

УДК 519.63, 530.145.6

© С. П. Копысов, И. М. Кузьмин

ОБОБЩЕННАЯ ЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ¹

Рассматривается обобщенная явная схема для решения динамических задач деформирования. Исследованы различные варианты выбора операторов, расширяющих условия устойчивости. Приводятся тестовые результаты решения трехмерных задач.

Ключевые слова: явная схема, условие устойчивости, динамика деформирования, параллельные алгоритмы.

Введение

В последнее время при численном исследовании некоторых нелинейных задач все большее внимание привлекают явные методы. Это связано с тем, что при решении ряда задач абсолютно устойчивыми методами возникает проблема с размещением элементов матрицы Якоби в оперативной памяти ЭВМ и, что более существенно, с ее обращением. В то же время явные методы не нуждаются в вычислении матрицы Якоби, и если нелинейность задачи не слишком велика, то они будут предпочтительнее. Появление современных гибридных ЭВМ с ускорителями вычислений позволяет также рассматривать явные методы, которые легко распараллеливаются. Однако не всегда возможности таких систем используются эффективно. Достижимое ускорение является прежде всего следствием архитектуры графических процессоров, которая не позволяет решать любые задачи столь же эффективно, как центральный процессор, и обуславливает создание и переход к логически простым алгоритмам, эффективно адаптирующимся к гибридным архитектурам [1].

Причина ограниченного применения явных методов связана с тем, что области устойчивости известных численных схем слишком малы. Устойчивость явных разностных схем определяется условием Куранта–Фридрихса–Леви или максимальной собственной частотой рассматриваемой задачи [2]. Возникающие при этом ограничения на временной шаг разностной схемы могут быть весьма обременительными и существенно снижать ее эффективность.

В настоящий момент имеется ряд работ, посвященных вопросам построения явных методов с расширенными областями устойчивости.

Расширение области устойчивости влечет за собой рост вычислительных затрат на шаг интегрирования. Если шаг ограничен в силу устойчивости, то за счет применения численных схем с расширенными областями устойчивости удастся значительно повысить эффективность алгоритма интегрирования. За счет контроля устойчивости и использования численных схем с расширенными областями устойчивости можно несколько раздвинуть границы применимости явных методов.

Явные схемы вычислительно эффективны в случае решения общих постановок динамического деформирования, где в реакции конструкции преобладают низкочастотные моды, и позволяют достаточно быстро ввести в рассмотрение новые определяющие соотношения и геометрическую нелинейность.

§ 1. Постановка задачи

При больших деформациях, перемещениях и поворотах вместо уравнений линейной теории упругости необходимо использовать геометрически нелинейные уравнения механики деформируемого твердого тела. В настоящей работе используется общая лагранжева формулировка геометрически нелинейных уравнений, когда в качестве отсчетной конфигурации используется начальная конфигурация, которая также является свободной от напряжений. Деформации полагаются малыми, но перемещения и повороты могут быть большими. В этом случае в качестве

¹ Работа поддержана РФФИ (грант №№ 14-01-00055_a, 14-01-31066-мол_a).

тензоров деформаций выбирается тензор деформаций Грина–Лагранжа, в качестве тензора напряжений — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа. Приведем полную систему уравнений, описывающую деформирование тела с физической и геометрической нелинейностью.

Рассмотрим динамическую задачу теории упругости для тела, занимающего область $\Omega \in \mathbb{R}^d$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и находящегося под действием объемных сил $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, зависящих от времени t . В отсчетной лагранжевой формулировке уравнения движения в общем случае принимают вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla_0 \cdot (F \cdot S) + \rho_0 f, \quad u(t_0) = u^0, \quad \dot{u}(t_0) = \dot{u}^0, \quad n \cdot (F \cdot S) = p, \quad (1.1)$$

где u — вектор перемещений; ρ_0 , ∇_0 — плотность и оператор дивергенции в отсчетной конфигурации; f , p — векторы массовых и поверхностных сил; F — градиент деформации; $S = F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T} \det F$ — симметричный тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; здесь σ — тензор напряжений Коши.

