y_s — корни уравнения

$$f_2'(y) = \frac{y \sin y - 2(1 - \cos y)}{y^3} = 0.$$

Соответственно, корни последнего уравнения можно найти из двух следующих вспомогательных уравнений:

$$a) \sin \frac{y}{2} = 0; \quad b) \text{tg} \frac{y}{2} = \frac{y}{2}.$$

В результате получаем две группы корней:

$$a) y_k = 2\pi k, \quad k \in N; \quad b) y_s = 2\eta_s,$$

где η_s — корни знакомого уравнения $\eta = \text{tg} \eta$ (см. случай 1).

Сразу отметим, что корни группы $a)$ не подходят, так как $f_2(y_k) = f_2(2\pi k) = 0$. Рассмотрение корней группы $b)$ приводит к результатам, аналогичным тем, которые были получены при разборе случая 1, но с той разницей, что подходящий корень $y_1 \approx 8.98$ вдвое больше корня, найденного при анализе случая 1. В результате доказано утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $a \geq a_{\text{кр}}$, тогда решения линейной краевой задачи (1.1) устойчиво в смысле нормы фазового пространства решений этой задачи (H_2^2 в нашем случае). При $a < a_{\text{кр}}$ происходит потеря их устойчивости.

Подчеркнем еще раз, что при $a = a_{\text{кр}}$ в ситуации общего положения ($h \neq h_*$) ЛДО $A = A(a_{\text{кр}})$ имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\sigma$, где $\sigma = \sigma_m = -cm \cos(mh)$, $m \in N$, а m — номер максимального элемента последовательности ψ_n . Соответствующие собственные функции (СФ) равны $\exp(\pm imx)$.

Прежде чем перейдем к анализу нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2), отметим, что она входит в класс абстрактных параболических уравнений, рассмотренных в работе [6]. Если функция $f(x) \in H_2^2$, то согласно результатам этой работы смешанная задача (0.1)–(0.3) [6] локально корректно разрешима. Проверка базируется на том факте, что ЛДО $A(a)$ является производящим оператором аналитической полугруппы ограниченных линейных операторов (см., например, [7]).

§ 2. Построение нормальной формы

Рассмотрим нелинейную краевую задачу (0.1), (0.2) при $a = a_{\text{кр}}(1 - \gamma\varepsilon)$, где $\gamma = \pm 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то есть ε играет роль малого параметра. Положим $A(\varepsilon) = A(a_{\text{кр}} + \gamma\varepsilon)$. В ситуации общего положения этот ЛДО имеет пару следующих СЗ:

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon),$$

отвечающих СФ $\exp(\pm imx)$, где $m \in N$, и этот параметр был выбран в предыдущем разделе. При этом простые вычисления показывают, что

$$\tau(\varepsilon) = \gamma m^2 \varepsilon, \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma = -cm \cos(mh).$$

Следовательно, $\tau(0) = 0$, а

$$\tau'_0 = \left. \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \gamma m^2 > 0.$$

В результате, в чем нетрудно убедиться (см., например, [8, 9]), реализуются все условия, при которых применима широко известная теорема Андронова–Хопфа. Последнее означает, что в ситуации общего положения анализ структуры окрестности нулевого СР может быть сведен к анализу нормальной формы (НФ) Пуанкаре–Дюлака. В нашем случае ее укороченный вариант имеет следующий вид:

$$z' = z\{g + (l_1 + il_2)|z|^2\},$$

где $z = z(s)$, $g = a_{\text{кр}} m^2 \gamma$, $s = \varepsilon t$, $l_1, l_2 \in R$ и подлежат определению в процессе реализации алгоритма построения НФ [10–11].

Следуя этому алгоритму, решение краевой задачи (0.1), (0.2) при выбранных значениях a ($a = a_{\text{кр}}(1 - \gamma\varepsilon)$) будем искать в виде суммы

$$u(t, x, s, \varepsilon) = \varphi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (2.1)$$

$$w(t, x, s, \varepsilon) = u(t, x - h, s, \varepsilon),$$

где $s = \varepsilon t$, достаточно гладкие функции $u_j(t, x, s)$ удовлетворяют краевым условиям (0.2), а по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_m$. Наконец, $w(t, x, s, \varepsilon) = u(t, x - h, s, \varepsilon)$.

