УДК 519.63

© *А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева*

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ[1]

В статье рассматривается задача восстановления граничных управлений для стационарной модели реакции–конвекции–диффузии. Данная задача является некорректной. Для ее решения применяется вариационный метод. В качестве стабилизирующих добавок в функционале Тихонова используются среднеквадратичная норма и полная вариация управлений. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: модель реакции–конвекции–диффузии, граничные управления, некорректная задача, вариационный метод.

Введение

В работе рассматривается задача восстановления граничных управлений для стационарной модели реакции–конвекции–диффузии. Модели подобного рода применяются при изучении различных гидродинамических и тепловых процессов, в частности при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле [1–3].

Рассматриваемая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на некоторой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение этого решения возможно) и взятии подходящего следа от этого решения на другой части границы области изменения независимой пространственной переменной (на той части границы, где прямое измерение этого решения по каким-либо причинам невозможно). При этом предполагается, что на той части границы, где заданы исходные краевые условия (на которой прямые измерения возможны), заданы некоторые дополнительные граничные условия. Совокупность всех граничных данных на этой части границы составляет исходные данные для восстановления неизвестных граничных данных (управлений) на другой части границы, где измерения невозможны. Математическая постановка задачи приводит к обобщенной задаче Коши для эллиптического уравнения второго порядка.

Задача восстановления граничных управлений является неустойчивой по отношению к возмущению исходных данных. Для ее решения применяется вариационный метод Тихонова [4], заключающийся в минимизации некоторого подходящего функционала на множестве допустимых решений задачи. Известно, что классическая тихоновская регуляризация дает высокое качество восстановления гладких искомых функций, однако не позволяет качественно восстановить недифференцируемые функции. Чтобы охватить случай негладких искомых управлений, предлагается в функционале Тихонова использовать в качестве стабилизирующей добавки среднеквадратичную норму и полную вариацию управлений.

Ранее в работе [5] аналогичные прямые и обратные граничные задачи изучались для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости.

§ 1. Постановка задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В некоторой прямоугольной области $\Omega = (0,\, l_1) \times (0,\, l_2) \in \mathbb{R}^2$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды). Предположим, что граница Γ области Ω условно разделена на 4 части:

$$\Gamma_1 = \{(x_1,\, 0) : x_1 \in (0,\, l_1)\},$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 14–01–00155) и поддержана Комплексной программой ФНИ Уральского отделения РАН (проект № 15–16–1–10).

$$\Gamma_2 = \{(0,\, x_2) : \, x_2 \in (0,\, l_2)\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x_1,\, l_2) : \, x_1 \in (0,\, l_1)\},$$
$$\Gamma_4 = \{(l_1,\, x_2) : \, x_2 \in (0,\, l_2)\}.$$

Считается, что на части Γ_3 границы возможно прямое измерение необходимых параметров среды (например, температуры или концентрации вещества, потока тепла или потока вещества), а границы Γ_2 и Γ_4 являются теплоизолированными (непроницаемыми для переноса вещества). На части Γ_1 границы прямое измерение необходимых параметров среды невозможно, но знание этих параметров крайне необходимо.

Задача состоит в нахождении необходимых параметров сплошной среды на части Γ_1 границы Γ по всей совокупности граничных данных, имеющихся на частях Γ_2, Γ_3, Γ_4 границы Γ, при учете соответствующей модели, описывающей состояние среды в области Ω.

Для определенности будем считать, что на части Γ_3 границы задаются и известны температура (концентрация вещества) $T = v$ и тепловой поток (поток вещества) $k\,\partial T/\partial\, \boldsymbol{n} = \varphi$. Модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω описывается стационарным уравнением реакции–конвекции–диффузии [1–3, 6–9]:

$$\operatorname{div}(k\,\nabla T) = (\boldsymbol{u}, \nabla T) - q\,T - f, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$k\,\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \tag{1.2}$$

$$T = v, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{1.3}$$

$$k\,\frac{\partial T}{\partial x_1} = \varphi, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{1.4}$$

где $k = k(\boldsymbol{x})$ — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды; $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — заданный вектор скорости движения среды, удовлетворяющий условию $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ в области Ω и условию $\boldsymbol{u} = 0$ на границе Γ; $q = q(\boldsymbol{x})$ — заданный коэффициент реакции среды; $f = f(\boldsymbol{x})$ — заданная объемная плотность образования или стока тепла (вещества); $v = v(\boldsymbol{x})$, $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x})$ — заданные температура (концентрация) и поток тепла (вещества); $T = T(\boldsymbol{x})$ — неизвестное распределение температуры (концентрации) в области Ω.

Пусть далее для определенности

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\Omega) = \{\; \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \; \boldsymbol{u}|_{\Gamma} = 0, \operatorname{div}\boldsymbol{u}|_{\Omega} = 0\,\},$$

$$k \in C^1(\overline{\Omega}), q \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(\Omega), v \in L_2(\Gamma_3), \xi \in L_2(\Gamma_1);$$

$$0 < \mu_1 \leqslant k(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_2, \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}, \quad \mu_1 = \text{const} \leqslant \mu_2 = \text{const};$$

$$\|\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,\|_{\mathbb{R}^2} \leqslant \mu_3,\; \boldsymbol{x} \in \Omega,\; \mu_3 = \text{const} \geqslant 0;$$

$$0 \leqslant q(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_4,\; \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \mu_4 = \text{const} \geqslant 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [6–12].

Искомыми величинами могут быть температура (концентрация вещества) T на части Γ_1 границы, или тепловой поток (поток вещества) $k\,\partial T/\partial\,\boldsymbol{n}$ на Γ_1, или одновременно одно и другое. Будем считать для определенности, что искомой величиной является температура (концентрация вещества) $T = \xi$ на части Γ_1 границы Γ. Варианты задачи с другими искомыми величинами могут изучаться совершенно аналогично.

Отметим, что краевая задача (1.1)–(1.4) при указанных ограничениях на параметры может не иметь классического и обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Однако эта краевая задача может иметь слабое решение. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.4), следуя [13, 14].

О п р е д е л е н и е 1.1. *Слабым решением* краевой задачи (1.1)–(1.4) назовем всякую функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_\Omega T\Big(\operatorname{div}(k\nabla g) + (\boldsymbol{u}, \nabla g) + q\,g\Big)\,dx = \int_{\Gamma_3} g\,\varphi\,d\Gamma - \int_{\Gamma_3} v\,k\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\,d\Gamma + \int_\Omega f\,g\,dx$$

для любой функции $g \in G_1(\Omega)$, где

$$G_1(\Omega) = \Big\{\, g \in W_2^2(\Omega) : g|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_4} = 0\Big\}.$$

Тогда задача восстановления неизвестного граничного управления состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.4) и взятии от него следа на Γ_1.

§ 2. Неустойчивость задачи восстановления

Введем в рассмотрение аффинный оператор

$$A : L_2(\Gamma_1) \ni \xi \longrightarrow k\,\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma_3},$$

где T — решение краевой задачи

$$\operatorname{div}(k\,\nabla T) = (\boldsymbol{u}, \nabla T) - q\,T - f, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$k\,\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \tag{2.2}$$

$$T = v, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{2.3}$$

$$T = \xi, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_1. \tag{2.4}$$

Тогда задача восстановления неизвестного граничного управления запишется в виде операторного уравнения

$$A(\xi) = \varphi.$$

Отметим, что краевая задача (2.1)–(2.4) при указанных ограничениях на параметры может не иметь классического и обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (2.1)–(2.4), следуя [13, 14].

О п р е д е л е н и е 2.1. *Слабым решением* краевой задачи (2.1)–(2.4) назовем всякую функцию $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_\Omega T\Big(\operatorname{div}(k\nabla g) + (\boldsymbol{u}, \nabla g) + q\,g\Big)\,dx = -\int_{\Gamma_1} \xi\,k\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\,d\Gamma - \int_{\Gamma_3} v\,k\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\,d\Gamma + \int_\Omega f\,g\,dx$$

для любой функции $g \in G_2(\Omega)$, где

$$G_2(\Omega) = \Big\{\, g \in W_2^2(\Omega) : g|_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} = 0, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} = 0\Big\}.$$

Для краевой задачи (2.1)–(2.4) справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2.1. *Для любых $v \in L_2(\Gamma_3)$, $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача* (2.1)–(2.4) *имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\|\,T\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1\,\|\,v\,\|_{L_2(\Gamma_3)} + C_2\,\|\,\xi\,\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3\,\|\,f\,\|_{L_2(\Omega)},$$

где $C_i = \mathrm{const} \geqslant 0$, $i = \overline{1,3}$ — некоторые числа, не зависящие от $v \in L_2(\Gamma_3)$, $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, $f \in L_2(\Omega)$.

