Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2019. Том 54. С. 74–101

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

О СУПЕРКОМПАКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ С ТОПОЛОГИЕЙ ВОЛМЭНОВСКОГО ТИПА

Рассматриваются ультрафильтры и максимальные сцепленные системы широко понимаемых измеримых пространств (имеются в виду непустые множества с π-системами своих подмножеств). Множества ультрафильтров и максимальных сцепленных систем превращаются в битопологические пространства в результате применения конструкций, на идейном уровне отвечающих схемам Волмэна и Стоуна. Основное внимание уделяется пространству ультрафильтров в оснащении топологией волмэновского типа. Получены условия на исходную π-систему, при которых данное пространство суперкомпактно. Указаны конкретные классы (широко понимаемых) измеримых пространств, для которых реализуются упомянутые условия. Исследуется также одна абстрактная задача о достижимости в условиях, когда выбор конкретного варианта решения может обладать неопределенностью следующего типа: множество, задающее ограничение может быть любым в пределах заданного априори непустого семейства. Рассматривается вопрос о существовании универсально реализуемых (в пределе) элементов пространства значений целевого оператора задачи. При получении достаточных условий использовалось свойство суперкомпактности пространства ультрафильтров измеримой структуры, достаточной (в рамках соответствующих предположений) для реализации всех возможных вариантов ограничений на выбор обычного решения (управления).

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-07

Введение

Статья посвящена вопросам, связанным с суперкомпактностью пространства ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Данные ИП получаются всякий раз оснащением непустого множества π-системой [1, с. 14] его подмножеств (п/м) с «нулем» и «единицей» (π-система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений; «нуль» — пустое, а «единица» — объемлющее множества); π-системами такого типа являются, конечно, решетки множеств с «нулем» и «единицей». В частности, топологии и семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП) являются решетками множеств и, в частности, π-системами.

В связи с применением у/ф π-систем отметим, что, в отличие от ситуации с у/ф семейства всех п/м «единицы», когда наиболее важные для исследования свободные у/ф не допускают конструктивного описания (имеется в виду случай, когда «единица» — бесконечное множество), здесь имеются нетривиальные варианты π-систем, для которых удается получить исчерпывающее представление множества всех у/ф данного (широко понимаемого) ИП. Среди таких π-систем имеются, в частности, алгебры и полуалгебры множеств. В характерном случае так называемых отделимых π-систем у/ф могут рассматриваться в качестве обобщенных элементов исходного пространства, причем последнее допускает погружение в пространство у/ф в виде всюду плотного множества. Само же оснащение множества у/ф топологиями можно связать с двумя естественными схемами, по смыслу волмэновской и стоуновской. При очень общих предположениях на данной основе удается получить своеобразные компактификации исходного объемлющего множества, играющего роль «единицы». Упомянутые компактификации (отличающиеся по смыслу от применяемых в общей топологии) оказываются полезными при построении расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Последнее обстоятельство мотивирует специальное исследование у/ф на π-системах и, в частности, на решетках множеств; отметим в этой связи работы [2–6] (см. также исследования А. А. Грызлова и его учеников [7–9], касающиеся пространств Стоуна булевых алгебр).

Одно из направлений в исследовании пространств у/ф связано с рассмотрением объемлющих пространств. Естественными вариантами здесь представляются пространства максимальных сцепленных систем (МСС); см. [10, гл. VII, § 4] и др. С конструкциями на основе МСС связываются понятия суперкомпактности ТП и суперрасширения (см., в частности, [10–13]). Отметим принципиальный результат [13] о суперкомпактности метризуемых компактов. Схема построения суперрасширения, реализуемая ранее (см. [10–13]) в классе замкнутых множеств в ТП, была дополнена в [14] построениями с использованием битопологических пространств (БТП), а затем [15, 16] распространена на случай МСС решетки множеств и, позднее [17], — на случай МСС произвольной π-системы, где также было реализовано БТП с топологиями, отвечающими идейно схемам Волмэна и Стоуна. Аналогичное БТП конструировалось при этом и для множества у/ф произвольной π-системы (см. [17, 18]). Заметим, что БТП с точками в виде у/ф может, как показано в [15, 17, 18], рассматриваться как своеобразное подпространство БТП, точками которого являются МСС.