Заметим, что в этом разделе мы фактически выбрали $n = m$. Напомним, что возможен случай, когда $n = m + 1$ (см. § 1). Тогда во всех дальнейших построениях следует заменить m на $m + 1$, в том числе и в ответах.

После подстановки суммы (2.1) в (0.1), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем три краевые задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_{\text{кр}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - c \frac{\partial w_1}{\partial x} + b(u_1 - w_1), \\ u_1(t, x + 2\pi) &= u_1(t, x),\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_{\text{кр}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c \frac{\partial w_2}{\partial x} + b(u_2 - w_2) + b_1(u_1 - w_1) \frac{\partial w_1}{\partial x} + b_2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2, \\ u_2(t, x + 2\pi) &= u_2(t, x),\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3}{\partial t} &= a_{\text{кр}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^3} - c \frac{\partial w_3}{\partial x} + b(u_3 - w_3) - a_{\text{кр}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \\ &+ b_1(u_1 - w_1) \frac{\partial w_2}{\partial x} + b_1(u_2 - w_2) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \\ &+ 2b_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + b_3(u_1 - w_1) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + b_4 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^3, \\ u_3(t, x + 2\pi) &= u_3(t, x).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Положим

$$u_1 = u_1(t, s, \varepsilon) = z(s) \exp(imx + i\sigma_m t) + \bar{z}(s) \exp(-imx - i\sigma_m t).$$

Учитывая выбор $a_{\text{кр}}$, нетрудно заметить, что u_1 удовлетворяет краевой задаче (2.2).

Анализ неоднородной краевой задачи (2.3) показывает, что она разрешима в классе $2\pi/\sigma_m$ периодических по переменной t функций, если выполнено равенство

$$\varphi' = m[2b_2 m + ib_1(k - \bar{k})]|z|^2,$$

где $k = \exp(-imh)$. В иной форме записи имеем, что

$$\varphi' = 2m[b_2 m + b_1 \sin(mh)]|z|^2.$$

При этом оказалось, что подходящее решение краевой задачи (2.3)

$$u_2 = u_2(t, s, \varepsilon) = \eta z^2(s) \exp(2imx + 2i\sigma_m t) + \bar{\eta} \bar{z}^2(s) \exp(-2imx - 2i\sigma_m t),$$

$$\eta = \frac{ikm(1-k)b_1 - k^2 m^2 b_2}{2i\sigma_m + 4m^2 a_{\text{кр}} + 2icmk^2}.$$

На следующем шаге при реализации данного алгоритма построения НФ следует рассмотреть неоднородную краевую задачу (2.4). Из условий ее разрешимости получаем уравнение для определения $z = z(s)$:

$$z' = gz + (l_1 + il_2)z|z|^2,$$

где, в частности, $g = a_{\text{кр}} m^2 \gamma$, то есть $g > 0$ при $\gamma > 0$ и, напротив, $g < 0$ при $\gamma < 0$. Для \bar{z} получаем сопряженное уравнение.

Итак, в результате анализа неоднородных краевых задач (2.3), (2.4) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, НФ в общепринятой терминологии:

$$\begin{aligned}\varphi' &= q|z|^2, \\ z' &= gz + (l_1 + il_2)z|z|^2, \quad \bar{z}' = g\bar{z} + (l_1 - il_2)\bar{z}|z|^2.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Подчеркнем, что постоянные q, g, l_1, l_2 могут быть найдены из условий разрешимости в классе t периодических с периодом $2\pi/\sigma_m$ функций.

З а м е ч а н и е 1. Напомним, что неоднородная краевая задача

$$v_t = a_{\text{кр}} v_{xx} - c(v_h)_x + b(v - v_h) + F(t, x),$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x),$$

где $w_h = w(t, x - h)$, $F(t, x)$ — достаточно гладкая периодическая функция, для которой

$$F(t, x + 2\pi) = F(t, x), \quad F(t + 2\pi/\sigma_m, x) = F(t, x)$$

имеет t периодическое решение с периодом $2\pi/\sigma_m$, если [11–12]

$$\int_0^{2\pi} F(t, x) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} F(t, x) \exp(\pm ix \pm i(2\pi/\sigma_m)t) dx dt = 0.$$

Аналогичные условия для $v(t, x)$ выделяют одно подходящее решение.