Исходную постановку задачи (1.1) нетрудно свести к конечно-элементному аналогу, используя конечно-элементную аппроксимацию и основываясь на методе взвешанных невязок Галёркина. Разбивая область Ω на конечные элементы и проводя процедуру аппроксимации в соответствии с МКЭ, получаем конечно-элементную формулировку динамической задачи — систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями:

$$M {}^{t+\Delta t} \ddot{u} + C {}^{t+\Delta t} \dot{u} + K {}^{t+\Delta t} u = {}^{t+\Delta t} f, \quad (1.2)$$

где ${}^{t+\Delta t} u$, ${}^{t+\Delta t} \dot{u}$, ${}^{t+\Delta t} \ddot{u}$ — векторы перемещений, скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени $t + \Delta t$; M — положительно определенная матрица масс; C — матрица демпфирования; ${}^{t+\Delta t} f$ — вектор внешних нагрузок, а вектор внутренних напряжений имеет вид

$$K {}^{t+\Delta t} u = {}^{t+\Delta t} G = \int_{0V} {}^{t+\Delta t} B_L^T {}^{t+\Delta t} S d^0 V, \quad (1.3)$$

здесь ${}^{t+\Delta t} S = \left[{}^{t+\Delta t} S_{11} \quad {}^{t+\Delta t} S_{22} \quad {}^{t+\Delta t} S_{33} \quad {}^{t+\Delta t} S_{12} \quad {}^{t+\Delta t} S_{23} \quad {}^{t+\Delta t} S_{13} \right]$ — вектор компонент симметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа, вычисленный в момент времени $t + \Delta t$; ${}^0 V$ — объем в отсчетной конфигурации; ${}^{t+\Delta t} B_L^T = {}^0 B_{L_0} {}^{t+\Delta t} F^T$ — матрица производных функций формы конечных элементов в текущий момент времени $t + \Delta t$; где ${}^{t+\Delta t} F^T$ — тензор градиента перемещений в момент времени $t + \Delta t$, ${}^0 B_{L_0}$ — матрица производных функций формы конечных элементов в отсчетной конфигурации [3].

Выбор определяющих соотношений важен для использования наиболее эффективной формулировки уравнений при решении нелинейных задач о деформировании тонкостенных конструкций, для которых при изгибе, как правило, выполняются требования малости деформаций.

Поэтому формулировки уравнений (1.1), описывающих деформирование тонкостенных конструкций используют пару тензоров напряжений и деформаций S , E , а при упругом деформировании — определяющие соотношения гиперупругого материала.

§ 2. Семейство схем Ньюмарка

Проводя процедуру аппроксимации в соответствии с МКЭ, получаем конечно-элементную формулировку динамической задачи упругого деформирования — систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями:

$$M {}^{t+\Delta t} \ddot{u} + C {}^{t+\Delta t} \dot{u} + K {}^{t+\Delta t} u = {}^{t+\Delta t} f, \quad (2.1)$$

где M — положительно определенная матрица масс, $K {}^{t+\Delta t} u = {}^{t+\Delta t} G^m = \int_{0V} {}^{t+\Delta t} B_L^T {}^{t+\Delta t} S d^0 V$ — вектор внутренних сил, C — неотрицательная матрица демпфирования (диссипации), g — вектор массовых сил, f — вектор внешних динамических нагрузок.

При решении динамических задач при помощи МКЭ возникает ряд трудностей, которые связаны с корректным заданием диссипативных свойств системы, во многом определяющих

перемещения при переходных динамических процессах. В рассматриваемых случаях демпфирование можно исключить.

Для аппроксимации скорости ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ и ускорения ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ можно применять различные схемы численного интегрирования (2.1). Рассмотрим интенсивно развиваемое семейство схем Ньюмарка (метод трапеций, постоянных средних ускорений).

Конечно-разностная аппроксимация перемещений в схеме Ньюмарка β [3] записывается как

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + {}^t\dot{u}\Delta t + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{u} + {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\beta \right], \quad (2.2)$$

а аппроксимация ускорений — как

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \Delta t [(1 - \gamma){}^t\ddot{u} + {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\gamma]. \quad (2.3)$$

В схеме Ньюмарка параметры β, γ выбираются из условия устойчивости и точности интегрирования уравнений движения. Рассмотрим различные варианты выбора параметров схемы. При $\beta = 1/4$ и $\gamma = 1/2$ схема становится неявной и безусловно устойчивой.

Для линейных динамических задач при $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$ схема устойчива для любых шагов Δt . В более общем случае устойчивость схемы зависит от шага по времени, и в этих случаях достигается устойчивость при $\gamma < 1/2$. При выборе параметра $\gamma = 1/2$ схема имеет второй порядок точности и первый — при всех других значениях γ .

Исследование спектральной устойчивости схемы Ньюмарка [4] показали, что, если параметры отличны от $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$, нельзя однозначно сказать, что схема устойчива спектрально.

§ 3. Обобщенная явная схема

Схема Ньюмарка принадлежит к двухшаговым двухпараметрическим конечно-разностным методам. Если положить $\beta = 0$ и $\gamma = 1/2$, получим явную схему. В этом случае, в отличие от явной схемы с центральными разностями (CDM) [3], схема Ньюмарка с $\beta = 0$ и $\gamma = 1/2$ получается самостартующей и не требует дополнительных вычислений.

В настоящее время получили свое распространение всевозможные обобщения и комбинации явной схемы Ньюмарка, которые обладают безусловной устойчивостью в линейных и некоторых нелинейных задачах и по точности в разной степени приближаются к схемам Ньюмарка.

Это достигается путем введения в схемы стабилизирующих операторов достаточно простой структуры, которые, с одной стороны, увеличивают область зависимости сеточной задачи, а с другой — уменьшают высшие собственные частоты задачи. При этом введенный оператор должен легко обращаться и его влияние на существенные для данной задачи низкочастотные колебания должно быть незначительным.

Обобщенная явная схема решения системы уравнений динамики наряду с (2.1) включает аппроксимацию перемещений и скоростей вида

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + A_1(\Delta t) {}^t\dot{u} + A_2(\Delta t)^2 {}^t\ddot{u}, \quad (3.1)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + H_1(\Delta t) {}^t\ddot{u} + H_2(\Delta t) {}^{t+\Delta t}\ddot{u}. \quad (3.2)$$

Явная схема Ньюмарка (2.2), (2.3) может быть получена при $A_1 = 1, A_2 = \frac{1}{2}, H_1 = H_2 = \frac{1}{2}$. Для рассматриваемого семейства схем выбор стабилизирующих операторов A_1, A_2, H_1, H_2 позволяет достигать второго порядка точности наряду с безусловной устойчивостью схемы в линейных и некоторых классах нелинейных задач. В основу этих операторов могут быть положены различные предпосылки, например, дискретная теория управления, оценки спектра и др. [5, 6].

В [5, 6] аппроксимация перемещений выполняется по явной схеме (3.1), а схемы, предложенные в [6], используют и явную аппроксимацию для скоростей, то есть $H_2 = 0$ в уравнении (3.2). Характерной особенностью обобщенной схемы (2.1), (3.1), (3.2) является зависимость стабилизирующих операторов A_1, A_2, H_1, H_2 от начальных свойств материалов конструкций и величины выбранного шага интегрирования по времени Δt .

Например, для схемы [5] имеет место $A_1 = D^{-1}(M + \gamma\Delta t C_0/2)$, $A_2 = D^{-1}/2$, $H_1 = (1 - \gamma)$, $H_2 = \gamma$, где $D = M + \gamma\Delta t C_0/2 + \beta(\Delta t)^2 K_0/4$; K_0 , C_0 — начальные матрицы жесткости и демпфирования конструкции, которые не изменяются в течение времени; β , γ — параметры, определяющие условие устойчивости схемы, аналогичные тем, что используются в схеме Ньюмарка. В этом случае стабилизирующие операторы вводятся только для вычисления перемещений на новом шаге по времени, а для определения скорости на шаге $t + \Delta t$ необходимо вычисление ускорения на этом же шаге. Семейство схем Чанга получено при условии диагональной матрицы демпфирования.

В [6] перемещения и скорости вычисляются явно по значениям неизвестных с предыдущего шага, а стабилизирующие операторы вводятся как для перемещений, так и для ускорений: $A_1 = 1$, $A_2 = H_1 = 4 [4\lambda M + 2(\Delta t)C_0 + (\Delta t)^2 K_0]^{-1} M$, $H_2 = 0$. Определенное обобщение данной схемы исследовано в [7] с параметрами $A_1 = 1$, $A_2 = H_1 = 2\lambda [2\lambda M + \lambda(\Delta t)C_0 + 2(\Delta t)K_0]^{-1} M$, $H_2 = 0$, где было показано, что за счет введения дополнительного параметра $\lambda \leq 4$ обеспечивается безусловная устойчивость для одномерных линейных задач и нелинейных задач с уменьшением жесткости системы, а для задач с упрочнением — при значениях параметра $\lambda \leq 4\omega_0^2/t + \Delta t \omega^2$, где ω — частота колебаний. Для этих схем и задач с нелинейным демпфированием и жесткостью факторизация матриц может быть выполнена один раз.

Вектор перемещений вычисляется из соотношения (3.1), затем определяется вектор внутренних сил ${}^{t+\Delta t}G$, исходя из определяющих соотношений, соответствующих вектору перемещений ${}^{t+\Delta t}u$. Таким образом, заменяется матрично-векторное произведение $K {}^{t+\Delta t}u$ вычислением связи тензора напряжений и перемещений для нелинейных определяющих соотношений на этапе вычисления скоростей или ускорений.

§ 4. Численные эксперименты

Рассмотрим сравнение семейства обобщенных схем при решении нелинейных задач динамики в общей лагранжевой постановке, которое реализовано в разрабатываемом конечно-элементном комплексе FEStudio [8]. Вопросы распараллеливания решения задач динамики можно также найти в [9].

§ 4.1. Круглая мембрана

Оценка решения, получаемого на основе схемы (3.1), (3.2), рассматривалась на трехмерной задаче о колебаниях защемленной круговой пластины под действием давления [10]. Результаты сравнивались с явной центрально-разностной схемой, для которой условие устойчивости имеет вид $\Delta t^* \leq l_e/c$. Здесь c — скорость распространения волн в конструкции, l_e — длина наименьшего ребра ячейки сетки. Условие устойчивости для исследуемой сеточной задачи соответствовало шагу $\Delta t^* = 0.43$ мкс.

На рисунке 1 приведены графики перемещений, получаемых с помощью явной схемы (ЯСН), неявной схемы Ньюмарка (НСН) и схемы Чанга [5] при решении задачи в геометрически линейной постановке. В тестовых расчетах достигаемый шаг, с которым явная схема Ньюмарка оставалась работоспособной, равнялся $\Delta t = 0.3$ мкс, что несколько ниже допустимого. Для схемы Чанга характерно, что с увеличением шага больше Δt^* период колебаний несколько уменьшается, а амплитуда соответствует результатам, полученным по явной схеме Ньюмарка. На рисунке 2 представлены результаты решения задачи с учетом геометрической нелинейности. Отметим, что схема Чанга также остается устойчивой при некоторых параметрах β и $\Delta t > \Delta t^*$. В экспериментах с явными схемами вычисления скоростей при $H_2 = 0$ условие выполнения устойчивости становится более жестким, и возможно небольшое увеличение временного шага.

