Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2019. Том 54. С. 3–26

УДК 517.958, 517.984.56

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ЛАНДАУ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматривается двумерный оператор Дирака $\widehat{\sigma}_1\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\bigr)+\widehat{\sigma}_2\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\bigr)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ с однородным магнитным полем B с потоком $\eta=(2\pi)^{-1}Bv(K)\in\mathbb{Q}$ через элементарную ячейку K общей решетки периодов Λ функции m и электрического потенциала V; $\widehat{\sigma}_j$, $j=1,2,3,$ — матрицы Паули, $\widehat{I}_2$ — единичная 2×2-матрица, $v(K)$ — площадь элементарной ячейки K. Предполагается, что m и V принадлежат пространству $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ периодических с решеткой периодов Λ функций из $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p>2$. Для невозрастающей функции $(0,1]\ni\varepsilon\mapsto\mathcal{R}(\varepsilon)\in(0,+\infty)$, для которой $\mathcal{R}(\varepsilon)\to+\infty$ при $\varepsilon\to+0$, пусть $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ — множество функций $m\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ таких, что для любого $\varepsilon\in(0,1]$ найдется тригонометрический многочлен $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которого $\|m-\mathcal{P}^{(\varepsilon)}\|_{L^p(K)}<\varepsilon$ и все коэффициенты Фурье $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y=0$ при $|Y|>\mathcal{R}(\varepsilon)$. Доказано, что для любой рассматриваемой функции $\mathcal{R}(\cdot)$ в банаховом пространстве $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}),\|\cdot\|_{L^p(K)})$ существует множество второй категории (плотное G_δ-множество) $\mathcal{O}$ такое, что для любого электрического потенциала $V\in\mathcal{O}$, любой функции $m\in\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta\in\mathbb{Q}$ спектр оператора Дирака абсолютно непрерывен.

Ключевые слова: двумерный оператор Дирака, периодический электрический потенциал, однородное магнитное поле, спектр.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-01

Введение

Рассматривается двумерный оператор Дирака (релятивистский гамильтониан Ландау)

$$\widehat{D}_B+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2=\widehat{\sigma}_1\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\widehat{\sigma}_2\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\right)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, где

$$\widehat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \widehat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \widehat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

— матрицы Паули, $\widehat{I}_2$ — единичная 2×2-матрица, $B\in\mathbb{R}$ — напряженность однородного магнитного поля и электрический потенциал $V\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и функция $m\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$. Координаты в $\mathbb{R}^2$ задаются относительно некоторого ортонормированного базиса e_1, e_2.

Пусть E^1, E^2 — базисные векторы решетки Λ: $\Lambda=\{N_1E^1+N_2E^2\colon N_1,N_2\in\mathbb{Z}\}$, $K=\{\xi_1E^1+\xi_2E^2\colon\ 0\leqslant\xi_j\leqslant 1, j=1,2\}$ — элементарная ячейка решетки Λ, имеющая площадь $v(K)$, и $\eta=(2\pi)^{-1}Bv(K)$ — поток магнитного поля через элементарную ячейку K. В настоящей работе предполагается, что η — ненулевое рациональное число ($\eta\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$).

Для базисных векторов E^1, E^2 решетки Λ пусть E^1_*, $E^2_*\in\mathbb{R}^2$ — векторы, для которых $(E^\mu,E^\nu_*)=\delta_{\mu\nu}$, μ, $\nu=1,2$ (где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера; $|\cdot|$ и $(\cdot,\cdot)$ — длина и скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^2$). Векторы E^1_*, E^2_* образуют базис обратной решетки $\Lambda^*=\{M_1E^1_*+M_2E^2_*\colon M_1,M_2\in\mathbb{Z}\}$. Пусть $K^*=\{\xi_1E^1_*+\xi_2E^2_*\colon 0\leqslant\xi_j\leqslant 1, j=1,2\}$ —

элементарная ячейка обратной решетки Λ^* с площадью $v(K^*) = (v(K))^{-1}$. Также будет рассматриваться решетка $2\pi\Lambda^* = \{2\pi\mathfrak{x} \colon \mathfrak{x} \in \Lambda^*\}$ с элементарной ячейкой $2\pi K^*$.

Пусть $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p \in [1,+\infty]$, и $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $C^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — пространства периодических с решеткой периодов Λ функций из $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ соответственно. Аналогично определяются пространства $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ и $C^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$; $H^q_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $q > 0$, — пространство периодических с решеткой периодов Λ функций из класса Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. На $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ и $C_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ определяются нормы $\|W\|_{L^p(K)} \doteq \|W(\cdot\big|_K)\|_{L^p(K)}$ и $\|W\|_{C(K)} \doteq \|W(\cdot\big|_K)\|_{C(K)}$.

Через W_Y обозначаются коэффициенты Фурье функций $W \in L^1_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$,

$$W_Y = (v(K))^{-1} \int_K W(x)\, e^{-i\,(Y,x)}\, dx, \quad Y \in 2\pi\Lambda^*.$$

Пусть $\mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ — множество функций W из $L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ таких, что $W\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ для всех функций φ из класса Соболева $H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует число $C(\varepsilon, W) > 0$ такое, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$

$$\|W\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})} \leqslant \varepsilon\, \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)} + C(\varepsilon, W)\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})}.$$

При этом $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \subset \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$.

Оператор (0.1) является частным случаем двумерного магнитного оператора Дирака

$$\widehat{D}(A) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2 = \widehat{\sigma}_1\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right) + \widehat{\sigma}_2\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2, \qquad (0.2)$$

где $A = (A_1; A_2) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — магнитный потенциал, определяющий магнитное поле $B(x) = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Если $m, V, A_j \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, то оператор (0.2) является самосопряженным с областью определения $D(\widehat{D}(A) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2) = H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. И в этом случае поток магнитного поля через элементарную ячейку K нулевой (для магнитного поля $B(\cdot)$, рассматриваемого как периодическая обобщенная функция, коэффициент Фурье $B_0 = 0$ для нулевого вектора решетки $2\pi\Lambda^*$). В [1,2] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.2), если $m, V, A_j \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, $p > 2$. Эти условия на m, V и A были в дальнейшем ослаблены в [3–6]. В [7] доказано, что у оператора

$$\sum_{j=1}^{2} (h_{j1}\widehat{\sigma}_1 + h_{j2}\widehat{\sigma}_2)\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3} V^{(j)}\widehat{\sigma}_j + V\widehat{I}_2 \qquad (0.3)$$

нет собственных значений, если $V, V^{(j)} \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2, 3$, $h_{jl} \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $j, l = 1, 2$, и существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при почти всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполняется неравенство $\varepsilon \leqslant h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}(x)h_{21}(x)$. При этом, если оператор (0.3) самосопряжен, то его спектр абсолютно непрерывен.

Если $m, V \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, то матричнозначная функция $m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$ имеет нулевую грань относительно оператора

$$\widehat{D}_0 = -i\widehat{\sigma}_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} - i\widehat{\sigma}_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}$$

и, следовательно, относительно оператора $\widehat{D}_B$ (это следует из разложения (1.1)). Поэтому оператор (0.1) самосопряжен и имеет некоторую область определения $D(\widehat{D}_B + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2) = D(\widehat{D}_B) \subset H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. При $B \neq 0$, $m(\cdot) \equiv m_0 \in \mathbb{R}$ и $V(\cdot) \equiv 0$ спектр оператора (0.1) состоит из собственных значений (бесконечной кратности) $\lambda_0 = m_0 \operatorname{sign} B$ (где $\operatorname{sign} B = 1$ при $B > 0$ и $\operatorname{sign} B = -1$ при $B < 0$) и $\lambda_j^\pm = \pm(m_0^2 + 2|B|j)^{1/2}$, $j \in \mathbb{N}$ (см., например, [8, 9]). Если $m(\cdot)\operatorname{sign} B + V(\cdot) \equiv C \in \mathbb{R}$, то у оператора (0.1) также имеется собственное значение $\lambda = C$ (см. § 2). Но при $m(\cdot) \equiv m_0 \in \mathbb{R}$ неизвестно, существуют ли непостоянные функции $V \in C_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ такие, что для (какого-либо) однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ оператор (0.1) имеет собственные значения.

Аналогичная проблема стоит и для гамильтониана Ландау

$$\widehat{H}_B + V = \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1\right)^2 + V \tag{0.4}$$

с периодическим электрическим потенциалом $V \in C_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. При $B \neq 0$ и $V(\cdot) \equiv 0$ спектр оператора $\widehat{H}_B$ состоит из собственных значений (бесконечной кратности) $\lambda_j = (2j+1)|B|$, $j \in \mathbb{Z}_+ \doteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (уровни Ландау). Если V — периодический с решеткой периодов Λ одноатомный точечный потенциал и $1 < |\eta| \in \mathbb{Q}$, то все уровни Ландау являются собственными значениями оператора (0.4) [10]. Однако неизвестно, существуют ли непостоянные функции $V \in C_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, для которых в спектре оператора (0.4) имеются собственные значения для какого-либо однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ [11, 12]. Спектр оператора (0.4) абсолютно непрерывен (поэтому не содержит собственных значений), если $V \in C^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ — непостоянный тригонометрический многочлен и $|\eta| \in \{Q^{-1} : Q \in \mathbb{N}\}$ [13]. В [12] доказано, что в банаховом пространстве $(C_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C(K)})$ существует множество второй категории (плотное G_δ-множество) $\mathcal{O}$ такое, что для всех $V \in \mathcal{O}$ и всех однородных магнитных полей B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора (0.4) абсолютно непрерывен. Аналогичное утверждение для пространства $(L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(K)})$ (а также для всех пространств $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$, $p \in (2, +\infty]$) доказано в статье [D-2020][1]. Также в [D-2020] для однородных магнитных полей B с $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ определены некоторые классы потенциалов $V \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ таких, что в спектре оператора (0.4) нет собственных значений.

Двумерный периодический оператор Шрёдингера (с периодическими магнитным A и электрическим V потенциалами, имеющими общую решетку периодов) и его обобщения (и, в частности, оператор (0.4) при $B = 0$) рассматривались во многих работах (см., например, [6, 14–18] и ссылки в этих статьях, а также обзорные статьи [19, 20]).

При исследовании оператора (0.1) (если $\eta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$) используется магнитно-блоховская теория, изложение которой для гамильтониана Ландау (0.4) (на языке разложения операторов в прямой интеграл операторов, имеющих дискретный спектр) приведено в [10]. Магнитно-блоховская теория применима для операторов (0.1) при $m, V \in \mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ и, в частности, для функций $m, V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $p > 2$, которые рассматриваются в настоящей работе. В условиях применимости магнитно-блоховской теории в спектре оператора (0.1) отсутствует сингулярная составляющая (что непосредственно следует из результатов работы [21], см. также [22, 23]). Поэтому отсутствие собственных значений означает абсолютную непрерывность спектра оператора (0.1).

Пусть $\mathfrak{R}$ — множество невозрастающих функций $(0, 1] \ni \varepsilon \mapsto \mathcal{R}(\varepsilon) \in (0, +\infty)$, для которых $\mathcal{R}(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$. Для функции $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, $p > 2$, множество функций $m(\cdot) \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ таких, что для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ найдется вещественнозначный тригонометрический многочлен

$$\mathcal{P}^{(\varepsilon)} = \sum_{Y \,\in\, 2\pi\Lambda^*} \mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y\, e^{\,i\,(Y,x)},$$

для которого $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y = 0$ при $|Y| > \mathcal{R}(\varepsilon)$ и $\|m - \mathcal{P}^{(\varepsilon)}\|_{L^p(K)} < \varepsilon$.

Постоянные функции $m(\cdot) \equiv m_0 \in \mathbb{R}$ принадлежат $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ при всех $p > 2$ и $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$.

В настоящей работе доказано следующее утверждение.

[1] [D-2020] Данилов Л.И. О спектре гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 1. С. 47–65. https://doi.org/10.4213/tmf9748 (в печати).

Т е о р е м а 0.1. *Для любой решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и любых $p > 2$ и $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$ в банаховом пространстве $(L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(K)})$ существует множество второй категории $\mathcal{O}$ такое, что для любого электрического потенциала $V \in \mathcal{O}$, любой функции $m(\cdot) \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и любого однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q}$ спектр оператора* (0.1) *абсолютно непрерывен.*

Если $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ — собственная функция оператора (0.1) с собственным значением λ, то $\widehat{\sigma}_2\overline{\Phi}$ (где черта означает комплексное сопряжение) — собственная функция оператора (0.1) с тем же собственным значением λ при заменах $B \mapsto -B$ и $m(\cdot) \mapsto -m(\cdot)$. С другой стороны, спектр оператора $\widehat{D}_0 + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$ (при $B = 0$) абсолютно непрерывен для всех функций $m, V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$ [2,7,24]. Поэтому при доказательстве теоремы 0.1 можно ограничиться только рассмотрением случая $B > 0$, $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$.