В нашем случае применение условий разрешимости к неоднородной краевой задаче (2.4) показывает, что

$$l_1 + il_2 = b_1 im(2k^2 - k - \bar{k})\eta + 4b_2 m^2 k\eta + b_3 m^2(-k^2 - k + 2) + 3b_4 im^3 k, \quad k = \exp(-imh).$$

Анализ достаточно громоздкого выражения для d показал, что d может принимать значение любого знака.

Для убедительности можно привести пример. Пусть $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Тогда после упрощений получаем, что

$$l_1 = \frac{3b_4 y_1^3 \sin y_1}{h^3}, \quad l_2 = \frac{3b_4 y_1^3 \cos y_1}{h^3}.$$

При получении данного приближенного равенства использовалось обстоятельство, что $mh \approx y_1$, и, следовательно, $\cos mh \approx \cos y_1 = -0.22$, $\sin mh \approx \sin y_1 = -0.95$ ($y_1 = 4.49$). Все численные результаты приведены с точностью до двух знаков после запятой. Из последней формулы для l_1 видно, что она может принимать любой знак. Так,

$$l_1 \approx -85.99(b_4/h^3) < 0, \quad \text{если } b_4 > 0, \quad \text{и } l_1 > 0, \quad \text{если } b_4 < 0.$$

Положим

$$z(s) = \rho(s) \exp(i\omega(s)). \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в систему (2.5) и выделения вещественных и мнимых частей получаем, что в новых переменных система (2.5) приобретает вид

$$\begin{aligned} \varphi' &= q\rho^2, \quad \omega' = l_2\rho^2, \\ \rho' &= g\rho + l_1\rho^3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При изучении системы (2.7) главную роль играет уравнение для амплитуды ρ . Оно будет иметь следующее ненулевое СР:

$$\rho = \sqrt{-\frac{g}{l_1}}.$$

Такое СР существует, когда $gl_1 < 0$. Данное решение устойчиво, если $l_1 < 0$, и неустойчиво, если $l_1 > 0$.

Л е м м а 2.1. *При $l_1 < 0$ система дифференциальных уравнений (2.7) имеет устойчивое решение*

$$\varphi(s) = q\rho^2 s + \varphi_0, \quad \omega(s) = l_2\rho^2 s + \omega_0, \quad \rho = \sqrt{-\frac{g}{l_1}}.$$

Переносим результаты на исходную краевую задачу (0.1), (0.2), можно сформулировать следующее утверждение (см. замену (2.1)).

Т е о р е м а 2.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотренная краевая задача (0.1), (0.2) при $a = a_{кр}(1 - \varepsilon\gamma)$ имеет решение*

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) &= \left[-\frac{qg}{l_1}\varepsilon + O(\varepsilon) \right] + v(t, x, \varepsilon), \\ v(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{-\frac{g}{l_1}} [\exp(imx + i\sigma(\varepsilon)t) + \exp(-imx - i\sigma(\varepsilon)t)] + \\ &+ \varepsilon \left(-\frac{g}{l_1}\right) [\eta \exp(2imx + 2i\sigma(\varepsilon)t) + \bar{\eta} \exp(-2imx - 2i\sigma(\varepsilon)t)] + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\sigma(\varepsilon) = \sigma_m - \varepsilon g l_2 / l_1 + o(\varepsilon)$. Данное решение существует, если $l_1 g < 0$, и наследует устойчивость цикла из леммы 2.1. Решения, указанные в рамках теоремы 2.1, называют периодическими решениями второго рода.

Доказательство аналогичного утверждения можно найти в работах [10–12].

§ 3. Заключение

В работе показано, что при $a < a_{кр}$, то есть при превышении интенсивностью потока некоторого порогового значения $J_{кр}$, возникают пространственно неоднородные решения. Они описывают неоднородный волновой рельеф, полученный в результате процесса обработки потоком ионов плоской мишени.

Подчеркнем, что выбираемая мода $m_1 = \lfloor -y_1/h \rfloor$ или $m_2 = m_1 + 1$. Иногда $m_1 = \lfloor -y_2/h \rfloor$, $m_2 = m_1 + 1$, где y_1, y_2 — корни характеристического уравнения. Отсюда ясно, что $m_1(m_2)$ достаточно велико, если $h \ll 1$ (вполне естественный вариант с физической точки зрения). Поэтому неоднородный волновой рельеф (см. формулу для $u(t, x, \varepsilon)$ из теоремы 2.1) имеет достаточно малую длину волны, что важно с точки зрения приложений в микроэлектронике (наноэлектронике).