Поскольку свойство суперкомпактности ТП не является наследственным (см. [19, 5.11]), условия его распространения на пространства у/ф требуют специального исследования. В настоящей работе упомянутые условия связываются прежде всего с изучением π-систем, для которых МСС исчерпываются у/ф. Дело в том, что на множестве МСС π-системы топология волмэновского типа суперкомпактна (см. [17, 18]). При отсутствии МСС, не являющихся у/ф (условимся называть такие МСС собственными), данным свойством обладает аналогичная топология на множестве у/ф. В работе указаны классы π-систем, для которых собственные МСС отсутствуют; среди них — полуалгебры множеств, используемые в теории меры и теории вероятностей. Показано, что свойство отсутствия собственных МСС наследуется произведениями π-систем, причем наследуется в двух вариантах: декартовом и «ящичном» (имеются в виду конструкции, подобные используемым в случае построения ящичной топологии). Все это показывает, что класс π-систем со свойством отсутствия собственных МСС является достаточно широким и включает содержательные примеры.

Полезно отметить, что «волмэновская» суперкомпактность пространства у/ф имеет место и в некоторых случаях π-систем, для которых собственные МСС существуют. Речь идет об алгебрах множеств, порожденных полуалгебрами (это частные случаи π-систем) с вышеупомянутым свойством отсутствия собственных МСС; для самих же алгебр указанного типа собственные МСС типично имеют место.

Обсуждается связь вышеупомянутых конструкций и построений, связанных с расширением задач о достижимости, реализуемом в классе у/ф. Для таких задач естественный вариант постановки касается вопросов построения множеств притяжения (МП), которые в задачах теории управления выступают в качестве регуляризированных аналогов обычных множеств достижимости. При этом возникают ОАХ, отвечающие идее последовательного ослабления стандартных ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения и др.). Однако, ОАХ могут возникать и изначально. В типичных случаях ОАХ реализуются в виде направленного семейства множеств в пространстве обычных решений. В этом случае МП определяется достаточно просто в виде пересечения замыканий образов множеств семейства, порождающего ОАХ. Если же семейство не является направленным, то МП определяется сложнее, а упомянутое пересечение приобретает несколько иной смысл. Представляется, что в некоторых случаях в вопросах описания данного множества-пересечения может оказаться полезным свойство сцепленности семейства, порождающего

ОАХ. Эти вопросы обсуждаются в заключении статьи.

§ 1. Общие понятия и обозначения

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем (см. [20, с. 16]) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Для произвольных объектов g и h, следуя [21, с. 67], полагаем, что $(g, h) \triangleq \{\{g\}; \{g; h\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом g и вторым элементом h. Если z есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно; $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Для любых трех объектов α, β и γ полагаем, следуя [21, с. 67], что $\{\alpha; \beta; \gamma\} = \{\alpha; \beta\} \cup \{\gamma\}$.

Для каждого множества H через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м H, $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м H, а $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. В качестве H может, конечно, использоваться семейство. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})). \tag{1.1}$$

В качестве $\mathcal{M}$ в (1.1) может, в частности, использоваться топология или семейство (всех) замкнутых множеств в топологическом пространстве (ТП). Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

этого семейства на множество B. Если $\mathfrak{X}$ — произвольное непустое семейство, то

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \colon \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\}, \qquad \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X \colon \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\},$$
$$\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{K}} X \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\}, \qquad \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{K}} X \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\}.$$

В качестве $\mathfrak{X}$ могут использоваться базы и предбазы ТП.