В дальнейшем предполагается, что $B > 0$.

В § 1 рассматривается магнитно-блоховская теория и приведена теорема 1.1, играющая ключевую роль в настоящей работе. Оператор (0.1) унитарно эквивалентен прямому интегралу «послойных» операторов, зависящих от магнитного квазиимпульса. В § 2 исследуются свойства этих операторов при определенным образом выбираемых комплексных значениях магнитного квазиимпульса. В этом же параграфе приведен ряд вспомогательных утверждений. Теорема 0.1 доказывается в § 3.

§ 1. Магнитно-блоховская теория

В этом параграфе доказывается унитарная эквивалентность оператора (0.1) прямому интегралу «послойных» операторов, зависящих от магнитного квазиимпульса. Используются обозначения и некоторые утверждения из статьи [13] (в которой рассматривался гамильтониан Ландау (0.4)).

Выберем векторы e_1, e_2 так, что $E^1_1 > 0$, $E^1_2 = 0$ и $E^2_2 > 0$, где $E^l_j = (E^l, e_j)$, $l, j = 1, 2,$ — координаты базисных векторов E^1, E^2 решетки Λ. Это можно сделать, так как операторы (0.1) при разном выборе базисных векторов e_1, e_2 унитарно эквивалентны. Тогда $E^1_* = (E^1_1E^2_2)^{-1}(E^2_2e_1 - E^2_1e_2)$, $E^2_* = (E^2_2)^{-1}e_2$. При этом $v(K) = E^1_1E^2_2$.

Пусть $\eta = PQ^{-1}$, где P, $Q \in \mathbb{N}$ — взаимно простые числа. От решетки периодов Λ перейдем к «укрупненной» решетке $\widetilde{\Lambda}$ с базисными векторами $\widetilde{E}^1 = QE^1$, $\widetilde{E}^2 = E^2$. Через $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}^*$ обозначим элементарные ячейки решеток $\widetilde{\Lambda}$ и $\widetilde{\Lambda}^*$, определяемые базисными векторами $\widetilde{E}^1$, $\widetilde{E}^2$ и $\widetilde{E}^1_* = Q^{-1}E^1_*$, $\widetilde{E}^2_* = E^2_*$; $v(\widetilde{K})$ и $v(\widetilde{K}^*)$ — площади элементарных ячеек $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}^*$, $v(\widetilde{K}) = Qv(K)$, $v(\widetilde{K}^*) = Q^{-1}v(K^*)$ и $Bv(\widetilde{K}) = B\widetilde{E}^1_1\widetilde{E}^2_2 = 2\pi P \in 2\pi\mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}^0_B$ множество функций $\varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, для которых при почти всех $x \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(x + \widetilde{E}^{\,l}) = e^{iB\widetilde{E}^l_1 x_2}\varphi(x), \quad l = 1, 2;$$
$\mathcal{H}^q_B$ — множество функций из $\mathcal{H}_B$, принадлежащих классу Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $q > 0$, $\mathcal{H}^\infty_B$ — множество бесконечно дифференцируемых функций из $\mathcal{H}_B$. На пространстве $\mathcal{H}_B$ определим скалярное произведение
$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{H}_B} = \int_{\widetilde{K}} \overline{\varphi_1}\, \varphi_2 \, dx, \quad \varphi_1,\, \varphi_2 \in \mathcal{H}_B,$$
и соответствующую ему норму $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_B}$.

Каждой функции $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ ставится в соответствие функция
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (k; x) \mapsto \big(\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\varphi\big)(k; x) =$$
$$= \sum_{\mu_1,\,\mu_2 \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{iB}{2}\,\widetilde{E}^2_1\widetilde{E}^2_2\,\mu_2(\mu_2-1)}\, e^{-iB(\mu_1\widetilde{E}^1_1 + \mu_2\widetilde{E}^2_1)x_2}\, e^{-i(k, x + \mu_1\widetilde{E}^1 + \mu_2\widetilde{E}^2)}\, \varphi(x + \mu_1\widetilde{E}^1 + \mu_2\widetilde{E}^2),$$

для которой $\big(\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\varphi\big)(k;\cdot)\in\mathcal{H}_B^\infty$ при всех $k\in\mathbb{R}^2$. Отображение $\varphi\mapsto\big\{2\pi\widetilde{K}^*\ni k\mapsto\big(\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\varphi\big)(k;\cdot)\big\}$ продолжается до унитарного оператора $\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}$ (для которого сохраним прежнее обозначение) из $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ на

$$\int_{2\pi\widetilde{K}^*}^{\oplus}\mathcal{H}_B\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)}$$

(см., например, [13]).

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}_B^q$, $q\geqslant 0$, — множество вектор-функций $\Phi=(\Phi_1;\Phi)^T\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ (где T — операция транспонирования), для которых $\Phi_j\in\mathcal{H}_B^q$, $j=1,2$; $\widetilde{\mathcal{H}}_B\doteq\widetilde{\mathcal{H}}_B^0$.

На $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ определим скалярное произведение

$$(\Phi',\Phi'')_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}=\sum_{j=1}^{2}(\Phi'_j,\Phi''_j)_{\mathcal{H}_B}\,,\quad \Phi',\Phi''\in\widetilde{\mathcal{H}}_B,$$

и норму $\|\Phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}\doteq(\Phi,\Phi)^{\frac12}_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}$, $\Phi\in\widetilde{\mathcal{H}}_B$.

Через $\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}$ обозначим унитарный оператор, ставящий в соответствие вектор-функциям $\Phi=(\Phi_1;\Phi)^T\in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ зависящие от k вектор-функции

$$2\pi\widetilde{K}^*\ni k\mapsto\big(\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\Phi\big)(k;\cdot)\doteq\Big(\big(\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\Phi_1\big)(k;\cdot);\big(\widehat{U}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\Phi_2\big)(k;\cdot)\Big)^T\in\widetilde{\mathcal{H}}_B$$

из

$$\int_{2\pi\widetilde{K}^*}^{\oplus}\widetilde{\mathcal{H}}_B\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)}\,.$$

Вектор $k\in 2\pi\widetilde{K}^*$ называется *магнитным квазиимпульсом*.

Пусть

$$\widehat{D}_B(k)=\widehat{\sigma}_1\bigg(k_1-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg)+\widehat{\sigma}_2\bigg(k_2-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\bigg),\quad k\in\mathbb{R}^2,$$

— самосопряженные операторы, действующие в $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ и имеющие область определения $D(\widehat{D}_B(k))=\widetilde{\mathcal{H}}_B^1$. В дальнейшем будут также рассматриваться замкнутые операторы $\widehat{D}_B(k+i\varkappa)$, $k+i\varkappa\in\mathbb{C}^2$, с той же областью определения.

Справедливо разложение

$$\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\widehat{D}_B\,\widehat{\mathcal{U}}^{-1}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}=\int_{2\pi\widetilde{K}^*}^{\oplus}\widehat{D}_B(k)\,\frac{dk}{(2\pi)^2 v(\widetilde{K}^*)},\tag{1.1}$$

поэтому $D(\widehat{D}_B)$ — множество вектор-функций $\Phi\in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, для которых $\big(\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\Phi\big)(k;\cdot)\in\widetilde{\mathcal{H}}_B^1$ при почти всех $k\in 2\pi\widetilde{K}^*$ и

$$\int_{2\pi\widetilde{K}^*}\|\widehat{D}_B(k)\,\big(\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,\Phi\big)(k;\cdot)\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}\,dk<+\infty.$$

Так как $m,V\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\subset\mathbb{L}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $p>2$, то матричнозначная функция $m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$, действующая как оператор в $\widetilde{\mathcal{H}}_B$, имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{D}_B(k)$, $k\in\mathbb{R}^2$. Более того, для любого $\varepsilon>0$ найдется число $C>0$ (которое зависит от Λ, B, $m(\cdot)$ и $V(\cdot)$, но не зависит от k) такое, что для всех $\Phi\in\widetilde{\mathcal{H}}_B^1$ и всех $k\in\mathbb{R}^2$

$$\|(m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2)\Phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}\leqslant\varepsilon\,\|\widehat{D}_B(k)\Phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}+C\,\|\Phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_B}\,.$$

Следовательно, $\widehat{D}_B(k)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$, $k\in\mathbb{R}^2$, — также самосопряженные операторы, действующие в $\widetilde{\mathcal{H}}_B$, $D(\widehat{D}_B(k)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2)=D(\widehat{D}_B(k))=\widetilde{\mathcal{H}}^1_B$ и

$$\widehat{\mathcal{U}}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}\,(\widehat{D}_B+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2)\,\widehat{\mathcal{U}}^{-1}_{\widetilde{E}^1,\widetilde{E}^2}=\int_{2\pi\widetilde{K}^*}^{\oplus}(\widehat{D}_B(k)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2)\,\frac{dk}{(2\pi)^2v(\widetilde{K}^*)}. \tag{1.2}$$

При этом $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ — существенная область для оператора $\widehat{D}_B+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$, матричнозначная функция $m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{D}_B$ и, следовательно, $D(\widehat{D}_B+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2)=D(\widehat{D}_B)\subset H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)\,\cap\,L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$.

Операторы $\widehat{D}_B(k)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$, $k\in\mathbb{R}^2$, имеют компактную резольвенту и их спектр дискретен. Для этих операторов нумерацию собственных значений $\lambda_j(k)$, $j\in\mathbb{Z}$, упорядоченных при каждом $k\in\mathbb{R}^2$ по возрастанию (с учетом их кратности), при разных k можно выбрать так, чтобы функции $\mathbb{R}^2\ni k\mapsto\lambda_j(k)$ были непрерывными и аналитическими вне их пересечений (но сами функции (ветви закона дисперсии) $k\mapsto\lambda_j(k)$ могут быть кратными) [10,25]. Из (1.2) следует, что оператор (0.1) имеет собственное значение λ тогда и только тогда, когда λ — собственное значение операторов $\widehat{D}_B(k)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ для всех k из некоторого подмножества ячейки $2\pi\widetilde{K}^*$, имеющего положительную меру Лебега [25, теорема XIII.85]. Но тогда из аналитической теоремы Фредгольма получаем, что если λ — собственное значение оператора (0.1), то λ — собственное значение операторов $\widehat{D}_B(k+i\varkappa)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ при всех $k+i\varkappa\in\mathbb{C}^2$. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 1.1. *Пусть λ — собственное значение оператора* (0.1) *при m, $V\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p>2$, и $\eta=PQ^{-1}\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$. Тогда λ — собственное значение* (*действующих в $\widetilde{\mathcal{H}}_B$*) *операторов $\widehat{D}_B(k+i\varkappa)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ при всех $k+i\varkappa\in\mathbb{C}^2$.*

§ 2. Свойства операторов $\widehat{D}_B(k+i\varkappa)$ и некоторые вспомогательные утверждения

Для векторов $k\in\mathbb{R}^2$ определим в $\mathcal{H}_B$ магнитные операторы уничтожения и рождения

$$\widehat{Z}_\mp=\widehat{Z}_\mp(k)\doteq\left(k_1-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\pm i\left(k_2-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\right),$$

$D(\widehat{Z}_\mp)=\mathcal{H}^1_B\subset\mathcal{H}_B$; $\widehat{Z}_\mp$ — замкнутые операторы и $\widehat{Z}^*_\mp=\widehat{Z}_\pm$ (знак «$*$» используется для обозначения сопряженного оператора).