Большая часть результатов была доложена на конференции «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015 г.).

Список литературы

1. Рудый А.С., Бачурин В.И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Известия Российской академии наук. Серия Физическая. 2008. Т. 72. № 5. С. 622–627.
2. Рудый А.С., Куликов А.Н., Куликов Д.А., Метлицкая А.В. Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии // Микроэлектроника. 2014. Т. 43. № 4. С. 282–288. DOI: 10.7868/S0544126914040103
3. Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении поверхности ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 2. С. 109–118.
4. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. 1988. Vol. 6. № 4. P. 2390–2395. DOI: 10.1116/1.575561
5. Sigmund P. Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets // Phys. Rev. 1969. Vol. 184. № 2. С. 383–416. DOI: 10.1103/PhysRev.184.383
6. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского математического общества. 1961. Т. 10. С. 297–350.
7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
8. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
9. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
10. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.
11. Куликов Д.А. Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Динамические системы. 2012. Т. 2 (30). № 3–4. С. 259–272.
12. Kulikov D.A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205. № 6. P. 791–805. DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x

Поступила в редакцию 14.10.2015

Ковалева Анастасия Михайловна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: nyama55@yandex.ru

Куликов Анатолий Николаевич, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

A. M. Kovaleva, A. N. Kulikov, D. A. Kulikov

Stability and bifurcations of undulate solutions for one functional-differential equation

Keywords: nonlocal model of erosion, normal forms, stability, bifurcations, asymptotic formulas.

MSC: 34K18, 34K19, 34K20

A periodic boundary-value problem for one nonlinear functional-differential equation is considered. This equation is well known as the nonlocal erosion equation. The case of small spatial deviation is studied. The possibility of the bifurcations for the spatial nonhomogeneous solutions is demonstrated. For these solutions, the asymptotical formulas are obtained and the stability is studied. All results are obtained with the help of the bifurcation theory.

REFERENCES

1. Rudy A.S., Bachurin V.I. Spatially nonlocal model of surface erosion by ion bombardment, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 586–591.
DOI: 10.3103/S1062873808050043
2. Rudy A.S., Kulikov A.N., Kulikov D.A., Metlitskaya A.V. High-mode wave relief in a spatially nonlocal erosion model, *Russian Microelectronics*, 2014, vol. 43, no. 4, pp. 277–283.
DOI: 10.1134/S1063739714040106
3. Rudy A.S., Kulikov A.N., Metlitskaya A.V. Simulation of formation of nanostructures during sputtering of the surface by ion bombardment, *Russian Microelectronics*, 2011, vol. 40, no. 2, pp. 98–107.
DOI: 10.1134/S1063739711020089
4. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment, *J. Vac. Sci. Technol. A*, 1988, vol. 6, no. 4, pp. 2390–2395. DOI: 10.1116/1.575561
5. Sigmund P. Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets, *Phys. Rev.*, 1969, vol. 184, no. 2, pp. 383–416. DOI: 10.1103/PhysRev.184.383
6. Sobolevskii P.E. Equations of parabolic type in a Banach space, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1961, vol. 10, pp. 297–350.
7. Krein S.G. *Linear equations in Banach spaces*, Birkhäuser Boston, 1982, XII+106 p. Original Russian text published in Krein S.G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve*, Moscow: Nauka, 1967, 464 p.
8. Marsden J.E., McCracken M. *The Hopf bifurcation and its applications*, New York: Springer-Verlag, 1976, 408 p. Translated under the title *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*, Moscow: Mir, 1980, 368 p.
9. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag: New York, 1983, 462 p. Translated under the title *Nelineinye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkatsii vektornykh polei*, Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2002, 560 p.
10. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 5, pp. 800–814.
DOI: 10.1134/S0965542512050132
11. Kulikov D.A. Heterogeneous dissipative structures in the problem of the formation of nano-relief, *Dinamicheskie sistemy*, 2012, vol. 2 (30), no. 3–4, pp. 259–272 (in Russian).
12. Kulikov D.A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 205, no. 6, pp. 791–805.
DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x

Received 14.10.2015

Kovaleva Anastasiya Mikhailovna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia.
E-mail: nyama55@yandex.ru

Kulikov Anatolii Nikolaevich, Associate Professor, Department of Differential Equations, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia.
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Kulikov Dmitrii Anatol'evich, Associate Professor, Department of Differential Equations, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru