УДК 517.929

© *В. П. Максимов*

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ[1]

В статье рассматриваются задачи управления для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений. В центре внимания находятся постановки задач управления, возникающих в различных приложениях, включая прикладные задачи математической экономики и экономической динамики. Рассматриваются обобщения классической задачи о переводе системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Предлагаются признаки разрешимости задач управления в различных классах управлений, включая импульсные и смешанные управления. Рассматривается также задача об импульсной коррекции классических управлений и обсуждается мотивация применения такой коррекции. Во всех задачах предпочтение отдается конструктивным признакам, допускающим их проверку с помощью специального доказательного вычислительного эксперимента. Центральная идея приводимых результатов — подчеркнуть ту исключительную роль, которая принадлежит в изучаемых вопросах матрице Коши линейной системы управления.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные системы, задачи управления, управляемость относительно системы линейных функционалов, импульсное и смешанное управление.

Введение

В этой работе рассматриваются задачи управления, обобщающие классическую задачу о переводе системы управления из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом общность касается как класса рассматриваемых систем, так и постановки задачи и классов используемых управлений. В центре внимания находится та исключительная роль, которая принадлежит в этих вопросах оператору Коши (оператору Грина задачи Коши) рассматриваемой системы управления. Для пояснения этой роли в общей ситуации мы приводим результат об условиях разрешимости задачи управления относительно заданной системы линейных функционалов для абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ), а затем подробнее останавливаемся на одной более конкретной задаче, решение которой требует использования свойств матрицы Коши для линейных систем с последействием. Более подробное описание результатов, касающихся различных вариантов задач управления, включая задачи управления гибридными системами, задачи удержания системы в окрестности предписанной траектории, прикладные задачи экономической динамики, можно найти в работах [8–12, 14, 15], где предпочтение отдается конструктивным признакам разрешимости, допускающим их проверку с помощью специального доказательного вычислительного эксперимента [7].

§ 1. Абстрактная задача управления

Рассмотрение такой задачи опирается на теорию АФДУ, систематическое изложение которой дается в [2, 3, 13]. Пусть D и B — такие банаховы пространства, что D изоморфно прямому произведению $B \times R^n$ (далее мы используем запись $D \simeq B \times R^n$).

Уравнение

$$\mathcal{L}x = f \tag{1.1}$$

с линейным оператором $\mathcal{L} : D \to B$ называется линейным АФДУ. Зафиксируем изоморфизм $J = \{\Lambda, Y\} : B \times R^n \to D$, $J^{-1} = [\delta, r]$ — обратный оператор. Здесь $\Lambda : B \to D$, $Y : R^n \to D$ и $\delta : D \to B$, $r : D \to R^n$ — соответствующие компоненты операторов J и J^{-1}:

$$J\{z, \alpha\} = \Lambda z + Y\alpha \in D,\ z \in B,\ \alpha \in R^n,$$

[1]Статья подготовлена в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, договор № 02.G25.31.0039 (Постановление Правительства РФ № 218 от 09.04.2010 г. «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства»), при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

$$J^{-1}x = \{\delta x, rx\} \in B \times R^n,\ x \in D.$$

Система

$$\delta x = z,\ rx = \alpha \tag{1.2}$$

называется главной краевой задачей. Для любого $\{z, \alpha\} \in B \times R^n$ элемент

$$x = \Lambda z + Y\alpha \tag{1.3}$$

является решением уравнения (1.2). Представление (1.3) приводит к представлению оператора $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}x = \mathcal{L}(\Lambda z + Y\alpha) = \mathcal{L}\Lambda z + \mathcal{L}Y\alpha = Qz + A\alpha$, где так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$ — оператор $Q : B \to B$ и конечномерный оператор $A : R^n \to D$ определены равенствами $Q = \mathcal{L}\Lambda$ и $A = \mathcal{L}Y$. В общей теории уравнения (1.1) предполагается, что оператор Q является фредгольмовым оператором (то есть нётеровым с нулевым индексом).

Рассмотрим общую краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f,\ lx = \beta, \tag{1.4}$$

где $l = [l^1, \ldots, l^N] : D \to R^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал. В случае когда $N = n$ и задача (1.4) однозначно разрешима при любом $\{f, \beta\} \in B \times R^n$, имеет место представление решения

$$x = Gf + X\beta. \tag{1.5}$$

Оператор $G : B \to D$ называется оператором Грина, оператор $X : R^n \to D$ называется фундаментальным вектором.