Пусть $\mathcal{H}^{(0)}_B(k)$ — подпространство функций $\Psi\in\mathcal{H}^1_B$, для которых $\widehat{Z}_-\Psi=0$ (при этом $\mathcal{H}^{(0)}_B(k)\subset\mathcal{H}^\infty_B$). Для функций $\Psi\in\mathcal{H}^{(0)}_B(k)$ обозначим

$$\Psi^{(j)}=\Psi^{(j)}(k)=\frac{(2B)^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{j!}}\,\widehat{Z}^j_+\Psi,\quad j\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\begin{cases}\widehat{Z}_+\Psi^{(j)}=\sqrt{2B(j+1)}\,\Psi^{(j+1)}, & j\in\mathbb{Z}_+,\\ \widehat{Z}_-\Psi^{(j)}=\sqrt{2Bj}\,\Psi^{(j-1)}, & j\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{2.1}$$

Если $\Psi\in\mathcal{H}^{(0)}_B(k)$ и $\|\Psi\|_{\mathcal{H}_B}=1$, то $(\Psi^{(j)},\Psi^{(j')})_{\mathcal{H}_B}=\delta_{jj'}$, $j,j'\in\mathbb{Z}_+$, и пусть $\mathcal{H}_B[\Psi]$ — подпространство в $\mathcal{H}_B$, в котором функции $\Psi^{(j)}$, $j\in\mathbb{Z}_+$, образуют ортонормированный базис. Функции $\Psi^{(j)}(k)$ являются собственными функциями операторов

$$\widehat{H}_B(k)=\left(k_1-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2+\left(k_2-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\right)^2,$$

$D(\widehat{H}_B(k)) = \mathcal{H}^2_B$, с собственными значениями $\lambda = (2j+1)B$, $j \in \mathbb{Z}_+$. При это все собственные значения $\lambda = (2j+1)B$, $j \in \mathbb{Z}_+$, P-кратно вырождены [10]. Пусть $\Psi_n = \Psi^{(0)}_n(k)$, $n = 1,\dots,P$, — (какой-либо) ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{(0)}_B(k)$. Тогда $\Psi^{(j)}_n = \Psi^{(j)}_n(k)$, $n = 1,\dots,P$, — ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{(j)}_B = \mathcal{H}^{(j)}_B(k) \doteq \{\Psi^{(j)}(k) : \Psi \in \mathcal{H}^{(0)}_B(k)\}$, $j \in \mathbb{Z}_-$, и

$$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B[\Psi_1] \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_B[\Psi_P]. \tag{2.2}$$

Через $\widehat{P}^{(j)} = \widehat{P}^{(j)}(k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, обозначим ортогональный проектор в $\mathcal{H}_B$ на подпространство $\mathcal{H}^{(j)}_B(k)$.

Вектор-функция $\Phi = (\Phi_1;\Phi_2)^T \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_B$ является собственной функцией оператора $\widehat{D}_B(k) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$, $k \in \mathbb{R}^2$, с собственным значением λ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \widehat{Z}_+(k)\Phi_2 + (m+V)\Phi_1 = \lambda\Phi_1, \\ \widehat{Z}_-(k)\Phi_1 + (-m+V)\Phi_2 = \lambda\Phi_2, \end{cases} \tag{2.3}$$

Если $m(\cdot) + V(\cdot) \equiv C \in \mathbb{R}$, то (для любого $k \in \mathbb{R}^2$ и) для любой функции $\Psi_n(k) \in \mathcal{H}^{(0)}_B(k)$, $n = 1,\dots,P$, вектор-функция $\Phi_n(k) = (\Psi_n(k);0)^T$ является собственной функцией оператора $\widehat{D}_B(k) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$ с собственным значением $\lambda = C$. В этом случае у оператора (0.1) также имеется собственное значение $\lambda = C$ [25, теорема XIII.85].

Л е м м а 2.1. *Пусть $\eta = PQ^{-1} \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)$. Тогда для любого $m_0 \in \mathbb{R}$ и любого $k \in \mathbb{R}^2$ спектр оператора $\widehat{D}_B(k) + m_0\widehat{\sigma}_3$ состоит из P-кратно вырожденных собственных значений $\lambda_0 = m_0$ и $\lambda^\pm_j = \pm(m_0^2 + 2Bj)^{\frac12}$, $j \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор-функции $\Phi^{(0)}_n(k) = (\Psi_n(k);0)^T$, $n = 1,\dots,P$, являются собственными функциями операторов $\widehat{D}_B(k) + m_0\widehat{\sigma}_3$ с собственным значением $\lambda_0 = m_0$. Вектор-функции

$$\Phi^{(j),\pm}_n(k) = \left(\frac{\pm\sqrt{Bj}}{(\lambda^\pm_j(\lambda^\pm_j - m_0))^{\frac12}}\,\Psi^{(j)}_n; \ \frac{\sqrt{Bj}}{(\lambda^\pm_j(\lambda^\pm_j + m_0))^{\frac12}}\,\Psi^{(j-1)}_n \right)^T, \quad n = 1,\dots,P,$$

являются собственными функциями операторов $\widehat{D}_B(k) + m_0\widehat{\sigma}_3$ с соответствующими собственными значениями $\lambda^\pm_j = \pm(m_0^2 + 2Bj)^{\frac12}$, $j \in \mathbb{N}$. При этом для любого $J \in \mathbb{N}$ собственные функции $\Phi^{(0)}_n(k)$ и $\Phi^{(j),\pm}_n(k)$, $n = 1,\dots,P$, $j = 1,\dots,J$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\{\Phi = (\Phi_1;\Phi_2)^T\colon\ \Phi_1 \in \mathcal{H}^{(0)}_B \oplus\dots\oplus \mathcal{H}^{(J)}_B,\ \Phi_2 \in \mathcal{H}^{(0)}_B \oplus\dots\oplus \mathcal{H}^{(J-1)}_B\}$. Поэтому (так как $\mathcal{H}_B = \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{(j)}_B$) собственные функции $\Phi^{(0)}_n(k)$ и $\Phi^{(j),\pm}_n(k)$, $n = 1,\dots,P$, $j \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ и, следовательно, других собственных значений у оператора $\widehat{D}_B(k) + m_0\widehat{\sigma}_3$ нет. □

С л е д с т в и е 2.1 (см. [8,9]). *Для любых $B > 0$ и $m_0 \in \mathbb{R}$ спектр оператора $\widehat{D}_B + m_0\widehat{\sigma}_3$, действующего в $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, состоит из собственных значений (бесконечной кратности) $\lambda_0 = m_0$ и $\lambda^\pm_j = \pm(m_0^2 + 2Bj)^{\frac12}$, $j \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно выбрать любую решетку $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, для которой $\eta = (2\pi)^{-1}Bv(K) = PQ^{-1} \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)$. Тогда спектр операторов $\widehat{D}_B(k) + m_0\widehat{\sigma}_3$ дискретен и собственные значения (определяемые в лемме 2.1) одни и те же для разных $k \in \mathbb{R}^2$. Поэтому следствие 2.1 непосредственно вытекает из разложения (1.2) и теоремы XIII.85 из [25]. □

Л е м м а 2.2. *Для всех $k \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\Phi \in D(\widehat{Z}_+(k)) = \mathcal{H}^1_B$*

$$\|(\widehat{Z}_+(k)+\zeta)\Phi\|_{\mathcal{H}_B} \geqslant \sqrt{2B}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\widehat{Z}_+(k)+\zeta = \widehat{Z}_+(k')$, где $k'_1 = k_1 + \mathrm{Re}\,\zeta$, $k'_2 = k_2 - \mathrm{Im}\,\zeta$, то лемма 2.2 следует из (2.1) и (2.2). □

Далее вектор $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$ фиксируется и в обозначениях функций $\Psi^{(j)}_n = \Psi^{(j)}_n(k)$, операторов $\widehat{Z}_\mp = \widehat{Z}_\mp(k)$ и подпространств $\mathcal{H}^{(j)}_B = \mathcal{H}^{(j)}_B(k)$ вектор k указываться не будет.

Операторы $e^{z\widehat{Z}_\mp}$, $z \in \mathbb{C}$, действующие в $\mathcal{H}_B$, имеют области определения $D(e^{z\widehat{Z}_\mp})$, состоящие из тех функций $\Phi \in \mathcal{H}^\infty_B$, для которых сходится ряд

$$e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi \doteq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!}\,\widehat{Z}^j_\mp\Phi.$$

Пусть $\mathcal{H}_B(\gamma)$, $\gamma > 0$, — множество функций $\Phi \in \mathcal{H}_B$, для которых

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{j\gamma}\,\|\widehat{P}^{(j)}\Phi\|_{\mathcal{H}_B} < +\infty.$$

Если $\Phi \in \mathcal{H}_B(\gamma)$, то для любого $\varepsilon \in (0,\gamma)$ функции $\widehat{Z}_\mp\Phi$, $e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi$, $z \in \mathbb{C}$, и $e^{i(Y,x)}\Phi$, $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$, принадлежат $\mathcal{H}_B(\gamma-\varepsilon)$ [13]. Поэтому множество $\mathcal{H}_B(+0) \doteq \bigcup\limits_{\gamma>0} \mathcal{H}_B(\gamma)$ инвариантно при действии операторов $\widehat{Z}_\mp\Phi$, $e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi$ и при умножении на функции $e^{i(Y,x)}\Phi$, $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$.

Для функций $\Phi \in \mathcal{H}^{j+1}_B$, $j \in \mathbb{N}$, справедливы равенства

$$\begin{cases} (\widehat{Z}_+\widehat{Z}^j_- - \widehat{Z}^j_-\widehat{Z}_+)\Phi = -2Bj\widehat{Z}^{j-1}_-\Phi, \\ (\widehat{Z}_-\widehat{Z}^j_+ - \widehat{Z}^j_+\widehat{Z}_-)\Phi = 2Bj\widehat{Z}^{j-1}_+\Phi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Если для некоторого $z \in \mathbb{C}$ выполняются включения $\Phi \in D(e^{z\widehat{Z}_\mp})$ и $\widehat{Z}_\pm\Phi \in D(e^{z\widehat{Z}_\mp})$ (в частности, если $\Phi \in \mathcal{H}_B(+0)$), то (см. (2.4)) также $e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi \in D(\widehat{Z}_\pm) = \mathcal{H}^1_B$ и

$$\widehat{Z}_\pm e^{z\widehat{Z}_\mp}\Phi = e^{z\widehat{Z}_\mp}(\widehat{Z}_\pm \mp 2Bz)\Phi. \tag{2.5}$$

Если λ — собственное значение оператора (0.1), то в силу теоремы 1.1 для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ операторы $\widehat{D}_B(k + \frac{\zeta}{2}\,e_1 + \frac{i\zeta}{2}\,e_2) + m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$ имеют собственные функции $\Phi = (\Phi_1;\Phi_2)^T \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_B$ с собственным значением λ, для которых (см. (2.3))

$$\begin{cases} (\widehat{Z}_+ + \zeta)\Phi_2 + (m+V)\Phi_1 = \lambda\Phi_1, \\ \widehat{Z}_-\Phi_1 + (-m+V)\Phi_2 = \lambda\Phi_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

В частности (при $m(\cdot) \equiv m_0 \in \mathbb{R}$ и $V(\cdot) \equiv 0$), операторы $\widehat{D}_B\big(k + \frac{\zeta}{2}\,e_1 + \frac{i\zeta}{2}\,e_2\big) + m_0\widehat{\sigma}_3$ имеют P-кратно вырожденные собственные значения $\lambda_0 = m_0$ и $\lambda^\pm_j = \pm(m_0^2 + 2Bj)^{\frac12}$, $j \in \mathbb{N}$, которым соответствуют линейно независимые собственные функции (см. лемму 2.1 и (2.5))

$$\Phi^{(0)}_n\left(k + \frac{\zeta}{2}\,e_1 + \frac{i\zeta}{2}\,e_2\right) = (\Psi_n;0)^T, \quad n = 1,\dots,P,$$

$$\Phi^{(j),\pm}_n\left(k + \frac{\zeta}{2}\,e_1 + \frac{i\zeta}{2}\,e_2\right) =$$

$$= \left(\frac{\pm\sqrt{Bj}}{(\lambda^\pm_j(\lambda^\pm_j - m_0))^{\frac12}}\,e^{\frac{\zeta}{2B}\,\widehat{Z}_-}\Psi^{(j)}_n;\ \frac{\sqrt{Bj}}{(\lambda^\pm_j(\lambda^\pm_j + m_0))^{\frac12}}\,e^{\frac{\zeta}{2B}\,\widehat{Z}_-}\Psi^{(j-1)}_n\right)^T, \quad n = 1,\dots,P, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Л е м м а 2.3. *Множество $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ нигде не плотно в пространстве $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольные функцию $W\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и число $\varepsilon\in(0,1]$. Так как

$$\left(\sum_{Y\in 2\pi\Lambda^*}|W_Y|^2\right)^{\frac12}=(v(K))^{-\frac12}\,\|W\|_{L^2(K)}\leqslant(v(K))^{-\frac1p}\,\|W\|_{L^p(K)},$$

то можно выбрать вектор $Y'\in 2\pi\Lambda^*\backslash\{0\}$ так, что $|Y'|>\mathcal{R}\big(\frac{\varepsilon}{16}\big)$ и $|W_{Y'}|<\frac{\varepsilon}{16}\,(v(K))^{-\frac1p}$. Пусть $W_1(x)\doteq\frac{3\varepsilon}{4}\,(v(K))^{-\frac1p}\cos{(Y',x)}$ и $W_2\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — любая функция, для которой $\|W_2\|_{L^p(K)}<\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\|W_1+W_2\|_{L^p(K)}\leqslant\|W_1\|_{L^p(K)}+\|W_2\|_{L^p(K)}<\frac{3\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Предположим, что $W+W_1+W_2\in\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$. Тогда существует вещественнозначный тригонометрический многочлен

$$\mathcal{P}^{\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)}=\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}\mathcal{P}_Y^{\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)}\,e^{\,i(Y,x)}$$

такой, что $\mathcal{P}_{Y'}^{\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)}=0$ и $\|W+W_1+W_2-\mathcal{P}^{\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)}\|_{L^p(K)}<\frac{\varepsilon}{16}$. Но в этом случае

$$\frac{\varepsilon}{16}\,(v(K))^{-\frac1p}=\left(\frac{3\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon}{16}-\frac{\varepsilon}{4}\right)(v(K))^{-\frac1p}<|(W_1)_{Y'}|-|W_{Y'}|-|(W_2)_{Y'}|\leqslant$$

$$\leqslant|W_{Y'}+(W_1)_{Y'}+(W_2)_{Y'}|\leqslant(v(K))^{-\frac1p}\,\|W+W_1+W_2-\mathcal{P}^{\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)}\|_{L^p(K)}<\frac{\varepsilon}{16}\,(v(K))^{-\frac1p}.$$

Полученное противоречие показывает, что для всех функций $W_2\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которых $\|W_2\|_{L^p(K)}<\frac{\varepsilon}{4}$, функции $W+W_1+W_2$ не принадлежат множеству $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$. Так как функция $W\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ выбирается произвольно, а число $\varepsilon>0$ можно взять сколь угодно малым, то множество $\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ нигде не плотно в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. $\square$

Если в (2.6) $\Phi_2(x)=0$ почти всюду, то $\Phi_1\in\mathcal{H}^{(0)}_B$ и $\big(m(x)+V(x)-\lambda\big)\Phi_1(x)=0$ почти всюду. Но функции $\operatorname{Re}\Phi_1(x)$ и $\operatorname{Im}\Phi_1(x)$ являются вещественно аналитическими по переменным x_1 и x_2, поэтому $m(x)+V(x)=\lambda$ почти всюду и, следовательно, $V\in\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$. Последнее означает, что Φ_2 — ненулевая функция из $\mathcal{H}^1_B$, если $V\notin\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$.

Обозначим через $\widehat{I}_B$ единичный оператор в $\mathcal{H}_B$. Пусть $\widehat{Z}_-^{-1}$ — правый обратный оператор к оператору $\widehat{Z}_-$, $\widehat{Z}_-\widehat{Z}_-^{-1}=\widehat{I}_B$, $D(\widehat{Z}_-^{-1})=\mathcal{H}_B$. Для функции Φ_1 из (2.6) обозначим $\Psi=\widehat{P}^{(0)}\Phi_1\in\mathcal{H}^{(0)}_B$. Тогда $\Phi_1=\Psi-\widehat{Z}_-^{-1}(V-m-\lambda)\Phi_2$ и с помощью (2.6) получаем следующую лемму.

Л е м м а 2.4. *Если λ — собственное значение оператора* (0.1) *и $V\notin\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, то для любого $\zeta\in\mathbb{C}$ найдутся функция $\Psi\in\mathcal{H}^{(0)}_B$ и ненулевая функция $\Phi_2\in\mathcal{H}^1_B$ такие, что*

$$(\widehat{Z}_++\zeta)\Phi_2=(\lambda-m-V)\Psi+(\lambda-m-V)\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda+m-V)\Phi_2.$$

Пусть $\widehat{\mathcal{L}}_z$, $z\in\mathbb{C}$, — операторы, действующие в пространстве $L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$:

$$\widehat{\mathcal{L}}_z\varphi=\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}(1+|Y|^2)^{\frac{z}{2}}\,\varphi_Y\,e^{\,i(Y,x)};$$

$D(\widehat{\mathcal{L}}_z)=H^{\operatorname{Re}z}_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ при $\operatorname{Re}z>0$ и $D(\widehat{\mathcal{L}}_z)=L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ при $\operatorname{Re}z\leqslant 0$.

Л е м м а 2.5. *Для любого $p > 2$ существует число $C = C(\Lambda, p) > 0$ такое, что для всех $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\varphi \in H^1_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$*

$$\|V\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C\|V\|_{L^p(K)}\|\widehat{\mathcal{L}}_1\varphi\|_{L^2(K)}. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha > 1$, то для всех $W \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\varphi \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$

$$\|W\widehat{\mathcal{L}}_{-\alpha}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \|W\|_{L^2(K)} \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} (1+|Y|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\,|\varphi_Y| \leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant \|W\|_{L^2(K)} \biggl(\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} (1+|Y|^2)^{-\alpha}\biggr)^{\frac12} \biggl(\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} |\varphi_Y|^2\biggr)^{\frac12} = C_1\|W\|_{L^2(K)}\,\|\varphi\|_{L^2(K)},$$

где $C_1 = C_1(\Lambda,\alpha) > 0$. Пусть $V \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ (и $p > 2$). Для всех $\varphi \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ функция

$$\theta + i\tau \mapsto \mathcal{F}(\theta+i\tau) \doteq |V|^{\frac{p}{2}(\theta+i\tau)}\,\widehat{\mathcal{L}}_{-\alpha(\theta+i\tau)}\,\varphi \in L^2_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$$

является непрерывной и ограниченной при $\theta \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и аналитической при $\theta \in (0,1)$, $\tau \in \mathbb{R}$. При этом при всех $\tau \in \mathbb{R}$ (см. (2.8))

$$\|\mathcal{F}(i\tau)\|_{L^2(K)} = \|\varphi\|_{L^2(K)}, \quad \|\mathcal{F}(1+i\tau)\|_{L^2(K)} \leqslant C_1\|V\|^{\frac{p}{2}}_{L^p(K)}\|\varphi\|_{L^2(K)}.$$

Тогда в силу леммы Адамара о трех прямых (см., например, [26, дополнение к § IX.4]) для всех $\theta \in [0,1]$

$$\|\mathcal{F}(\theta)\|_{L^2(K)} \leqslant \Bigl(C_1\|V\|^{\frac{p}{2}}_{L^p(K)}\Bigr)^{\theta}\|\varphi\|_{L^2(K)}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) при $\theta = \frac{2}{p}$ и $\alpha = \theta^{-1} = \frac{p}{2}$ следует неравенство

$$\|V\widehat{\mathcal{L}}_{-1}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C_1^{\frac{2}{p}}\,\|V\|_{L^p(K)}\|\varphi\|_{L^2(K)}. \tag{2.10}$$

Если $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, то для функций

$$V_j(x) = \begin{cases} V(x), & \text{если } |V(x)| \leqslant j,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{2.11}$$

$j \in \mathbb{N}$, которые принадлежат $L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, справедлива оценка (2.10). Поэтому в пределе при $j \to +\infty$ также получаем оценку (2.10) для функций $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Неравенство (2.7) теперь следует из (2.10) $\bigl($при $C = C_1^{\frac{2}{p}}\bigr)$. □

Так как для функций $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\varphi \in H^1_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$

$$\|V\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \|(V-V_j)\varphi\|_{L^2(K)} + \|V_j\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C\,\|V-V_j\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{\mathcal{L}}_1\varphi\|_{L^2(K)} + j\,\|\varphi\|_{L^2(K)},$$

где функции V_j, $j \in \mathbb{N}$, определены в (2.11) и, следовательно, $\|V-V_j\|_{L^p(K)} \to 0$ при $j \to +\infty$, то потенциал $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ имеет нулевую грань относительно (самосопряженного) оператора $\widehat{\mathcal{L}}_1$. (Откуда также следует, что $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \subset \mathbb{L}^p_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 2$.)

Обозначим $\widetilde{K}\,' = \{\xi_1\widetilde{E}^1 + \xi_2\widetilde{E}^2 : -1 \leqslant \xi_j \leqslant 2, j = 1,2\}$. Из (2.7) следует, что для функции $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$, и любой функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, для которой $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ (то есть $\varphi(x) = 0$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^2\backslash K$),

$$\|V\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant C\,\|V\|_{L^p(K)}\biggl(\|\varphi\|_{L^2(K)} + \biggl\|\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\Bigr)\varphi\biggr\|_{L^2(K)}\biggr).$$

Тогда для любой функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, для которой $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \widetilde{K}'$,

$$\|V\varphi\|_{L^2(\widetilde{K}')} \leqslant C\,\|V\|_{L^p(K)} \left(\|\varphi\|_{L^2(\widetilde{K}')} + 3Q \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi \right\|_{L^2(\widetilde{K}')} \right). \tag{2.12}$$

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = 1$ при $x \in K$, $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \widetilde{K}'$, то из (2.12) для всех $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$, и всех $\varphi \in \mathcal{H}^1_B$ (при выбранном векторе $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$) вытекает оценка

$$\|V\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \|Vf\varphi\|_{L^2(\widetilde{K}')} \leqslant$$

$$\leqslant C\|V\|_{L^p(K)}\left(\|f\varphi\|_{L^2(\widetilde{K}')} + 3Q \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \varphi \right\|_{L^2(\widetilde{K}')} + 3Q \left\| f \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \varphi \right\|_{L^2(\widetilde{K}')} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|V\|_{L^p(K)} \left(C_2\,\|\varphi\|_{L^2(\widetilde{K}')} + 3Q \left\| \left(\left(k_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - i \left(k_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} - Bx_1 \right) \right) \varphi \right\|_{L^2(\widetilde{K}')} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 3QC\,\|V\|_{L^p(K)}\,(\,C_2\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B} + 3Q\,\|\widehat{Z}_+\varphi\|_{\mathcal{H}_B}\,),$$

где

$$C_2 = C_2(\Lambda, K, B) = 1 + 3Q \left(\max_{x \in \widetilde{K}'} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial f}{\partial x_2} \right| + B \max_{x \in \widetilde{K}'} |x_1| + \max_{k' \in 2\pi\widetilde{K}^*} |k'| \right)$$

(функция f зависит от K, а Q — от Λ и B). Так как $\|\widehat{Z}_+\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \geqslant \sqrt{2B}\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}$, $\varphi \in \mathcal{H}^1_B$, то справедлива также оценка

$$\|V\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C'(p)\,\|V\|_{L^p(K)}\|\widehat{Z}_+\varphi\|_{\mathcal{H}_B}, \quad \varphi \in \mathcal{H}^1_B, \tag{2.13}$$

где $C'(p) = C'(p;\Lambda,K,B) = 3QC((2B)^{-\frac{1}{2}}C_2 + 3Q) > 0$.

Из (2.13), в частности, следует, что при $m, V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$, матричные функции $m\widehat{\sigma}_3 + V\widehat{I}_2$ имеют нулевую грань относительно операторов $\widehat{D}_B(k)$, $k \in 2\pi\widetilde{K}^*$, при действии (как операторы) в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ (и, следовательно, имеют нулевую грань относительно оператора $\widehat{D}_B$ при действии в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$).

Определим самосопряженный оператор $\widehat{J} = \widehat{J}(k) = (\widehat{Z}_-\widehat{Z}_+)^{\frac{1}{2}}$, $D(\widehat{J}) = \mathcal{H}^1_B$. Справедливы равенства $\|\widehat{Z}_+\varphi\|_{\mathcal{H}_B} = \|\widehat{J}\varphi\|_{\mathcal{H}_B}$, $\varphi \in \mathcal{H}^1_B$, и $\|\widehat{Z}_-^{-1}\varphi\|_{\mathcal{H}_B} = \|\widehat{J}^{-1}\varphi\|_{\mathcal{H}_B}$, $\varphi \in \mathcal{H}_B$.