Т е о р е м а 2.2. *Если $v_i \rightharpoonup v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_3)$, $\xi_i \rightharpoonup \xi_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то $T_i = T[v_i, \xi_i, f_i] \to T_0 = T[v_0, \xi_0, f_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \to \infty$, где $T = T[v, \xi, f]$ — слабое решение краевой задачи* (2.1)–(2.4).

Из теоремы (2.2) следует, что оператор A является вполне непрерывным, отсюда следует, что такой оператор не может иметь непрерывного (ограниченного) обратного оператора [15]. Таким образом, задача восстановления граничного управления неустойчива по входным данным.

§ 3. Вариационный метод

Нахождение неизвестного граничного управления ξ на границе Γ_1 будет осуществляться вариационным методом Тихонова.

Пусть наблюдаемый поток тепла $\varphi = k\,\partial T\,/\,\partial x_2$ на границе Γ_3 в краевой задаче (1.1)–(1.4) соответствует некоторому заранее неизвестному граничному управлению ξ^* на границе Γ_1. Пусть T^* — решение краевой задачи (2.1)–(2.4) при $\xi = \xi^*$. Пусть $\mathbf{V}$ — множество допустимых граничных управлений на границе Γ_1 и известно, что $\xi^* \in \mathbf{V}$.

Для граничных управлений

$$\xi \in \mathbf{V}$$

рассмотрим функционал качества

$$J_0(\xi) = \|A(\xi) - \varphi\|^2,$$

где T_ξ — решение краевой задачи (2.1)–(2.4). Искомое граничное управление ξ^* является минимизирующим элементом в вариационной задаче

$$J_0(\xi) \longrightarrow \min : \; \xi \in \mathbf{V}. \tag{3.1}$$

Для придания задаче (3.1) некоторого запаса устойчивости в качестве стабилизирующих добавок в функционале Тихонова будут использоваться среднеквадратичная норма и полная вариация управления ξ.

Таким образом, от решения краевой задачи (1.1)–(1.4) переходим к соответствующей экстремальной задаче

$$J(\xi) = J_0(\xi) + \alpha\|\xi\|^2 + \beta\,V[\xi] \longrightarrow \min : \; \xi \in \mathbf{V}, \tag{3.2}$$

$$\alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Для минимизации функционала (3.2) воспользуемся субградиентным методом в реализации наискорейшего спуска:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \gamma_i\,\nu_i, \quad i = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

$$\nu_i \in \partial J(\xi_i),$$

$$\gamma_i = \arg\min_{\gamma>0}\, J(\xi_i - \gamma\,\nu_i),$$

и методом сопряженных субградиентов в реализации Флетчера–Ривса:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \beta_i\,d_i, \quad i = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

$$d_i = \begin{cases} -\nu i, & i = 0, \\ -\nu_i + \gamma_i\,d_{i-1}, & i = 1,\,2,\,\ldots, \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\|\nu_i\|^2_{L_2(\Gamma_2)}}{\|\nu_{i-1}\|^2_{L_2(\Gamma_2)}},\ i = 1,\,2,\,\ldots,$$

$$\nu_i \in \partial J(\xi_i).$$

§ 4. Численное моделирование

Для рассматриваемой модели стационарной реакции–конвекции–диффузии был проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению разрывных граничных управлений. При этом, чтобы оценить влияние стабилизирующих добавок в функционале Тихонова на качество восстановления разрывных управлений, экстремальная задача (3.2) решалась в трех вариантах:

$$J_1(\xi) = J_0(\xi) + \alpha\|\xi\|^2 \longrightarrow \min : \; \xi \in \mathbf{V}, \tag{4.1}$$

$$J_2(\xi) = J_0(\xi) + \beta\,V[\xi] \longrightarrow \min : \; \xi \in \mathbf{V}, \tag{4.2}$$

$$J_3(\xi) = J_0(\xi) + \alpha\|\xi\|^2 + \beta\,V[\xi] \longrightarrow \min : \; \xi \in \mathbf{V}. \tag{4.3}$$

Результаты вычислительных экспериментов показали, что при использовании в функционале Тихонова стабилизирующей добавки в виде полной вариации качество восстановления разрывных граничных управлений повышается в сравнении с применением классического метода Тихонова.