Рассмотрим абстрактную задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f,\ rx = \alpha, lx = \beta, \tag{1.6}$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству H, $F : H \to B$ — линейный ограниченный оператор, $l = [l_1, \ldots, l_N]$ — целевой вектор-функционал, определяющий цель управления: $lx = \beta$. Приведем теорему о разрешимости задачи (1.6). Для этого определим линейный ограниченный функционал $\lambda_i : H \to R$, $i = 1, \ldots, N$, равенством $\lambda_i u = l_i G_r F u$. Очевидно, можно записать $\lambda_i u$ в виде $\lambda_i u = \langle \mu_i, u \rangle$, где скобки $\langle\ ,\ \rangle$ используются для обозначения скалярного произведения в H, μ_i обозначает элемент пространства H, порождающий функционал $\lambda_i : H \to R$.

Теорема 1.1 ([16]). *Задача управления* (1.6) *разрешима при любых* $f \in B$ *и* $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^N$ *тогда и только тогда, когда матрица* $M \overset{def}{=} \{\langle \mu_i\,,\ \mu_j \rangle\}_{i,j=1,\ldots,N}$ *обратима. Управление* $u_0 = \sum_{i=1}^N \mu_i \gamma_i$, *где* $\operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_N) = M^{-1}[\beta - lG_r f - lX\alpha]$ *решает задачу* (1.6).

Из этой теоремы следует, в частности, что разрешимость задачи управления зависит только от оператора Коши, этот оператор определяет вид и свойства программного управления u_0, а фундаментальный вектор входит лишь в конструкцию коэффициентов линейной комбинации, определяющей u_0. Эти соображения находят детальную реализацию при рассмотрении конкретных задач управления. Одна из таких задач рассматривается в следующем параграфе.

§ 2. Задача управления для линейных систем с последействием в классе смешанных управлений

При рассмотрении этой задачи мы воспользуемся конкретной реализацией пространства D. Зафиксируем набор точек $t_k \in (0, T)$, $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$. Следуя [4], введем пространство $D = DS(m)$ функций $x : [0, T] \to R^n$, представимых в виде

$$x(t) = \int_0^t z(s)\, ds + x(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k, T]}(t) \Delta x(t_k),$$

где $z \in L$, $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$. В таком случае $D \simeq L \times R^{n+mn}$, где L — пространство суммируемых по Лебегу функций $z : [0,T] \to R^n$ с нормой $\| z \|_L = \int_0^T \| z(s) \|_{R^n} \, ds$, при этом

$$(\Lambda z)(t) \,=\, \int_0^t z(s)\,ds;\; (Y\alpha)(t) \,=\, \alpha^0 \,+\, \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)\alpha^k;\; \alpha = \mathrm{col}(\alpha^0, \ldots, \alpha^m),$$

$$\delta x \,=\, \dot{x}, \;\; rx \,=\, \{x(0), \Delta x(t_1), \ldots, \Delta x(t_m)\}.$$

Всюду ниже для определенности считаем $\| \alpha \|_{R^n} = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$ для $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$(\mathcal{L}x)(t) \,=\, f(t), \;\; t \in [0,T], \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L} : DS(m) \to L$ — линейный ограниченный оператор с главной частью вида

$$(Qz)(t) \,=\, z(t) \,-\, \int_0^t K(t,s)z(s)\,ds.$$

Предполагается, что элементы $k^{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяют оценке $|k^{ij}(t,s)| \leqslant \kappa(t)$, $i,j = 1, \ldots, n$, с суммируемой на отрезке $[0,T]$ функцией $\kappa(\cdot)$.

Функционально-дифференциальная система (2.1) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. В частности, для оператора $(\mathcal{L}x)(t) \,=\, \dot{x}(t) - \int_0^t d_s\, R(t,s)\, x(s)$ с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t,t) = 0$, имеем $K(t,s) = R(t,s)$, $A(t) = R(t,0)$ (подробнее см. в [1–3]). Ниже мы следуем обозначениям и основным положениям теории функционально-дифференциальных уравнений в части линейных систем с последействием [2, 3, 6, 13].

Напомним, что пространство всех решений однородной системы $\mathcal{L}x \,=\, 0$ имеет размерность $n + nm$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_{n+nm}\}$ — базис в этом пространстве. Матрица $X \,=\, \{x_1, \ldots, x_{n+nm}\}$ называется фундаментальной матрицей. Без ограничения общности мы считаем, что $rX = E$. Главная краевая задача $\mathcal{L}x = f$, $rx = \sigma$ однозначно разрешима для любых $f \in L$, $\sigma \in R^{n+nm}$, и ее решение представимо в виде

$$x(t) \,=\, X(t) \cdot \sigma \,+\, \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{2.2}$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши [2, 6]. Пусть $l : DS(m) \to R^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал. Имеет место представление

$$lx \,=\, \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds \,+\, \Psi_0 x(0) \,+\, \sum_{k=1}^{m} \Psi_k \Delta x(t_k), \tag{2.3}$$

где элементы $(N \times n)$–матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном, Ψ_k, $k = 0, \ldots, m$, — $(N \times n)$-матрицы с вещественными элементами.

Для системы (2.1) поставим задачу управления относительно заданной системы линейных функционалов $l = \{l_1, \ldots, l_N\}$:

$$\mathcal{L}x \,=\, Fu \,+\, f, \;\; x(0) \,=\, \alpha, \; lx \,=\, \beta. \tag{2.4}$$

Здесь $F : L_2 \to L$ — заданный линейный ограниченный оператор, L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций $u : [0,T] \to R^r$, оснащенное скалярным произведением $(u,v) \,=\, \int_0^T u^\top(s)v(s)\,ds$ ($\cdot^\top$ — символ транспонирования). Предполагается, что оператор F

обладает свойством вольтерровости: для любого $\tau \in (0,T)$ $(Fu)(t) = 0$ на $[0,\tau]$ для всех таких $u \in L_2^r$, что $u(t) = 0$ на $[0,\tau]$. В задаче (2.4) цель управления задается с помощью вектор-функционала $l : DS(m) \to R^N$, который на траекториях системы $\mathcal{L}x = Fu + f$ под действием управления должен достигать векторного значения $\beta \in R^N$. Задача (2.4) охватывает, в частности, задачу управления в классе L_2-управлений (случай, когда условия $lx = \beta$ включают равенства $\Delta x(t_k) = 0,\ k = 1,\dots,m$) и задачу импульсного управления (случай $F = 0$, где в качестве управляющих воздействий используются только скачки $\Delta x^i(t_k)$). Здесь мы рассматриваем общий случай смешанного управления и приводим с полным доказательством теорему, анонсированную в [15].

Предварительно остановимся на свойствах матрицы Коши, существенно используемых при доказательстве этой теоремы.

В сделанных предположениях линейный оператор $Q : L \to L$ имеет ограниченный обратный $(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t,s)f(s)(s)\,ds$, где $\mathcal{R}(t,s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,s)$. Матрица $C(t,s) = E + \int_s^t \mathcal{R}(\xi,s)\,d\xi$, где E — единичная $(n\times n)$-матрица, называется матрицей Коши [2, 6]. Свойства матрицы Коши, используемые ниже, подробно исследованы в [5,6]. Отметим здесь два соотношения, связывающих матрицу Коши с ядром $K(t,s)$:

$$C(t,s) = \int_s^t C(t,\tau)K(\tau,s)\,d\tau \ + \ E, \tag{2.5}$$

$$C_t'(t,s) = \int_s^t C_t'(t,\tau)K(\tau,s)\,d\tau \ + \ K(t,s), \tag{2.6}$$

а также формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\int_0^t C(t,s)g(s)\,ds \ = \ \int_0^t C_t'(t,s)g(s)\,ds \ + \ g(t), \tag{2.7}$$

которая справедлива для любого $g \in L$. В работе [5] дается исчерпывающее описание класса функционально-дифференциальных систем, имеющих матрицу Коши со свойством (2.7).

Обозначим

$$\Theta(s) \ = \ \Phi(s) \ + \int_s^T \Phi(\tau)C_\tau'(\tau,s)\,d\tau, \quad \Xi \ = \int_0^T \Phi(\tau)\dot{X}(\tau)\,d\tau \ = \ (\,\Xi_0\,|\,\Xi_1\,), \tag{2.8}$$

где Ξ_0 — $(N\times n)$-матрица, столбцами которой являются первые n столбцов $(N\times(n+nm))$-матрицы Ξ;

$$M \ = \int_0^T [F^*\Theta](s)[F^*\Theta]^\top(s)\,ds,$$

где $F^* : L^* \to L_2^*$ — оператор, сопряженный к F.

Т е о р е м а 2.1. *Задача управления* (2.4) *разрешима тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$[\Xi_1 \ + \ (\Psi_1,\dots,\Psi_m)]\cdot\rho \ + \ M\cdot\gamma \ = \ \beta - \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds - (\Xi_0 \ + \ \Psi_0)\cdot\alpha \tag{2.9}$$

разрешима относительно $(N + nm)$*–вектора* $\mathrm{col}(\rho,\gamma)$. *Каждое решение* $\mathrm{col}(\rho_0,\gamma_0)$, $\rho_0 = \mathrm{col}(\rho_0^1,\dots,\rho_0^m)$, *системы* (2.9) *определяет смешанное управление, решающее задачу* (2.4): $\Delta x(t_k) = \rho_0^k$, $k = 1,\dots,m$, $u(t) = [F^*\Theta]^\top(t)\cdot\gamma_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество всех траекторий рассматриваемой системы управления описывается равенством

$$x(t) = X(t)\sigma \ + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds \ + \int_0^t C(t,s)(Fu)(s)\,ds, \quad t\in[0,T]. \tag{2.10}$$

Выделим в фундаментальной матрице $X(t)$ матрицу, состоящую из первых n столбцов, взятых в том же порядке, и обозначим ее $X_0(t)$. Упомянутые столбцы образуют базис в пространстве абсолютно непрерывных решений однородной системы $\mathcal{L}x = 0$. Аналогично из оставшихся столбцов образуем матрицу $X_1(t)$. Эти столбцы образуют базис пространства решений системы $\mathcal{L}x = 0$, принадлежащих пространству $DS(m)$ и имеющих нулевые начальные значения. Вектор начальных значений задан: $x(0) = \alpha$; вектор возможных скачков траекторий обозначим $\rho \in R^{nm}$. Таким образом, в представлении (2.10) имеем $\sigma = \mathrm{col}(\alpha, \rho)$. С учетом введенных обозначений это представление принимает вид

$$x(t) = X(t)_0(t)\alpha \ + X(t)_1(t)\rho \ + \ \int_0^t C(t,s)(Fu)(s)\,ds \ + \ \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \quad (2.11)$$

Применим к обеим частям этого равенства целевой вектор-функционал l. В правой части значения вектор-функционала будем вычислять последовательно для отдельных слагаемых, обозначая их $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_4$. При таком вычислении мы используем представление (2.3). Обратим внимание на то, что вычисление первого слагаемого в этом представлении требует дифференцирования элемента, к которому применяется вектор-функционал. При этом значение вектор-функционала на матричных элементах представляет собой матрицу, составленную из значений вектор-функционала на соответствующих столбцах матрицы в соответствии с (2.3). Приведем подробные вычисления для Λ_4:

$$\Lambda_4 = l\left\{\int_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)f(s)\,ds\right\} \ = \ \int_0^T \Phi(s)\left(\frac{d}{ds}\int_0^s C(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\right)ds \ + \ \Psi_0\cdot 0 + \sum_{k=1}^m \Psi_k\cdot 0 \ =$$

$$= \int_0^T \Phi(s)\int_0^s C'_s(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,ds + \int_0^T \Phi(s)f(s)\,ds \ + \ \Psi_0\cdot 0 + \sum_{k=1}^m \Psi_k\cdot 0.$$

Здесь при дифференцировании интеграла использовано равенство (2.7). Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле (обоснование этой операции, использующее свойства матрицы Коши, можно найти в [5, 6]), получаем с учетом обозначения Θ

$$\Lambda_4 \ = \ \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds.$$

Приведем результаты вычисления остальных слагаемых:

$$\Lambda_3 \ = \ \int_0^T \Theta(s)(Fu)(s)\,ds,$$

$$\Lambda_2 \ = \ [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}_1(s)\,ds \ + \ (\Psi_1,\ldots,\Psi_m)]\rho \ = \ \Xi_1\rho \ + \ (\Psi_1,\ldots,\Psi_m)\rho,$$

$$\Lambda_1 \ = \ [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}_0(s)\,ds \ + \ \Psi_0]\alpha \ = \ \Xi_0\alpha \ + \ \Psi_0\alpha.$$

Используя сопряженный оператор F^*, запишем Λ_3 в виде

$$\Lambda_3 \ = \ \int_0^T [F^*\Theta](s)u(s)\,ds$$

и воспользуемся разложением элементов пространства L_2 в прямую сумму линейной оболочки столбцов матрицы $F^*\Theta$ и ее ортогонального дополнения: $u(t) = [F^*\Theta]\gamma + v(t)$. Подстановка такого разложения в Λ_3 дает для этого значения выражение

$$\Lambda_3 \ = \ \int_0^T [F^*\Theta](s)\,[F^*\Theta]^\top(s)\gamma\,ds \ = \ M\gamma.$$

Окончательный результат этих вычислений с учетом целевых условий $lx = \beta$ приводит к системе (2.9) относительно γ и ρ.