Если A и B — множества, то (см. [21, с. 77]) B^A есть множество всех отображений из A в B; свойство $f \in B^A$ записываем также как $f \colon A \longrightarrow B$ (при $a \in A$, как обычно, $f(a) \in B$ есть значение f в точке a). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \triangleq \{f(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ множества C при действии f. Как обычно, $\mathbb{R}$ есть вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} |\ k \leqslant n\}$. Полагаем также, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами; с учетом этого для всяких множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ используем более традиционное обозначение H^n вместо $H^{\overline{1,n}}$, получая множество всех кортежей $(h_i)_{i \in \overline{1,n}}$ со свойством $h_j \in H\ \forall j \in \overline{1, n}$.

Специальные семейства. До конца настоящего параграфа фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\}; \tag{1.2}$$

итак, введено семейство всех π-систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Ниже рассматриваются специальные подсемейства (1.2). В частности, полагаем, что

$$\begin{gathered}\pi^{\sharp}_{\star}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] |\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \forall L_3 \in \mathcal{L} \\ ((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing)\&(L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\&(L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Среди π-систем из множества (1.3) в дальнейшем наиболее важны те, которые являются полуалгебрами множеств. В этой связи напомним некоторые определения, полагая при $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$, что

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n |\ (A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i)\&(L_p \cap L_q = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\}$$

(множество всех $\mathcal{L}$-разбиений A порядка n). Тогда

$$\Pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] |\ \forall L \in \mathcal{L}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(\mathbf{I} \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\pi[\mathbf{I}]) \tag{1.4}$$

(заметим, что $\mathcal{P}(\mathbf{I}) \in \Pi[\mathbf{I}]$ и $\{\varnothing; \mathbf{I}\} \in \Pi[\mathbf{I}]$). В (1.4) введено семейство всех полуалгебр п/м множества $\mathbf{I}$. Наконец,

$$\begin{gathered}\Pi^{\sharp}_{\star}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \Pi[\mathbf{I}] \cap \pi^{\sharp}_{\star}[\mathbf{I}] = \{\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}] |\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \forall L_3 \in \mathcal{L} \\ ((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing)\&(L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\&(L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\} \in \mathcal{P}'(\pi^{\sharp}_{\star}[\mathbf{I}]);\end{gathered} \tag{1.5}$$

в связи с (1.5) заметим, что $\{\varnothing; \mathbf{I}\} \in \Pi^{\sharp}_{\star}[\mathbf{I}]$. Напомним также, что (см. [22, (1.7.4)])

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] |\ \mathbf{I} \setminus L \in \mathcal{L}\ \forall L \in \mathcal{L}\} = \{\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}] |\ \mathbf{I} \setminus L \in \mathcal{L}\ \forall L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\Pi[\mathbf{I}]) \tag{1.6}$$

есть семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$. Каждая полуалгебра порождает алгебру из множества (1.6) по очень простому правилу: если $\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}]$, то алгебра

$$\mathrm{a}^0_{\mathbf{I}}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) |\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \tag{1.7}$$

такова, что $\mathcal{L} \subset \mathrm{a}^0_{\mathbf{I}}(\mathcal{L})$ и при этом $\forall \mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$

$$(\mathcal{L} \subset \mathcal{A}) \Longrightarrow (\mathrm{a}^0_{\mathbf{I}}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{A}).$$

В связи с топологическими структурами отметим, что

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] |\ \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, а $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$ есть семейство всех замкнутых топологий [23, с. 98] на множестве $\mathbf{I}$. Пару $(\mathbf{I}, \tau)$, где $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, называют топологическим пространством (ТП); мы используем связанные с ТП понятия (T_0-, T_1- и T_2-отделимость, нульмерность, компактность и др., см. [24]). Если (U, τ_1), $U \neq \varnothing$, и (V, τ_2), $V \neq \varnothing$, — два ТП, то

$$C(U, \tau_1, V, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in V^U |\ f^{-1}(G) \in \tau_1\ \forall G \in \tau_2\}$$

(введено множество всех непрерывных отображений из (U, τ_1) в (V, τ_2)).