§ 4.2. Полый цилиндр

Рассматривалась классическая задача теории упругости о деформировании полого цилиндра под действием внутреннего давления с учетом геометрической и физической нелинейности. Цилиндр длиной $L = 0.05$ м, жестко закрепленный по торцам, с внутренним радиусом 0.005 м и внешним радиусом 0.006 м, нагружался внутренним давлением $p = 0.0026 \sin(40\pi t)$. Пара-

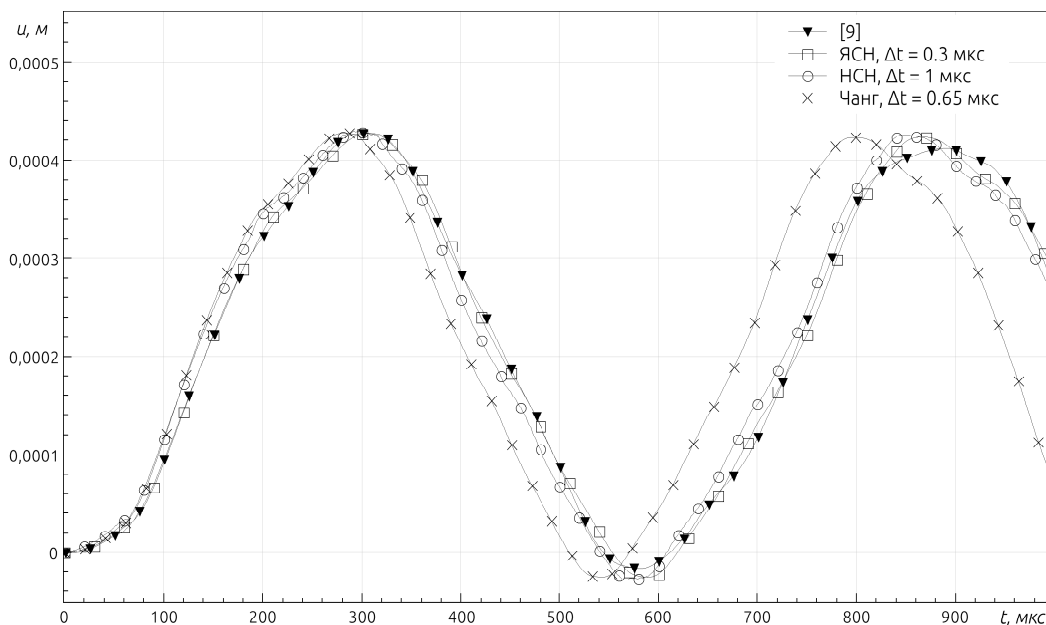


Рис. 1. Зависимость перемещений от времени при решении задачи в линейной постановке

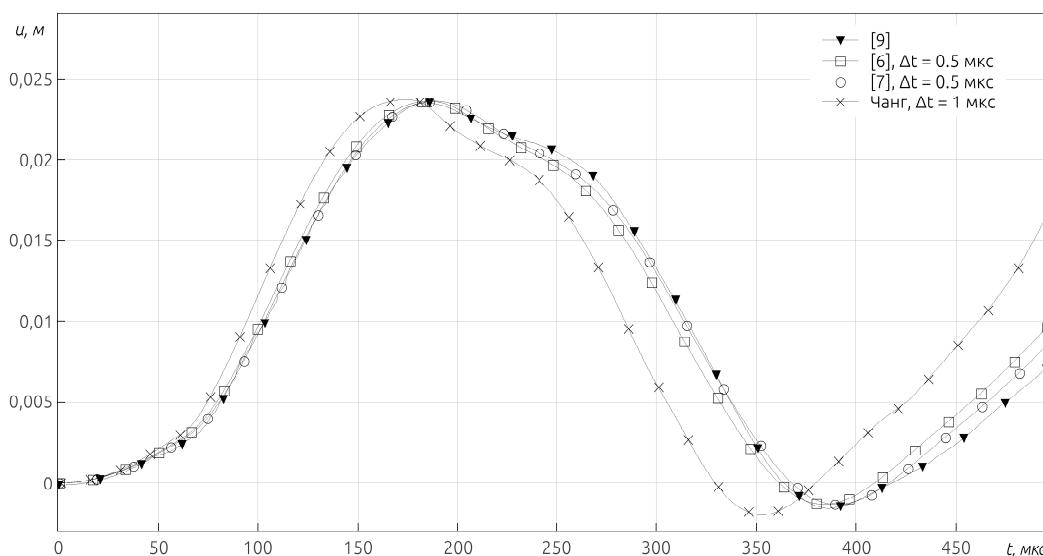


Рис. 2. Зависимость перемещений от времени при решении задачи в геометрически нелинейной постановке

метры модели соответствовали значениям $\rho = 1200 \text{ кг/м}^2$, $\nu = 0.45$, $E = 0.0612 \times 10^6 \text{ кгс/м}^2$, а временной шаг — $\Delta t = 0.001 \text{ с}$.