Теорема 2.1 дает возможность решать задачу об импульсной коррекции [9] классического L_2-управления при условии обратимости матрицы M. Действительно, в этом случае задача управления разрешима при любом фиксированном наборе скачков траектории (то есть при любом векторе ρ). Остающуюся степень свободы выбора импульсной составляющей можно использовать, например, для минимизации общих расходов на управление. Для более точного описания такой возможности получим сначала представление для всех управлений, решающих задачу управления при каждом фиксированном ρ. Решая систему (2.9) относительно γ, получаем

$$\gamma_\rho \;=\; M^{-1}\{\beta \;-\; \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds \;-\; (\Xi_0 \,+\, \Psi_0)\cdot\alpha - [\Xi_1 \,+\, (\Psi_1,\ldots,\Psi_m)]\cdot\rho\,\}$$

и

$$u_\rho(t) \;=\; [F^*\Theta]^\top(t)\gamma_\rho. \tag{2.12}$$

Пусть расходы на управление измеряются с помощью функционала

$$\Omega(\rho) \;=\; ||\rho||^2_{R^{nm}} \;+\; ||u_\rho||^2_{L_2}.$$

Если $\operatorname{argmin}\Omega(\rho) \;=\; \rho_0 \;\neq\; 0$, то управление u_{ρ_0} с минимальными общими затратами является смешанным, то есть содержит обе компоненты — классическую и импульсную.

Свойства программного управления (2.12) как функции времени определяются свойствами сопряженного оператора F^* и матрицы Θ. Ограничимся двумя примерами явного представления матрицы $[F^*\Theta](t)$. В случае $(Fu)(t) = F(t)u(t)$ имеем $[F^*\Theta](t) \;=\; \Theta(t)F(t)$. Если

$$(Fu)(t) = \int_0^t F(t,s)u(s)\,ds,$$

то при естественных условиях относительно ядра $F(t,s)$ получаем

$$[F^*\Theta](t) \;=\; \int_t^T \Theta(s)F(s,t)\,ds.$$

Обратимся теперь к конструкции матрицы Θ (2.8). Первое слагаемое $\Phi(s)$ задано, поэтому остановимся подробнее на втором слагаемом

$$V(s) \;=\; \int_s^T \Phi(\tau)C'_\tau(\tau,s)\,d\tau,$$

которое определяется по матрице Коши. Так как матрица $V(s)$ содержит всю необходимую для построения программного управления информацию, то целесообразно получить для этой матрицы определяющие соотношения в терминах исходного объекта.

Т е о р е м а 2.2. *Матрица $V(s)$ однозначно определяется уравнением*

$$V(s) \;=\; \int_s^T V(\tau)K(\tau,s)\,d\tau \;+\; \int_s^T \Phi(\tau)K(\tau,s)\,d\tau\,, s\in[0,T], \tag{2.13}$$

ее ν-е последовательное приближение $V_\nu(s)$ может быть найдено по формуле

$$V_\nu(s) \;=\; \int_s^T V_{\nu-1}(\tau)K(\tau,s)\,d\tau \;+\; \int_s^T \Phi(\tau)K(\tau,s)\,d\tau\,,\nu = 1,2,\ldots,\;\; V_0(s) = 0,\;\; s\in[0,T],$$

при этом

$$\operatorname{vraisup}\{\parallel V(s) - V_\nu(s)\parallel : s\in[0,T]\} \;\leqslant\; d(e^d - \sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{d^i}{(i-1)!})\cdot n\int_0^T \parallel \Phi(\tau)\parallel\;\kappa(\tau)\,d\tau,$$