Л е м м а 2.6. *Для любых $p > 2$ и $\delta \in \bigl[0, 1 - \frac{2}{p}\bigr)$ существует число $C_{p,\delta} = C_{p,\delta}(\Lambda, K, B) > 0$ такое, что для всех $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и всех $\varphi \in \mathcal{H}_B$*

$$\|V\widehat{J}^{\delta-1}\varphi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C_{p,\delta}\,\|V\|_{L^p(K)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $p_1 \in (2, p]$ так, что $1 - \delta = p_1/p \in \bigl(\frac{2}{p}, 1\bigr]$. Пусть $V \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{H}_B$. Так как $|V|^{\frac{p}{p_1}} \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\||V|^{\frac{p}{p_1}}\|_{L^{p_1}(K)} = \|V\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^p(K)}$ (при $V(x) = 0$ также $|V(x)|^{\frac{p}{p_1}} = 0$), то из (2.13) следует оценка

$$\||V|^{\frac{p}{p_1}}\widehat{J}^{-1}\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C'(p_1)\,\|V\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^p(K)}\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{2.15}$$

Определим (как и при доказательстве леммы 2.5) при $\theta \in [0,1]$ и $\tau \in \mathbb{R}$ функцию

$$\theta + i\tau \mapsto \mathcal{G}(\theta + i\tau) = |V|^{\frac{p}{p_1}(\theta+\tau)}\widehat{J}^{-(\theta+i\tau)}\varphi \in \mathcal{H}_B,$$

где оператор $\widehat{J}^{-(\theta+i\tau)}$ ставит в соответствие функции

$$\varphi = \sum_{j\,\in\,\mathbb{Z}_+\,,\,n\,=\,1,\dots,P} c_{j,\,n}\Psi_n^{(j)} \in \mathcal{H}_B, \quad c_{j,\,n} \in \mathbb{C},$$

функцию

$$\widehat{J}^{-(\theta+i\tau)}\varphi = \sum_{j\,\in\,\mathbb{Z}_+\,,\,n\,=\,1,\dots,P} (2B(j+1))^{-\frac{1}{2}(\theta+i\tau)}\,c_{j,\,n}\Psi_n^{(j)} \in \mathcal{H}_B.$$

Функция $\theta + i\tau \mapsto \mathcal{G}(\theta + i\tau)$ является непрерывной и ограниченной при $\theta \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и аналитической при $\theta \in (0,1)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Так как $\|\widehat{J}^{-i\tau}\varphi\|_{\mathcal{H}_B} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ (и $\varphi \in \mathcal{H}_B$), то (см. (2.15)) при всех $\tau \in \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{G}(i\tau)\|_{\mathcal{H}_B} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}, \quad \|\mathcal{G}(1+i\tau)\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C'(p_1)\,\|V\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^p(K)}\,\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

В силу леммы Адамара о трех прямых [26]

$$\|\mathcal{G}(\theta)\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \bigl(C'(p_1)\|V\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^p(K)}\bigr)^{\theta}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_B}$$

для всех $\theta \in [0,1]$. Откуда при $\theta = \frac{p_1}{p} = 1-\delta$ следует оценка (2.14) (и $C_{p,\,\delta} = \bigl(C'(p_1)\bigr)^{1-\delta}$). Теперь для функции $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ определим функции $V_j \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ (см. (2.11)), $j \in \mathbb{N}$, для которых оценка (2.14) уже доказана. Но тогла в пределе при $j \to +\infty$ получаем, что $V\widehat{J}^{\delta-1}\varphi \in \mathcal{H}_B$ и (для всех $\varphi \in \mathcal{H}_B$) также справедлива оценка (2.14). $\square$

Выберем и зафиксируем число $\delta \in \bigl(0, 1-\frac{2}{p}\bigr)$ (зависящее от p).

Для всех $\tau \in [0,1)$ и $\chi \in \mathcal{H}_B$

$$\|\widehat{J}^{1-\tau}\widehat{Z}_-^{-1}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant 2^{\frac{1-\tau}{2}}\,\|\widehat{J}^{-\tau}\chi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{2.16}$$

Тогда в силу леммы 2.6 для всех $W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и $\chi \in \mathcal{H}_B$

$$\|W\widehat{Z}_-^{-1}\chi\|_{\mathcal{H}_B} = \|W\widehat{J}^{-1}(\widehat{J}\widehat{Z}_-^{-1})\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C_{p,\,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{-\delta}(\widehat{J}\widehat{Z}_-^{-1})\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \tag{2.17}$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-\delta}{2}}\,C_{p,\,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\widehat{J}^{-\delta}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant 2^{\frac{1-\delta}{2}}\,(2B)^{-\frac{\delta}{2}}\,C_{p,\,\delta}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\chi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Из леммы 2.6 также следует, что для любой функции $W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ оператор $\widehat{J}^{-1}W$ продолжается как ограниченный оператор с $\mathcal{H}^1_B$ на все пространство $\mathcal{H}_B$ и

$$\|\widehat{Z}_-^{-1}W\chi\|_{\mathcal{H}_B} = \|\widehat{J}^{-1}W\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C_{p,\,0}\,\|W\|_{L^p(K)}\,\|\chi\|_{\mathcal{H}_B}, \quad \chi \in \mathcal{H}_B$$

(нормы линейного ограниченного оператора $W\widehat{J}^{-1}$ и сопряженного к нему оператора $\widehat{J}^{-1}W$ совпадают).

Для любого вектора $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ существует унитарный оператор $\widehat{U}^{(Y)}\colon \mathcal{H}_B^{(0)} \to \mathcal{H}_B^{(0)}$ такой, что для любой функции $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$, для которой $\|\Psi\|_{\mathcal{H}_B} = 1$,

$$e^{\,i(Y,x)}\,\mathcal{H}_B[\Psi] = \mathcal{H}_B\,[\widehat{U}^{(Y)}\Psi]$$

(см. [13]). Более того [13], для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$ выполняются равенства

$$\left\{\begin{aligned} & e^{-i(Y,x)}\,\widehat{Z}_+^j\,\widehat{U}^{(Y)}\Psi = e^{-\frac{|Y|^2}{4B}}\,e^{-\frac{Y_1+iY_2}{2B}\,\widehat{Z}_+}\bigl(\widehat{Z}_+ + (Y_1-iY_2)\bigr)^j\,\Psi, \\ & e^{\,i(Y,x)}\,\widehat{Z}_+^j\,\Psi = e^{-\frac{|Y|^2}{4B}}\,e^{\,\frac{Y_1+iY_2}{2B}\,\widehat{Z}_+}\bigl(\widehat{Z}_+ - (Y_1-iY_2)\bigr)^j\,\widehat{U}^{(Y)}\Psi, \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

где $Y_j = (Y, e_j)$, $j = 1, 2$. В частности, для всех $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ и $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$

$$e^{i(Y,x)}\,\Psi = e^{-\frac{|Y|^2}{4B}}\,e^{\frac{Y_1+iY_2}{2B}\,\widehat{Z}_+}\,\widehat{U}^{(Y)}\Psi. \tag{2.19}$$

Если $\Psi_1,\ \Psi_2 \in \mathcal{H}_B^{(0)}$, то для всех $j_1,\ j_2 \in \mathbb{Z}_+$

$$(\Psi_1^{(j_1)}, \Psi_2^{(j_2)})_{\mathcal{H}_B} = \delta_{j_1 j_2}(\Psi_1, \Psi_2)_{\mathcal{H}_B}.$$

Поэтому из (2.18) следует

Л е м м а 2.7. *Для всех $\Psi_1,\ \Psi_2 \in \mathcal{H}_B^{(0)}$, всех $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ и всех $j_1,\ j_2 \in \mathbb{Z}_+$*

$$|(\Psi_1^{(j_1)}, e^{i(Y,x)}\Psi_2^{(j_2)})_{\mathcal{H}_B}| = \sqrt{\frac{j_1!}{j_2!}}\,\left(\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{\frac{1}{2}(\max\{j_1,j_2\}-\min\{j_1,j_2\})} e^{-\frac{|Y|^2}{4B}}\ \times \tag{2.20}$$

$$\times\ \Bigl|\ \sum_{s=0}^{\min\{j_1,j_2\}} C_{j_2}^s\,\frac{1}{(j_1-s)!}\left(-\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{\min\{j_1,j_2\}-s}\Bigr| \cdot |(\Psi_1, \widehat{U}^{(Y)}\Psi_2)_{\mathcal{H}_B}\,|$$

(где $C_{j_2}^s$ — биномиальные коэффициенты).

С л е д с т в и е 2.2. *Для всех $\Psi_1,\ \Psi_2 \in \mathcal{H}_B^{(0)}$, для которых $\|\Psi_1\|_{\mathcal{H}_B} = \|\Psi_2\|_{\mathcal{H}_B} = 1$, всех $Y \in 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ и всех $j_1,\ j_2 \in \mathbb{Z}_+$*

$$|(\Psi_1^{(j_1)}, e^{i(Y,x)}\Psi_2^{(j_2)})_{\mathcal{H}_B}| \leqslant \tag{2.21}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{j_1!\,j_2!}}\,\left(\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{\frac{1}{2}(\max\{j_1,j_2\}-\min\{j_1,j_2\})} e^{-\frac{|Y|^2}{4B}}\ \cdot\ \min\left\{\left(\frac{|Y|^2}{2B}+j_1\right)^{j_2}, \left(\frac{|Y|^2}{2B}+j_2\right)^{j_1}\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $j_1 \geqslant j_2$, то

$$\Bigl|\sum_{s=0}^{j_2} C_{j_2}^s\,\frac{1}{(j_1-s)!}\left(-\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{j_2-s}\Bigr| \leqslant \frac{1}{j_1!}\Bigl|\sum_{s=0}^{j_2} C_{j_2}^s\,j_1^s\left(-\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{j_2-s}\Bigr| \leqslant \frac{1}{j_1!}\left(\frac{|Y|^2}{2B}+j_1\right)^{j_2}.$$

С другой стороны, сделав в (2.20) замену $Y \mapsto -Y$, можно j_1 и j_2 поменять местами. Поэтому из (2.20) следует оценка (2.21). $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 0.1

Если в условиях леммы 2.4 функцию Φ_2 заменить на функцию $e^{i(\widetilde{Y},x)}\,\Phi_2$, где $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$ и $\Phi_2 \in \mathcal{H}_B^1$, и выбрать число $\zeta = -(\widetilde{Y}_1 - i\widetilde{Y}_2)$, то из леммы 2.4 следует лемма 3.1, которая в дальнейшем используется при доказательстве теоремы 0.1.

Л е м м а 3.1. *Если λ — собственное значение оператора* (0.1) *и $V \notin \mathfrak{M}_\Lambda^p(\mathcal{R}(\cdot))$, то для любого вектора $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^* \subseteq 2\pi\widetilde{\Lambda}^*$ найдутся функция $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$ и ненулевая функция $\Phi_2 \in \mathcal{H}_B^1$ такие, что*

$$\widehat{Z}_+\Phi_2 = e^{-i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi + e^{-i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2. \tag{3.1}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $p > 2$, $\delta = \delta(p) \in \bigl(0, 1 - \frac{2}{p}\bigr)$, $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$ и $L > 0$, $M > 0$. Тогда для любой функции $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\widetilde{R}_0(\varepsilon, V) = \widetilde{R}_0(\varepsilon, V; \Lambda, K, B, p; \mathcal{R}(\cdot), L, M) \geqslant \sqrt{\frac{B}{2}}$ такое, что для всех векторов $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, для которых $|\widetilde{Y}| \geqslant \widetilde{R}_0(\varepsilon, V)$, всех $\lambda \in [-L, L]$, всех функций $m(\cdot) \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, для которых $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$, и всех функций $\Phi \in \mathcal{H}_B$ выполняется оценка*

$$\|\widehat{J}^{-\delta}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \varepsilon\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $W \doteq \lambda + m - V$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, что

$$(2B)^{-\frac{\delta}{2}}\, C_{p,0}\, \varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{3.3}$$

Найдутся тригонометрические многочлены $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$ (из пространства $C^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$) и число $R \geqslant \sqrt{\frac{B}{2}}$ (зависящее от V и $\mathcal{R}(\cdot)$, но не от выбора функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$) такие, что $\mathcal{P}'_Y = \mathcal{P}''_Y = 0$ при $|Y| > R$ и $\|m - \mathcal{P}'\|_{L^p(K)} < \frac{\varepsilon_1}{2}$, $\|V - \mathcal{P}''\|_{L^p(K)} < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Если $\mathcal{P} \doteq \lambda + \mathcal{P}' - \mathcal{P}''$, то $\mathcal{P}_Y = 0$ при $|Y| > R$ и $\|W - \mathcal{P}\|_{L^p(K)} < \varepsilon_1$.