Базы и предбазы топологических пространств. Полагаем, что

$$(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} = \bigcup_{B\in\beta} B) \ \& \ (\forall B_1 \in \beta \ \forall B_2 \in \beta \ \forall x \in B_1 \cap B_2 \ \exists B_3 \in \beta\colon (x \in B_3) \ \& \ (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\}, \tag{1.8}$$

получая семейство всех открытых баз на $\mathbf{I}$ (элементы семейства (1.8) — базы некоторых топологий на $\mathbf{I}$); при этом $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \ \forall \beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\}$$

есть семейство всех открытых баз ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. По аналогии с (1.7) вводим семейство

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cap\}_\sharp(\mathbf{x}) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{\mathbb{X}\in\mathbf{x}} \mathbb{X}\} \tag{1.9}$$

открытых предбаз (предбаз открытых множеств) на $\mathbf{I}$; элементы (1.9) — предбазы некоторых топологий на $\mathbf{I}$. Ясно, что $\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\chi)) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \ \forall \chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Соответственно, при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\} = \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\chi))\} \tag{1.10}$$

имеем семейство всех открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; если $\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$, то (см. (1.10)) τ есть слабейшая топология на $\mathbf{I}$, содержащая χ. В дальнейшем потребуются также замкнутые базы и предбазы. В этой части используем обозначения [17, 18]. Так, $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ есть семейство всех замкнутых баз (точнее, баз замкнутых множеств) на множестве $\mathbf{I}$, определяемое в [18, (1.10)], а $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ — семейство всех замкнутых предбаз на $\mathbf{I}$, определяемое в [18, § 1]. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ (см. [18, § 1]) есть семейство всех замкнутых баз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, а $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}; \tau]$ (см. [18, § 1]) — семейство всех замкнутых предбаз упомянутого ТП.

Покрытия, суперкомпактность. Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \mathcal{I}] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) | \mathbf{I} = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\} \tag{1.11}$$

есть семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{I}$. В качестве $\mathcal{I}$ может использоваться открытая предбаза. Пусть

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \chi] \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}; \tag{1.12}$$

в (1.12) введено семейство суперкомпактных открытых предбаз на множестве $\mathbf{I}$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то полагаем

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] | \ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \chi] \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\} = ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]. \tag{1.13}$$

С учетом (1.11)–(1.13) вводим одно из эквивалентных определений семейства суперкомпактных топологий, полагая

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] | \ ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \varnothing\}.$$

Если $\tau \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I}, \tau)$ есть суперкомпактное ТП; если же при этом $(\mathbf{I}, \tau)$ является еще и T_2-пространством, то $(\mathbf{I}, \tau)$ называют суперкомпактом (см. [19, 5.11]). Отметим, что суперкомпактность сохраняется при гомеоморфизмах (является топологическим свойством). В этой связи введем некоторые новые обозначения, фиксируя до конца раздела непустые множества X и Y. В виде

$$Y^X_{(\star)} \triangleq \{f \in Y^X |\ f^1(X) = Y\}$$

имеем множество всех сюръекций X на Y;

$$(\mathrm{bi})[X; Y] \triangleq \{f \in Y^X_{(\star)} |\ \forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X\ \ (f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\}$$

есть множество всех биекций X на Y. Если $f \in (\mathrm{bi})[X; Y]$, то $\overset{-1}{f} \in X^Y$ есть по определению биекция, обратная к f, для которой

$$\{\overset{-1}{f}(y)\} = f^{-1}(\{y\})\ \ \forall y \in Y.$$

Множество всех гомеоморфизмов ТП с «единицами» X и Y имеет следующий вид

$$(\mathrm{Hom})[X; \tau_1; Y; \tau_2] \triangleq \{f \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \cap (\mathrm{bi})[X; Y] |\ \ \overset{-1}{f} \in C(Y, \tau_2, X, \tau_1)\}$$
$$\forall \tau_1 \in (\mathrm{top})[X]\ \forall \tau_2 \in (\mathrm{top})[Y].$$