где $d = n\int_0^T \kappa(\tau)\,d\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (2.13) для матрицы V получаем после умножения обеих частей равенства (2.6) на $\Phi(t)$, интегрирования по t от s до T и преобразований, обоснование которым дано в [5, 6]. Сходимость последовательных приближений для каждой из строк матрицы V в пространстве L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0,T] \to (R^n)^*$, а также соответствующая оценка погрешности устанавливаются на основе оценки нормы ν-й степени сопряженного оператора $(K^*)^\nu : L_\infty \to L_\infty$: $\| (K^*)^\nu \| \leqslant \frac{d^\nu}{(\nu-1)!}$, получающейся с использованием итерированных ядер и условий относительно элементов ядра оператора K.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П. Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1731–1747.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
4. Анохин А.В. О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1037–1040.
5. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601–606.
6. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: Изд-во ПГУ, 2003. 306 с.
7. Максимов В.П. Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 121–126.
8. Максимов В.П. Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2008. № 8. С. 108–112.
9. Максимов В.П. Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2009. № 1. С. 91–95.
10. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2011. №2. С. 13–23.
11. Максимов В.П., Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия вузов. Математика. 2012. № 9. С. 72–76.
12. Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2010. № 2. С. 45–50.
13. Azbelev N.V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. New York–Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.
14. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 69. № 2. P. 203–235.
15. Maksimov V.P. Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, New York–Cairo: Hindawi Publishing Corporation. 2006. P. 757–765.
16. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16. № 3. P. 517–527.

Поступила в редакцию 28.09.2015

Максимов Владимир Петрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

V. P. Maksimov

Some questions of the control theory for functional differential systems

Keywords: functional differential systems, control problems, controllability with respect to a family of linear functional, impulse and mixed control.

MSC: 34K10, 34K30, 34K35, 91B74

In this paper, some control problems for linear functional differential systems are considered. We are concerned with the problems that arise in various applications including applied problems of mathematical economics and economic dynamics. We pay attention mainly to generalizations of the classic control problem about the transfer of the system from a given initial state to a prescribed terminal state. One of those is the problem of control with respect to a given family of linear functionals. There are proposed conditions of the solvability to the control problem in certain classes of controls including impulse and mixed controls. The problem of impulse correction of classic control is motivated and considered. The key idea of all proposed results is to underline an exclusive role which is played in the discussed questions by the Cauchy matrix of the system under control.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P. A priory estimates of solutions of a Cauchy problem and the solvability of boundary value problems for equations with time delay, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1731–1747 (in Russian).
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of functional differential equations), Moscow: Nauka, 1991, 280 p.
3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya* (Elements of the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications), Moscow: Institute of Computer Science, 2002, 384 p.
4. Anokhin A.V. On linear impulse system for functional differential equations, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1037–1040 (in Russian).
5. Maksimov V.P. The Cauchy formula for a functional differential equation, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 601–606 (in Russian).
6. Maksimov V.P. *Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Questions of the general theory of functional differential equations), Perm: Perm State University, 2003, 306 p.
7. Maksimov V.P. Arithmetics of rational numbers and computer-assisted study of integral equations, *Sorosovskii Obrazovatel'nyi Zhurnal*, 1999, no. 3. pp. 121–126 (in Russian).
8. Maksimov V.P. An approach to the problem of directing the system to a neighborhood of a normative trajectory, *Vestn. Perm. Univ. Ekonomika*, 2008, no. 8, pp. 108–112 (in Russian).
9. Maksimov V.P. Impulse correction of the control for dynamic models with aftereffect, *Vestn. Perm. Univ. Ekonomika*, 2009, no. 1, pp. 91–95 (in Russian).
10. Maksimov V.P., Chadov A.L. Hybrid models in problems of economic dynamics, *Vestn. Perm. Univ. Ekonomika*, 2011, no. 2, pp. 13–23 (in Russian).
11. Maksimov V.P., Chadov A.L. A class of controls for a functional–differential continuous-discrete system, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 9, pp. 62–65.
12. Maksimov V.P., Ponosov A.A., Chadov A.L. Some problems in economic mathematical modelling, *Vestn. Perm. Univ. Ekonomika*, 2010, no. 2, pp. 45–50 (in Russian).
13. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, New York–Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007, 314 p.
14. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications, *Intern. J. of Pure and Appl. Math.*, 2011, vol. 69, no. 2, pp. 203–235.
15. Maksimov V.P., Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics, *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications*, New York–Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2006, pp. 757–765.
16. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals, *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 517–527.

Received 28.09.2015

Maksimov Vladimir Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia.
E-mail: maksimov@econ.psu.ru