В дальнейшем предполагается, что $|\lambda| \leqslant L$, $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$, и удобно считать, что $\|V\|_{L^p(K)} \leqslant \mathfrak{V}$, где $\mathfrak{V} \geqslant 0$ (можно положить $\mathfrak{V} = \|V\|_{L^p(K)}$). Так как количество векторов $Y \in 2\pi\Lambda^*$, для которых $|Y| \leqslant R$, не превосходит $C_3(R+1)^2$, где $C_3 > 0$ — некоторое число, зависящее от Λ (при достаточно больших R число C_3 может быть выбрано сколь угодно близко к $\pi v(K)$), то

$$\|\mathcal{P}' - \mathcal{P}''\|_{L^\infty(K)} \leqslant \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*} (|\mathcal{P}'_Y| + |\mathcal{P}''_Y|) \leqslant C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{2}}\bigl(\|\mathcal{P}'\|_{L^2(K)} + \|\mathcal{P}''\|_{L^2(K)}\bigr) \leqslant \tag{3.4}$$

$$\leqslant C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{p}}\bigl(\|\mathcal{P}'\|_{L^p(K)} + \|\mathcal{P}''\|_{L^p(K)}\bigr) \leqslant C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{p}}\,(M + \mathfrak{V} + \varepsilon_1).$$

Выберем число $a \in \mathbb{Z}_+$ так, что

$$(2B(a+2))^{-\frac{\delta}{2}}\, C_{p,0}\, \bigl(M + \mathfrak{V} + \varepsilon_1 + (v(K))^{\frac{1}{p}}\, L\bigr) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,, \tag{3.5}$$

$$(2B)^{-\frac{\delta}{2}}\,(2B(a+2))^{-\frac{1}{2}}\,\Bigl(L + C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{p}}\,(M + \mathfrak{V} + \varepsilon_1)\Bigr) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,, \tag{3.6}$$

и, наконец, число $\widetilde{R}_0(\varepsilon, V) = \widetilde{R}_0(\varepsilon, V; \Lambda, K, B, p; \mathcal{R}(\cdot), L, M) > R$ выберем так, что при всех $r \geqslant \widetilde{R}_0(\varepsilon, V)$

$$4\,(2B)^{-\frac{\delta+1}{2}}\,\Bigl(L + C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{p}}\,(M + \mathfrak{V} + \varepsilon_1)\Bigr)\ \times \tag{3.7}$$

$$\times\ (a+1)^{\frac{3-\delta}{2}}\left(\frac{(r+R)^2}{2B}\right)^{\frac{a}{2}}\left(\frac{(r+R)^2}{2B} + a\right)^{a} e^{-\frac{(r-R)^2}{4B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Через $\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow} = \sum\limits_{j\,=\,0}^{a} \widehat{P}^{(j)}$ обозначим ортогональный проектор (в $\mathcal{H}_B$) на подпространство $\mathcal{H}_B^{(0)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_B^{(a)}$.

Для всех $\tau > \tau_1 \geqslant 0$ и $\chi \in \mathcal{H}_B$

$$\|\widehat{J}^{-\tau}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant (2B)^{-\frac{\tau-\tau_1}{2}}\,\|\widehat{J}^{-\tau_1}\chi\|_{\mathcal{H}_B}, \tag{3.8}$$

$$\|\widehat{J}^{-\tau}\widehat{P}^{(j)}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant (2B(j+1))^{-\frac{\tau}{2}}\,\|\chi\|_{\mathcal{H}_B}, \tag{3.9}$$

$$\|\widehat{J}^{-\tau}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(a)}_{\downarrow})\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant (2B(a+2))^{-\frac{\tau}{2}}\,\|\chi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{3.10}$$

Используя оценки (3.4), (3.8), (3.10), неравенство (2.14) из леммы 2.6 (при $\delta=0$) и условия (3.3), (3.5) и (3.6), при $\widetilde{Y}\in 2\pi\Lambda^*$, $|\widetilde{Y}|\geqslant \widetilde{R}_0(\varepsilon,V)>R$, получаем

$$\|\widehat{J}^{-\delta}We^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant \tag{3.11}$$

$$\leqslant \|\widehat{J}^{-\delta}(W-\mathcal{P})\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+\|\widehat{J}^{-\delta}(\widehat{I}_B-\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow})\mathcal{P}\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+$$

$$+\ \|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\mathcal{P}\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}(\widehat{I}_B-\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow})\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+\ \|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\mathcal{P}\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant (2B)^{-\frac{\delta}{2}}\,C_{p,0}\,\varepsilon_1\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+(2B(a+2))^{-\frac{\delta}{2}}\,C_{p,0}\,\big(\|W\|_{L^p(K)}+\varepsilon_1\big)\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+$$

$$+\,(2B)^{-\frac{\delta}{2}}\,(2B(a+2))^{-\frac{1}{2}}\,\|\mathcal{P}\|_{L^\infty(K)}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}+\ \|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\mathcal{P}\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\varepsilon}{4}+\|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\mathcal{P}\,e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Оценим последнее слагаемое в правой части неравенств (3.11). Воспользуемся оценкой (2.21) из следствия 2.2, а также неравенствами (3.4), (3.9) и условием (3.7):

$$\|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\mathcal{P}e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}|\mathcal{P}_Y|\cdot\|\widehat{J}^{-\delta}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}e^{i(\widetilde{Y}+Y,x)}\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(a)}_{\downarrow}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant (2B)^{-\frac{\delta}{2}}\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}|\mathcal{P}_Y|\cdot\sum_{j_1,\,j_2\,=\,0}^{a}(j_1+1)^{-\frac{\delta}{2}}\cdot\|\widehat{P}^{(j_1)}e^{i(\widetilde{Y}+Y,x)}\widehat{P}^{(j_2)}\widehat{J}^{-1}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant (2B)^{-\frac{\delta}{2}}\bigg(\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}|\mathcal{P}_Y|\bigg)\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}\bigg)^{\frac{a}{2}}\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}+a\bigg)^{a}e^{-\frac{(|\widetilde{Y}|-R)^2}{4B}}\ \times$$

$$\times\ \sum_{j_1,\,j_2\,=\,0}^{a}(j_1+1)^{-\frac{\delta}{2}}\,\|\widehat{J}^{-1}\widehat{P}^{(j_2)}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant (2B)^{-\frac{\delta+1}{2}}\bigg(\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*}|\mathcal{P}_Y|\bigg)\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}\bigg)^{\frac{a}{2}}\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}+a\bigg)^{a}e^{-\frac{(|\widetilde{Y}|-R)^2}{4B}}\ \times$$

$$\times\ \bigg(\sum_{j_1,\,j_2\,=\,0}^{a}(j_1+1)^{-\frac{\delta}{2}}\,(j_2+1)^{-\frac{1}{2}}\bigg)\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant$$

$$\leqslant 4\,(2B)^{-\frac{\delta+1}{2}}\,\big(L+C_3^{\frac{1}{2}}(R+1)(v(K))^{-\frac{1}{p}}\,(M+\mathfrak{V}+\varepsilon_1)\big)\ \times$$

$$\times\ (a+1)^{\frac{3-\delta}{2}}\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}\bigg)^{\frac{a}{2}}\bigg(\frac{(|\widetilde{Y}|+R)^2}{2B}+a\bigg)^{a}e^{-\frac{(|\widetilde{Y}|-R)^2}{4B}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Из (3.11) и полученного неравенства следует (3.2). теорема 3.1 доказана.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть $p>2$, $\mathcal{R}(\cdot)\in\mathfrak{R}$ и $L>0$, $M>0$. Тогда для любой функции $V\in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ найдется число $R_0=R_0(V)>0$ такое, что для всех векторов $\widetilde{Y}\in 2\pi\Lambda^*$, для которых $|\widetilde{Y}|\geqslant R_0$, всех $\lambda\in[-L,L]$, всех функций $m(\cdot)\in\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, для которых $\|m\|_{L^p(K)}\leqslant M$, и всех функций $\Phi\in\mathcal{H}^1_B$*

$$\|(\lambda-m-V)\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda+m-V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi\|_{\mathcal{H}_B}\leqslant\frac{1}{2}\,\|\widehat{Z}_+\Phi\|_{\mathcal{H}_B}. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 3.1 будем считать, что $\|V\|_{L^p(K)} \leqslant \mathfrak{V}$, где $\mathfrak{V} > 0$. Для всех $\chi \in \mathcal{H}_B$ (см. (2.17) и (3.8))

$$\|(\lambda - m - V)\widehat{Z}_-^{-1}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant |\lambda| \cdot \|\widehat{J}^{-1}\chi\|_{\mathcal{H}_B} + \|(m+V)\widehat{Z}_-^{-1}\chi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C_4 \|\widehat{J}^{-\delta}\chi\|_{\mathcal{H}_B},$$

где $C_4 = (2B)^{-\frac{1-\delta}{2}} L + 2^{\frac{1-\delta}{2}} C_{p,\delta}(M + \mathfrak{V})$. Выберем число $\varepsilon = (2C_4)^{-1}$ и соответствующее ему число $R_0 \doteq \widetilde{R}_0(\varepsilon, V)$ из теоремы 3.1, из которой следует, что при всех $\Phi' \in \mathcal{H}_B$ и при $|\widetilde{Y}| \geqslant R_0$

$$\|(\lambda - m - V)\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi'\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \tag{3.13}$$

$$\leqslant C_4 \|\widehat{J}^{-\delta}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\widehat{J}^{-1}\Phi'\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \varepsilon C_4 \|\Phi'\|_{\mathcal{H}_B} = \frac{1}{2}\|\Phi'\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Тогда для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}_B^1$, положив $\Phi' = \widehat{J}\Phi \in \mathcal{H}_B$ (и принимая во внимание равенство $\|\widehat{J}\Phi\|_{\mathcal{H}_B} = \|\widehat{Z}_+\Phi\|_{\mathcal{H}_B}$), из (3.13) получаем неравенство (3.12). Теорема 3.2 доказана. $\square$

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть $p > 2$, $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$ и $L > 0$, $M > 0$. Тогда для любой функции $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ существует число $R_0 = R_0(V) > 0$ (определяемое в теореме 3.2) такое, что если для ненулевой функции $\Phi_2 \in \mathcal{H}_B^1$ и функции $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$ выполняется равенство* (3.1) *при $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, $|\widetilde{Y}| \geqslant R_0$, и если $\lambda \in [-L, L]$, $m(\cdot) \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$, то*

$$\sqrt{2B}\,\|\Phi_2\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \|\widehat{Z}_+\Phi_2\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant 2\,\|(\lambda - m - V)\Psi\|_{\mathcal{H}_B}.$$

Поэтому функция Ψ также ненулевая.

В условиях следствия 3.1 можно считать, что $\|\Psi\|_{\mathcal{H}_B} = 1$. Тогда (предполагая, что $\|V\|_{L^p(K)} \leqslant \mathfrak{V}$ для некоторого $\mathfrak{V} > 0$)

$$\|\widehat{Z}_+\Phi_2\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant \tag{3.14}$$

$$\leqslant 2\,(v(K))^{\frac{1}{2}}\big(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\big)\|\Psi\|_{L^\infty(K)} \leqslant 2\,C_5\big(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\big),$$

где $C_5 = C_5(\Lambda, B, K) = (v(K))^{\frac{1}{2}} \max\limits_{\Psi' \in \mathcal{H}_B^{(0)}:\, \|\Psi'\|_{\mathcal{H}_B} = 1} \|\Psi'\|_{L^\infty(K)}$.

Зафиксируем некоторое число $\theta \in (0,1)$.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть $p > 2$, $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$, $L > 0$, $M > 0$, $\mathfrak{V} > 0$ и пусть $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, $\|V\|_{L^p(K)} \leqslant \mathfrak{V}$, $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$ и $\lambda \in [-L, L]$. Предположим, что для ненулевой функции $\Phi_2 \in \mathcal{H}_B^1$ и функции $\Psi \in \mathcal{H}_B^{(0)}$ справедливо равенство* (3.1) *при $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, $|\widetilde{Y}| \geqslant R_0$ (где число $R_0 > 0$ определяется в теореме 3.2). Тогда для любого $b \in \mathbb{N}$*

$$|m_{-\widetilde{Y}} + V_{-\widetilde{Y}}| \leqslant \tag{3.15}$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1 C_6(b)\bigg(L\,e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}|^2}{4B}} + \sum_{Y \in 2\pi\Lambda^* \setminus \{-\widetilde{Y}\}} |m_Y + V_Y|\,e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}}\bigg) + \widetilde{C}_2(b+2)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

где $C_6(b) = C_6(b;\theta,B) \geqslant 1$ и числа $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2 > 0$ зависят от Λ, K, B, p, L, M и $\mathfrak{V}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|\Psi\|_{\mathcal{H}_B} = 1$. Так как $\widehat{Z}_- = \widehat{Z}_+^*$ и $\widehat{Z}_-\Psi = 0$, то из (3.1) следует равенство

$$-\big(e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \Psi\big)_{\mathcal{H}_B} = \big(e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big)_{\mathcal{H}_B}. \tag{3.16}$$

Оценим вначале выражение в правой части равенства (3.16) (см. (2.16)):

$$\big|\big(e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big)_{\mathcal{H}_B}\big| =$$

$$= \big|\big(\widehat{J}^{\delta-1}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(0)})e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \widehat{J}^{1-\delta}\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big)_{\mathcal{H}_B}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \big\|\widehat{J}^{\delta-1}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(0)})e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi\big\|_{\mathcal{H}_B} \cdot \big\|\widehat{J}^{1-\delta}\widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-\delta}{2}}\,\big\|\widehat{J}^{\delta-1}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(0)})e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi\big\|_{\mathcal{H}_B} \cdot \big\|\widehat{J}^{-\delta}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big\|_{\mathcal{H}_B}.$$