Вычислительные эксперименты проводились на сетке 20×20 при фиксированном наборе параметров:

$$l_1 = l_2 = 1,\ k = 1,\ q = 0.1,\ f = 0,\ v = 0,\ \vec{u} = (u_1, u_2),$$

$$u_1 = -2x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)x_2^2(1 - x_2)^2,$$

$$u_2 = 2x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2)x_1^2(1 - x_1)^2.$$

В качестве начального приближения использовалась функция $\xi_0 = 0$.

Приведем результаты вычислительного эксперимента по восстановлению разрывного граничного управления:

$$\xi^* = \begin{cases} 1, & x_1 \in [0,\ 0.25) \cup [0.75,\ 1.0], \\ 0.5, & x_1 \in [0.25,\ 0.75). \end{cases}$$

На рисунках 1–6 представлены результаты восстановления разрывного граничного управления ξ^*: сплошной линией обозначены точные решения, штрихами обозначены конечные итерации (номер итерации указан справа).

На рисунках 1–3 представлены результаты восстановления разрывного граничного управления ξ^* с применением метода наискорейшего спуска, на рисунках 4–6 представлены результаты восстановления разрывного граничного управления ξ^* с применением метода Флетчера–Ривса.

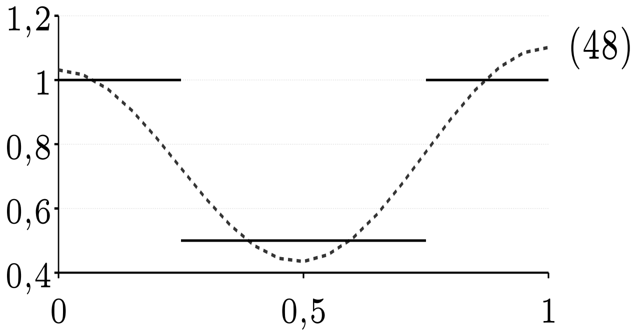

Рис. 1. Вариационная задача (4.1)

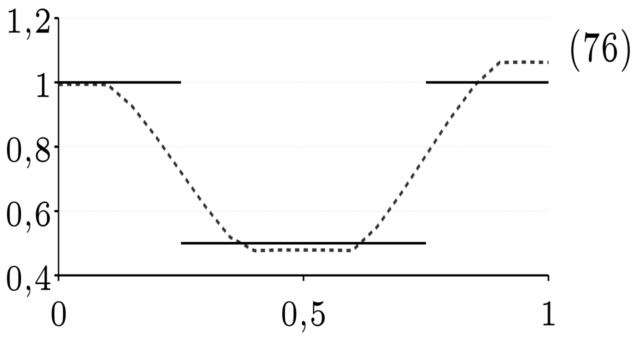

Рис. 2. Вариационная задача (4.2)

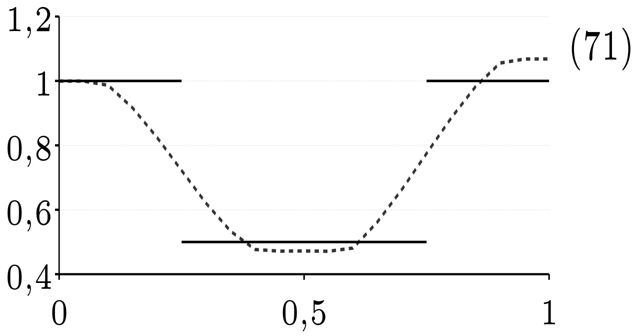

Рис. 3. Вариационная задача (4.3)

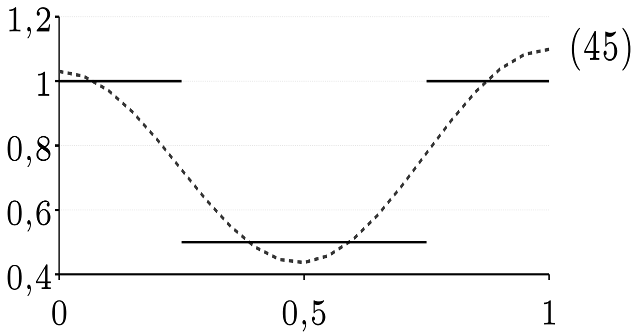

Рис. 4. Вариационная задача (4.1)