Интегрирование по времени выполнялось по явной схеме Чанга. Сравнивались три вида определяющих соотношений нелинейной теории упругости для слабосжимаемых материалов [11]: Сен-Венана–Кирхгофа, неогук, вариант неогукского материала экспоненциального вида [12] с аналитическим и численным решением в рамках линейной теории упругости. Определяющие соотношения для симметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа записывались через правый тензор деформаций Коши–Грина $C = F^T F$ и его инварианты.

На рисунке 3 приведены зависимости перемещений от времени и радиуса цилиндра для трех определяющих соотношений, а также линейной теории упругости. Отметим, что наибольшие перемещения достигаются для неогукского материала, а в модели материала Сен-Венана–

Кирхгофа — наименьшие. Качественная картина изменения перемещений по радиусу и абсолютным значениям согласуется с линейной теорией.

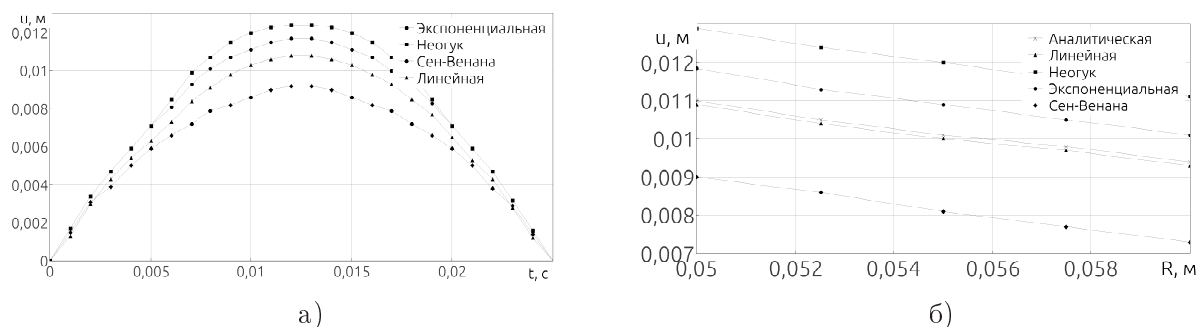


Рис. 3. Зависимость перемещений для различных моделей: а) во времени; б) по радиусу

Таким образом, рассматриваемое семейство схем существенно сокращает вычислительные затраты решения задач нелинейной динамики по сравнению с другими явными схемами, для которых размер временного шага выбирается из условия устойчивости, и неявными схемами, для которых необходимо итерационное приближение в случае физической и геометрической нелинейности. В целом данный подход позволяет значительно повысить эффективность решения данного класса волновых задач механики сплошных сред в рамках явных схем.

Список литературы

1. Четверушкин Б.Н. Прикладная математика и проблемы использования высокопроизводительных вычислительных систем // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 4. С. 55–67.
2. Баженов В.Г., Пирогов С.А., Чекмарев Д.Т. Явная схема со стабилизирующим оператором для решения нестационарных задач динамики конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 120–130.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
4. Янковский А.П. Исследование спектральной устойчивости обобщенных методов Рунге–Кутты применительно к начально-краевым задачам для волнового уравнения // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8. № 2. С. 117–135.
5. Chang S.Y. An explicit method with improved stability property // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 77. № 8. P. 1100–1120.
6. Chen C., Ricles J.M. Stability Analysis of Direct Integration Algorithms Applied to Nonlinear Structural Dynamics // Journal of Engineering Mechanics. 2008. Vol. 139. № 9. P. 703–711.
7. Gui Y., Wang J.-T., Jin F., Chen C., Zhou M.-X. Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability // Nonlinear Dyn. 2014. Vol. 77. № 4. P. 1157–1170.
8. Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недождогин Н.С., Новиков А.К., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А., Тонков Л.Е. Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FESstudio // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6. № 1. С. 79–97.
9. Копысов С.П., Кузьмин И.М., Сагдеева Ю.А. Применение программной модели OpenMP+CUDA к распараллеливанию решения динамических задач теории упругости // Актуальные проблемы математики, механики, информатики: сб. статей. ИММ УрО РАН. Екатеринбург. 2012. С. 30–35.
10. Чекмарев Д.Т., Жидков А.В. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2010. 53 с.
11. Ali A., Hosseini M., Sahari B.B. A review of constitutive models for rubber-like materials // American J. of Engineering and Applied Sciences. 2010. Vol. 3 (1). P. 232–239.
12. Humphrey J.D., Yin F.C. Constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue II: stress analysis in the left ventricle // Circ. Res. 1989. Vol. 65. P. 805–817.