При этом в силу теоремы 3.1 при $\varepsilon = (2C_4)^{-1}$ (для этого числа выбиралось число $R_0 = \widetilde{R}_0(\varepsilon, V)$ в теореме 3.2), следствия 3.1 и оценки (3.14)

$$\big\|\widehat{J}^{-\delta}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\big\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant$$

$$\leqslant (2C_4)^{-1}\|\widehat{J}\Phi_2\|_{\mathcal{H}_B} = (2C_4)^{-1}\|\widehat{Z}_+\Phi_2\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant C_4^{-1}C_5\big(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\big)$$

и (в силу (3.9), (3.10) и следствия 2.2) при любом $b \in \mathbb{N}$

$$\big\|\widehat{J}^{\delta-1}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(0)})e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi\big\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\|\widehat{J}^{\delta-1}\Big(\sum_{j=1}^{b}\widehat{P}^{(j)}\Big)e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi\Big\|_{\mathcal{H}_B} + \big\|\widehat{J}^{\delta-1}(\widehat{I}_B - \widehat{P}^{(b)}_{\downarrow})e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi\big\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant$$

$$\leqslant (4B)^{\frac{\delta-1}{2}}L\left(\sum_{j=1}^{b}\frac{1}{j!}\left(\frac{|\widetilde{Y}|^2}{2B}\right)^j\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{|\widetilde{Y}|^2}{4B}} +$$

$$+ (4B)^{\frac{\delta-1}{2}}\sum_{Y\in 2\pi\Lambda^*\setminus\{-\widetilde{Y}\}}|m_Y + V_Y|\cdot\left(\sum_{j=1}^{b}\frac{1}{j!}\left(\frac{|\widetilde{Y}+Y|^2}{2B}\right)^j\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}} +$$

$$+\ (2B(b+2))^{\frac{\delta-1}{2}}\,\|(\lambda - m - V)\Psi\|_{\mathcal{H}_B} \leqslant$$

$$\leqslant (4B)^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{e}\,L\left(1 + \left(\frac{|\widetilde{Y}|^2}{2B}\right)^{\frac{b}{2}}\right)e^{-\frac{|\widetilde{Y}|^2}{4B}} +$$

$$+ (4B)^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{e}\sum_{Y\in 2\pi\Lambda^*\setminus\{-\widetilde{Y}\}}|m_Y + V_Y|\cdot\left(1 + \left(\frac{|\widetilde{Y}+Y|^2}{2B}\right)^{\frac{b}{2}}\right)e^{-\frac{|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}} +$$

$$+\ C_5\big(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\big)(2B(b+2))^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

Для всех $Y \in 2\pi\Lambda^*$ и всех $b \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \left(\frac{|Y|^2}{2B}\right)^{\frac{b}{2}}\right)e^{-\frac{|Y|^2}{4B}} \leqslant C_6(b)e^{-\frac{\theta|Y|^2}{4B}},$$

где $C_6(b) = C_6(b;\theta,B) \geqslant 1$ (и $(0,1) \ni \theta$ — некоторое фиксированное число). Поэтому

$$\bigl|\bigl(e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \widehat{Z}_-^{-1}(\lambda + m - V)e^{i(\widetilde{Y},x)}\Phi_2\bigr)_{\mathcal{H}_B}\bigr| \leqslant \tag{3.17}$$

$$\leqslant (2B)^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{e}\,C_4^{-1}C_5C_6(b)\bigl(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\bigr)\times$$

$$\times\Biggl(L\,e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}|^2}{4B}} + \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*\,\setminus\,\{-\widetilde{Y}\}}|m_Y + V_Y|\,e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}}\Biggr) +$$

$$+\ C_4^{-1}C_5^2\bigl(L + (v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V})\bigr)^2(B(b+2))^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

С другой стороны (см. (2.19))

$$\bigl|\bigl(e^{i(\widetilde{Y},x)}(\lambda - m - V)\Psi, \Psi\bigr)_{\mathcal{H}_B}\bigr| \geqslant \tag{3.18}$$

$$\geqslant |m_{-\widetilde{Y}} + V_{-\widetilde{Y}}| - L\,e^{-\frac{|\widetilde{Y}|^2}{4B}} - \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*\,\setminus\,\{-\widetilde{Y}\}}|m_Y + V_Y|\,e^{-\frac{|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}}.$$

Неравенство (3.15) теперь следует из (3.16), (3.17) и (3.18). Теорема 3.3 доказана.

Справедлива простая

Л е м м а 3.2. *Для всех* $R \geqslant 0$ (*и* $\theta \in (0,1]$)

$$\sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\ |Y|\,>\,R} e^{-\frac{\theta|Y|^2}{4B}} \leqslant C''(\Lambda)(B\theta^{-1} + R)e^{-\frac{\theta R^2}{4B}}, \tag{3.19}$$

где число $C'' > 0$ *зависит только от* Λ.

Пусть $L > 0$, $M > 0$, $\mathfrak{V} > 0$, $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)$ (и при этом решетка Λ (с элементарной ячейкой K), функция $\mathcal{R}(\cdot)$ и числа p, $\delta = \delta(p)$ и $\theta \in (0,1)$ фиксируются). Через $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $\|V\|_{L^p(K)} \leqslant \mathfrak{V}$, для которых найдется функция $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$, такая, что для всех $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, для которых $|\widetilde{Y}| \geqslant n$, и всех $b \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство (3.15).

Т е о р е м а 3.4. *Множества* $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$, $n \in \mathbb{N}$, *нигде не плотны в* $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{C}(b, \widetilde{Y}, B; m, V)$ правую часть неравенства (3.15). Пусть $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $\|V\|_{L^p(K)} < \mathfrak{V}$. Выберем любое число $\varepsilon_1 \in (0,1]$, для которого

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{5}\Bigl(v(K))^{-\frac{1}{p}}(\mathfrak{V} - \|V\|_{L^p(K)}\Bigr).$$

Число $b \in \mathbb{N}$ определим так, что

$$\widetilde{C}_2(b+2)^{\frac{\delta-1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{8}\,.$$

Пусть ε_2, $\varepsilon_3 \in \bigl(0, \frac{\varepsilon_1}{2}\bigr)$ — числа, для которых

$$\widetilde{C}_1C_6(b)(v(K))^{-\frac{1}{p}}C''(\Lambda)B\theta^{-1}\varepsilon_2 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{16}\,, \quad \bigl(1 + \widetilde{C}_1C_6(b)C''(\Lambda)B\theta^{-1}\bigr)\varepsilon_3 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{16}\,.$$

Для $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$ и $R \geqslant 0$ обозначим

$$\mathcal{P}_\pm(\widetilde{Y}, R; V) = \sum_{Y\,\in\,2\pi\Lambda^*:\ |\widetilde{Y}\,\mp\,Y|\,\leqslant\,R} V_Y\,e^{i(Y,x)}$$

(так как $V_{-Y} = \overline{V_Y}$ для всех $Y \in 2\pi\Lambda^*$, то $\|\mathcal{P}_+(\widetilde{Y}, R; V)\|_{L^p(K)} = \|\mathcal{P}_-(\widetilde{Y}, R; V)\|_{L^p(K)}$), и вектор $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$ и число $R > 0$ выберем так, что

(1) $|\widetilde{Y}| \geqslant n$,

(2) $R \leqslant \frac{1}{2}\,|\widetilde{Y}|$,

(3) $\mathcal{R}(\varepsilon_3) < \frac{1}{2}\,|\widetilde{Y}|$,

(4) $\|\mathcal{P}_\pm(\widetilde{Y}, R; V)\|_{L^p(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1$,

(5) $\widetilde{C}_1 C_6(b) L\, e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}|^2}{4B}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{8}$,

(6) $\widetilde{C}_1 C_6(b)\big((v(K))^{-\frac{1}{p}}(2M + \mathfrak{V}) + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\big)(B\theta^{-1} + R)\, e^{-\frac{\theta R^2}{4B}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{8}$.

Определим функцию $V^{(0)} \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, имеющую коэффициенты Фурье $V^{(0)}_{-\widetilde{Y}} = V^{(0)}_{\widetilde{Y}} = \varepsilon_1$, $V^{(0)}_Y = 0$, если $0 < |\widetilde{Y} + Y| \leqslant R$ или $0 < |\widetilde{Y} - Y| \leqslant R$, и $V^{(0)}_Y = V_Y$, если $|\widetilde{Y} + Y| > R$ и $|\widetilde{Y} - Y| > R$. Справедлива оценка

$$\|V - V^{(0)}\|_{L^p(K)} \leqslant 2\,(v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1 + 2\,\|\mathcal{P}_+(\widetilde{Y}, R; V)\|_{L^p(K)} \leqslant 4\,(v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1$$

(и, следовательно, $\|V^{(0)}\|_{L^p(K)} \leqslant \|V\|_{L^p(K)} + 4(v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1 \leqslant \mathfrak{V} - (v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1$). Пусть $W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — любая функция, для которой $\|W\|_{L^p(K)} < (v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_2$. Обозначим $V' + V^{(0)} + W$. Тогда

$$\|V - V'\|_{L^p(K)} \leqslant \|V - V^{(0)}\|_{L^p(K)} + \|W\|_{L^p(K)} < (v(K))^{\frac{1}{p}}(4\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < 5(v(K))^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon_1 \leqslant \mathfrak{V} - \|V\|_{L^p(K)}$$

и $\|V'\|_{L^p(K)} < \mathfrak{V}$. Пусть $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ — любая функция, для которой $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$. Для всех $Y \in 2\pi\Lambda^*$

$$|V_Y| \leqslant (v(K))^{-\frac{1}{p}}\,\mathfrak{V}, \quad |m_Y| \leqslant (v(K))^{-\frac{1}{p}} M, \quad |W_Y| \leqslant \varepsilon_2\,.$$

Кроме того, если $Y \in 2\pi\Lambda^*$ и $|\widetilde{Y} + Y| \leqslant R$, то $|Y| > \mathcal{R}(\varepsilon_2)$ и, следовательно, существует тригонометрический многочлен $\mathcal{P}^{(\varepsilon_3)} \in C^\infty_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которого $\mathcal{P}^{(\varepsilon_3)}_Y = 0$ и $\|m - \mathcal{P}^{(\varepsilon_3)}\|_{L^p(K)} < \varepsilon_3$. Тогда также

$$|m_Y| \leqslant (v(K))^{-\frac{1}{p}} \|m - \mathcal{P}^{(\varepsilon_3)}\|_{L^p(K)} < (v(K))^{-\frac{1}{p}}\,\varepsilon_3\,.$$

В результате, учитывая (3.19), для любой функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$, и при выбранных векторе $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$ (для которого $|\widetilde{Y}| \geqslant n$) и числе $b \in \mathbb{N}$ получаем оценки

$$\mathcal{C}(b, \widetilde{Y}, B; m, V') \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1 C_6(b)\Bigg(L\, e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}|^2}{4B}} + \sum_{Y \in 2\pi\Lambda^*:\ |\widetilde{Y}+Y| > R,\ |\widetilde{Y}-Y| > R} |m_Y + V_Y + W_Y|\, e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}} +$$

$$+ \sum_{Y \in 2\pi\Lambda^*:\ |\widetilde{Y}-Y| \leqslant R} |m_Y + V^{(0)}_Y + W_Y|\, e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}} + \sum_{Y \in 2\pi\Lambda^*:\ 0 < |\widetilde{Y}+Y| \leqslant R} |m_Y + W_Y|\, e^{-\frac{\theta|\widetilde{Y}+Y|^2}{4B}}\Bigg) +$$

$$+ \widetilde{C}_2(b+2)^{\frac{\delta-1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{8} + \widetilde{C}_1 C_6(b)\Bigg(\big((v(K))^{-\frac{1}{p}}(M + \mathfrak{V}) + \varepsilon_2\big)C''(\Lambda)(B\theta^{-1} + R)e^{-\frac{\theta R^2}{4B}} +$$

$$+ \big((v(K))^{-\frac{1}{p}}M + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\big)C''(\Lambda)(B\theta^{-1} + R)e^{-\frac{\theta R^2}{4B}} + \big((v(K))^{-\frac{1}{p}}\varepsilon_3 + \varepsilon_2\big)C''(\Lambda)B\theta^{-1}\Bigg) + \frac{\varepsilon_1}{8} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\varepsilon_1}{8} + \left(\frac{\varepsilon_1}{8} - (v(K))^{-\frac{1}{p}}\,\varepsilon_3\right) = \frac{\varepsilon_1}{2} - (v(K))^{-\frac{1}{p}}\,\varepsilon_3 < \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - (v(K))^{-\frac{1}{p}}\,\varepsilon_3 \leqslant$$

$$\leqslant |m_{-\widetilde{Y}} + V^{(0)}_{-\widetilde{Y}} + W_{-\widetilde{Y}}| = |m_{-\widetilde{Y}} + V'_{-\widetilde{Y}}|,$$

то есть неравенство (3.15) для функции $V' = V^{(0)} + W$, $\|V'\|_{L^p(K)} < \mathfrak{V}$, не выполняется при выбранных векторе $\widetilde{Y} \in 2\pi\Lambda^*$, для которого $|\widetilde{Y}| \geqslant n$, и числе $b \in \mathbb{N}$ и для всех функций $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, для которых $\|m\|_{L^p(K)} \leqslant M$. Поэтому все функции $V' = V^{(0)} + W$, где $W \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $\|W\|_{L^p(K)} < (v(K))^{\frac{1}{p}}\varepsilon_2$, не принадлежат $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$. Так как $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ — произвольная функция, для которой $\|V\|_{L^p(K)} < \mathfrak{V}$, а числа ε_1 и ε_2 можно выбирать сколь угодно малыми (и, кроме того, функции $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, для которых $\|V\|_{L^p(K)} = \mathfrak{V}$, образуют нигде не плотное множество в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$), то множества $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ нигде не плотны в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Теорема 3.4 доказана.