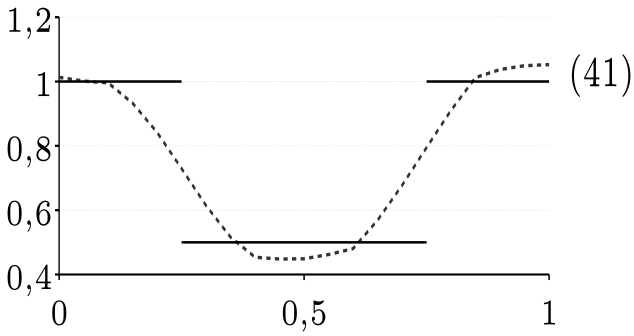

Рис. 5. Вариационная задача (4.2)

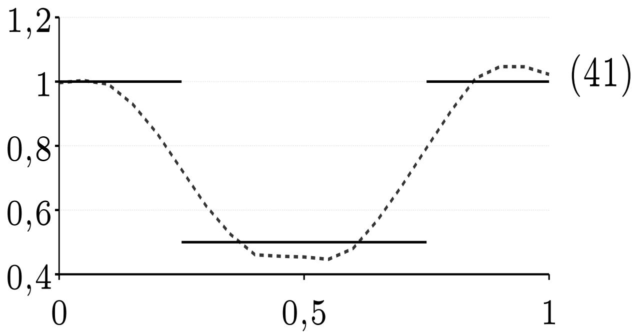

Рис. 6. Вариационная задача (4.3)

Список литературы

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 478 с.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
5. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 88–97.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961. 203 с.
9. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
11. Adams R.A. Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 268 p.
12. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
13. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
14. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила в редакцию 28.09.2015

Короткий Александр Илларионович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий отделом, отдел прикладных задач, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.
E-mail: korotkii@imm.uran.ru

Стародубцева Юлия Владимировна, к. ф.-м. н., ведущий программист, отдел прикладных задач, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: starodubtsevayv@ya.ru

A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva

Reconstruction of boundary controls in reaction–convection–diffusion model

Keywords: reaction–convection–diffusion model, boundary controls, ill-posed problem, variational method.

MSC: 35J57, 49M30

In this paper, the problem of reconstruction of boundary controls for the stationary reaction–convection–diffusion model is considered. This problem is ill-posed. The root mean square norm and the total variation of control are used as a stabilizer in the Tikhonov functional. Results of numerical experiments are present.

REFERENCES

1. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy* (Mathematical modeling in environmental problem), Moscow: Nauka, 1982, 319 p.
2. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* (Computational heat transfer), Moscow: Editorial URSS, 2003, 784 p.
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki* (Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics), Moscow: Editorial URSS, 2004, 478 p.
4. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and ill-posed problem), Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p.

5. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. Reconstruction of boundary regimes in the inverse problem of thermal convection of a high-viscosity fluid, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 88–97 (in Russian).
6. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* (Boundary value problem of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1973, 408 p.
7. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* (Linear and quasilinear elliptic equations), Moscow: Nauka, 1973, 576 p.
8. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* (Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible fluid), Moscow: Fizmatlit, 1961, 203 p.
9. Alekseev G.V., Tereshhko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* (Analysis and optimization in viscous fluid hydrodynamics), Vladivostok: Dal'nauka, 2008, 365 p.
10. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Partial differential equations), Moscow: Nauka, 1976, 392 p.
11. Adams R.A. *Sobolev spaces*, New York: Academic Press, 1975, 268 p.
12. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsyonal'nogo analiza v matematicheskoi fizike* (Some applications of functional analysis in mathematical physics), Moscow: Nauka, 1988, 336 p.
13. Lions G.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi* (Optimal control of systems described by partial differential equations), Moscow: Mir, 1972, 414 p.
14. Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal control of distributed systems. Theory and applications), Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999, 352 p.
15. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the functions theory and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972, 496 p.

Received 28.09.2015

Korotkii Aleksandr Illarionovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department, Department of Applied Problems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: korotkii@imm.uran.ru

Starodubtseva Yuliya Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Developer, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: starodubtsevayv@ya.ru