Поступила в редакцию 05.10.2015

Копысов Сергей Петрович, д.ф.-м.н., профессор, Институт механики УрО РАН, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Кузьмин Игорь Михайлович, младший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: imkuzmin@gmail.com

S. P. Kopysov, I. M. Kuz'min

Extended explicit scheme for solving dynamic structural problem

Keywords: explicit scheme, stability condition, structural dynamic, parallel algorithms.

MSC: 65M60, 35Q74, 65Y05

We consider the generalized explicit scheme for solving dynamic structure problems. We explore different options of operators that extend the stability conditions. In the paper, we present the results for three-dimensional problems.

REFERENCES

1. Chetverushkin B.N. Applied mathematics and problems of using high-performance computing, *Trudy Mosk. Fiz. Tekhn. Inst.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 55–67 (in Russian).
2. Bazhenov V.G., Pirogov S.A., Chekmarev D.T. Explicit scheme operator with a stabilizing solution for time-dependent problems of structural dynamics, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 2002, no. 5, pp. 120–130 (in Russian).
3. Bathe K., Wilson E. *Numerical methods in finite element analysis*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976, 524 p. Translated under the title *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov*, Moscow: Stroiizdat, 1982, 448 p.
4. Yankovskii A.P. Study of spectral stability of generalized Runge–Kutta methods in the initial-boundary problems for the wave equation, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 117–135 (in Russian).
5. Chang S.Y. An explicit method with improved stability property, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, vol. 77, no. 8, pp. 1100–1120.
6. Chen C., Ricles J.M. Stability analysis of direct integration algorithms applied to nonlinear structural dynamics, *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, vol. 139, no. 9, pp. 703–711.
7. Gui Y., Wang J.-T., Jin F., Chen C., Zhou M.-X. Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability, *Nonlinear Dyn.*, 2014, vol. 77, no. 4, pp. 1157–1170.
8. Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Nedozhogin N.S., Novikov A.K., Rychkov V.N., Sagdeeva Yu.A., Tonkov L.E. Parallel implementation of a finite-element algorithms on a graphics accelerator in the software package FEStudio, *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovanie*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 79–97 (in Russian).
9. Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Sagdeeva Yu.A. Using programming model OpenMP+CUDA for solving dynamic elasticity problems, *Aktual'nye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Transactions, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS*, Ekaterinburg, 2012, pp. 30–35.
10. Chekmarev D.T., Zhidkov A.V. *Chislennoe reshenie trekhmernykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti na osnove azhurnoi skhemy MKE* (The numerical solution of three-dimensional dynamic elasticity problems based on finite element method scheme openwork), Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State University, 2010, 53 p.
11. Ali A., Hosseini M., Sahari B.B. A review of constitutive models for rubber-like materials, *American J. of Engineering and Applied Sciences*, 2010, vol. 3, pp. 232–239.
12. Humphrey J.D., Yin F.C. Constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue II: stress analysis in the left ventricle, *Circ. Res.*, 1989, vol. 65, pp. 805–817.

Received 05.10.2015

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Kuz'min Igor' Mikhailovich, post-graduate student, Institute of Mechanics, Ural Branch of RAS, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: imkuzmin@gmail.com