Теорема 3.5. *Для любой решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и любых $p > 2$ и $\mathcal{R}(\cdot) \in \mathfrak{R}$ множество потенциалов $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ таких, что для некоторых функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ у оператора* (0.1) *имеются собственные значения, является множеством первой категории в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathcal{O}}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$ — объединение всех множеств $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$ при $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ и $L, M, \mathfrak{V}, n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 3.4 $\widetilde{\mathcal{O}}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$ — множество первой категории в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Если $\mathbb{V}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$ — множество потенциалов $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$, для которых оператор (0.1) имеет собственные значения для некоторых функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, и $V \in \mathbb{V}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$, то в силу леммы 3.1 и теоремы 3.2 $V \in \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(L, M, \mathfrak{V}; n)$ для некоторых $L, M, \mathfrak{V}, n \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Поэтому $\mathbb{V}^+(p, \mathcal{R}(\cdot)) \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$ и, следовательно, $\mathbb{V}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))$ — также множество первой категории в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Теорема 3.5 доказана.

Доказательство теоремы 0.1. Обозначим $\mathcal{O}^+ = L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \setminus \bigl(\mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot)) \cup \mathbb{V}^+(p, \mathcal{R}(\cdot))\bigr)$. В силу теоремы 3.5 для любого потенциала $V \in \mathcal{O}^+$ и любых функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ в спектре оператора (0.1) нет собственных значений. В силу леммы 2.3 и теоремы 3.5 множество $\mathcal{O}^+$ является множеством второй категории в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Случай $\eta \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$ сводится к случаю $\eta \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, так как при $\eta \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$ для любой собственной функции Φ оператора (0.1) функция $\widehat{\sigma}_2\overline{\Phi}$ была бы собственной функцией оператора (0.1) (с тем же собственным значением) при заменах $B \mapsto -B$ и $m \mapsto -m$. Поэтому также существует множество второй категории $\mathcal{O}^-$ в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ такое, что для любого потенциала $V \in \mathcal{O}^-$ и любых функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$ в спектре оператора (0.1) нет собственных значений. Множество $\mathcal{O} = \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+$ является множеством второй категории в $L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. При этом для любого потенциала $V \in \mathcal{O}$ и любых функции $m \in \mathfrak{M}^p_\Lambda(\mathcal{R}(\cdot))$ и однородного магнитного поля B с потоком $\eta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ в спектре оператора (0.1) отсутствуют собственные значения (следовательно, спектр абсолютно непрерывен). Это завершает доказательство теоремы 0.1, так как при $B = 0$ спектр оператора (0.1) абсолютно непрерывен при любых m, $V \in L^p_\Lambda(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p > 2$ [2,7,24].

Финансирование. Работа поддержана программой финансирования AAAA-A16-116021010082-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Дирака // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118. № 1. С. 3–14. https://doi.org/10.4213/tmf682
2. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous // Integral Equations and Operator Theory. 1999. Vol. 34. Issue 4. P. 377–395. https://doi.org/10.1007/BF01272881

3. Лапин И.С. Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шрёдингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда // Пробл. мат. анал.: сб. статей. СПб: СПбГУ, 2001. Вып. 22. С. 74–105.
4. Данилов Л.И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шрёдингера и Дирака. II / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 2001. 60 с. Деп. в ВИНИТИ 09.04.2001, № 916-В2001.
5. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98. http://mi.mathnet.ru/iimi252
6. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шредингера // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84. http://mi.mathnet.ru/iimi235
7. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 47–80. http://mi.mathnet.ru/aa668
8. Rabi I.I. Das freie elektron im homogenen magnetfeld nach der Diracschen theorie // Zeitschrift für Physik. 1928. Vol. 49. Issue 7–8. P. 507–511. https://doi.org/10.1007/BF01333634
9. Johnson M.H., Lippmann B.A. Motion in a constant magnetic field // Physical Review. 1949. Vol. 76. Issue 6. P. 828–832. https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.828
10. Гейлер В.А. Двумерный оператор Шрёдингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1–48. http://mi.mathnet.ru/aa252
11. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
12. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential // Mathematische Annalen. 2010. Vol. 347. No. 3. P. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
13. Данилов Л.И. О спектре двумерного оператора Шрёдингера с однородным магнитным полем и периодическим электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 51. С. 3–41. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01
14. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36. http://mi.mathnet.ru/aa1018
15. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шредингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. общества. 2001. Т. 9. С. 199–233.
16. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459. https://doi.org/10.4213/tmf160
17. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320. http://mi.mathnet.ru/znsl912
18. Данилов Л.И. О спектре двумерного обобщенного периодического оператора Шрёдингера. II // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 3–28. https://doi.org/10.20537/vm140201
19. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. No. 2. P. 537–569. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-01-02878-1
20. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bull. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 53. No. 3. P. 343–414. https://doi.org/10.1090/bull/1528
21. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8573-7

22. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.1996, № 3855-В96.
23. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 248–307. http://mi.mathnet.ru/znsl711
24. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1992. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 10.07.1992, № 2252-В92.
25. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
26. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию 24.10.2019

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: lidanilov@mail.ru

Цитирование: Л. И. Данилов. О спектре релятивистского гамильтониана Ландау с периодическим электрическим потенциалом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 3–26.

L. I. Danilov

On the spectrum of a relativistic Landau Hamiltonian with a periodic electric potential

Keywords: two-dimensional Dirac operator, periodic electric potential, homogeneous magnetic field, spectrum.

MSC2010: 35P05

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-01

This paper is concerned with a two-dimensional Dirac operator $\widehat{\sigma}_1\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_1}\bigr)+\widehat{\sigma}_2\bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_2}-Bx_1\bigr)+m\widehat{\sigma}_3+V\widehat{I}_2$ with a uniform magnetic field B where $\widehat{\sigma}_j$, $j=1,2,3$, are the Pauli matrices and $\widehat{I}_2$ is the unit 2×2-matrix. The function m and the electric potential V belong to the space $L^p_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ of Λ-periodic functions from the $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $p>2$, and we suppose that for the magnetic flux $\eta=(2\pi)^{-1}Bv(K)\in\mathbb{Q}$ where $v(K)$ is the area of an elementary cell K of the period lattice Λ. For any nonincreasing function $(0,1]\ni\varepsilon\mapsto\mathcal{R}(\varepsilon)\in(0,+\infty)$ for which $\mathcal{R}(\varepsilon)\to+\infty$ as $\varepsilon\to+0$ let $\mathfrak{M}^p_{\Lambda}(\mathcal{R}(\cdot))$ be the set of functions $m\in L^p_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ such that for every $\varepsilon\in(0,1]$ there exists a real-valued Λ-periodic trigonometric polynomial $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}$ such that $\|m-\mathcal{P}^{(\varepsilon)}\|_{L^p(K)}<\varepsilon$ and for Fourier coefficients $\mathcal{P}^{(\varepsilon)}_Y=0$ provided $|Y|>\mathcal{R}(\varepsilon)$. It is proved that for any function $\mathcal{R}(\cdot)$ in question there is a dense G_δ-set $\mathcal{O}$ in the Banach space $(L^p_{\Lambda}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}),\|\cdot\|_{L^p(K)})$ such that for every electric potential $V\in\mathcal{O}$, for every function $m\in\mathfrak{M}^p_{\Lambda}(\mathcal{R}(\cdot))$, and for every uniform magnetic field B with the flux $\eta\in\mathbb{Q}$ the spectrum of the Dirac operator is absolutely continuous.

Funding. The study was funded by the financing program AAAA-A16-116021010082-8.

REFERENCES

1. Danilov L.I. On the spectrum of the two-dimensional periodic Dirac operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1999, vol. 118, no. 1, pp. 1–11. https://doi.org/10.1007/BF02557191
2. Birman M.Sh., Suslina T.A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous, *Integral Equations and Operator Theory*, 1999, vol. 34, issue 4, pp. 377–395. https://doi.org/10.1007/BF01272881
3. Lapin I.S. Absolute continuity of the spectra of two-dimensional periodic magnetic Schrödinger operator and Dirac operator with potentials in the Zygmund class, *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 106, no. 3, pp. 2952–2974. https://doi.org/10.1023/A:1011315420866
4. Danilov L.I. *On absolute continuity of the spectrum of periodic Schrödinger and Dirac operators. II*, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 2001, 60 p. Deposited in VINITI 09.04.2001, no. 916-B2001 (in Russian).
5. Danilov L.I. On the spectra of two-dimensional periodic Schrödinger and Dirac operators, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2002, issue 3 (26), pp. 3–98 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi252
6. Danilov L.I. On absence of eigenvalues in the spectra of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2004, issue 1 (29), pp. 49–84 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi235
7. Danilov L.I. Absence of eigenvalues for the generalized two-dimensional periodic Dirac operator, *St. Petersburg Math. J.*, 2006, vol. 17, no. 3, pp. 409–433. https://doi.org/10.1090/S1061-0022-06-00911-3
8. Rabi I.I. Das freie elektron im homogenen magnetfeld nach der Diracschen theorie, *Zeitschrift für Physik*, 1928, vol. 49, issue 7–8, pp. 507–511. https://doi.org/10.1007/BF01333634
9. Johnson M.H., Lippmann B.A. Motion in a constant magnetic field, *Physical Review*, 1949, vol. 76, issue 6, pp. 828–832. https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.828
10. Geiler V.A. The two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and its perturbations by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Math. J.*, 1992, vol. 3, no. 3, pp. 489–532.
11. Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger operators: With applications to quantum mechanics and global geometry*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.

Translated under the title *Operatory Shredingera s prilozheniyami k kvantovoi mekhanike i global'noi geometrii*, Moscow: Mir, 1990.
12. Klopp F. Absolute continuity of the spectrum of a Landau Hamiltonian perturbed by a generic periodic potential, *Mathematische Annalen*, 2010, vol. 347, no. 3, pp. 675–687. https://doi.org/10.1007/s00208-009-0452-3
13. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and a periodic electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 51, pp. 3–41 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-51-01
14. Birman M.Sh., Suslina T.A. Absolute continuity of the two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector-valued potential, *St. Petersburg Math. J.*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601.
15. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *American Mathematical Society Translations: Series 2*, 2003, pp. 191–229. https://doi.org/10.1090/trans2/209/09
16. Danilov L.I. The spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403. https://doi.org/10.1023/A:1022605623235
17. Shterenberg R.G. Absolute continuity of spectra of two-dimensional periodic Schrödinger operators with strongly subordinate magnetic potentials, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 129, no. 4, pp. 4087–4109. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0344-3
18. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator. II, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 2, pp. 3–28 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140201
19. Kuchment P., Levendorskiî S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02878-1
20. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 343–413. https://doi.org/10.1090/bull/1528
21. Kuchment P. *Floquet theory for partial differential equations*, Basel: Birkhäuser, 1993. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8573-7
22. Danilov L.I. *The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. VI*, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1996, 45 p. Deposited in VINITI 31.12.1996, no. 3855-B96 (in Russian).
23. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in spectra of analytic direct integrals, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 136, no. 2, pp. 3826–3831. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0203-x
24. Danilov L.I. *The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. III*, Physical-Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1992, 33 p. Deposited in VINITI 10.07.1992, no. 2252-B92 (in Russian).
25. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. IV. Analysis of operators*, New York–London: Academic Press, 1978. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom IV. Analiz operatorov*, Moscow: Mir, 1982.
26. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. II. Fourier analysis, self-adjointness*, New York: Academic Press, 1975. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom II. Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978.

Received 24.10.2019

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru

Citation: L. I. Danilov. On the spectrum of a relativistic Landau Hamiltonian with a periodic electric potential, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 3–26.