При этом, как уже отмечалось, суперкомпактность — топологическое свойство: если $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$ и $\tau_1 \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[X]$, то

$$((\mathrm{Hom})[X; \tau_1; Y; \tau_2] \neq \varnothing) \Longrightarrow (\tau_2 \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[Y]). \tag{1.14}$$

Напомним, что (см. [19, 5.11]) семейство $\mathfrak{X}$ называется сцепленным, если любые два множества из $\mathfrak{X}$ пересекаются. Тогда для всякого непустого семейства $\mathfrak{X}$

$$\langle \mathrm{link} \rangle [\mathfrak{X}] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}) | X_1 \cap X_2 \neq \varnothing\ \ \forall X_1 \in \mathcal{X}\ \forall X_2 \in \mathcal{X}\}. \tag{1.15}$$

С учетом (1.15) введем также семейство всех МСС множеств непустого семейства $\mathfrak{X}$:

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0 [\mathfrak{X}] \triangleq \{\mathcal{X} \in \langle \mathrm{link} \rangle [\mathfrak{X}] |\ \forall \tilde{\mathcal{X}} \in \langle \mathrm{link} \rangle [\mathfrak{X}]\ \ (\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}) \Longrightarrow (\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}})\}. \tag{1.16}$$

В дальнейшем будут использоваться различные конкретизации (1.15) и (1.16). Свойство (1.14) потребуется при исследовании условий, обеспечивающих суперкомпактность пространства у/ф на ИП с алгеброй множеств.

§ 2. Битопологическое пространство ультрафильтров

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$, рассматривая $(E, \mathcal{E})$ как широко понимаемое ИП. В дальнейшем данное ИП будет конкретизироваться, что всякий раз будет специально оговариваться. В виде

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^\star(\mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E} \setminus \{\varnothing\}) | (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \& \\ \& (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall I \in \mathcal{E}\ \ (F \subset I) \Longrightarrow (I \in \mathcal{F}))\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(E, \mathcal{E})$, а в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})\ |\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})\ |\ \forall I \in \mathcal{E}\ \ (I \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (I \in \mathcal{U})\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(соответственно) — семейство всех максимальных фильтров или у/ф данного ИП. При этом

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^{\star}(\mathcal{E}) \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}.$$

С учетом этого легко проверяется, что $\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}) \neq \varnothing$. Если $\Sigma \in \mathcal{E}$, то полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}) | \ \Sigma \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}) | \ \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{2.3}$$

В терминах множеств (2.3) реализуется следующая π-система:

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{E}}(I)\colon I \in \mathcal{E}\} \in \pi[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})]; \tag{2.4}$$

в частности, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})]$. Тогда топология

$$\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E] \overset{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})] \tag{2.5}$$

превращает $\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})$ в нульмерное [24, 6.2] T_2-пространство

$$(\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}), \mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E]). \tag{2.6}$$

Посредством (2.5), (2.6) реализуется (по сути дела) вариант схемы Стоуна, применяемой обычно при $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$. Мы используем эту схему в общем случае $\mathcal{E} \in \pi[E]$, для которого

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \in (\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E] - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})].$$

Другая конструкция (по смыслу — схема Волмэна) связана с построением следующих множеств:

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}) \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\} \ \ \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

Тогда, в частности, $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|E \setminus \Sigma] = \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)$ при $\Sigma \in \mathcal{E}$. Поэтому, как легко видеть,

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_{E}[\mathcal{E}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})]; \tag{2.7}$$

(открытая) предбаза (2.7) порождает топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}^{0}_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E})]. \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) и [18, теорема 6.2] в виде

$$(\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}), \mathbf{T}^{0}_{\mathcal{E}}\langle E\rangle) \tag{2.9}$$

получаем компактное T_1-пространство. Отметим, что топологии (2.5) и (2.8) сравнимы (см. [18, § 5]):

$$\mathbf{T}^{0}_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E]. \tag{2.10}$$

Итак, триплет $(\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{E}), \mathbf{T}^{0}_{\mathcal{E}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E])$ есть БТП, свойства которого рассматривались, в частности, в [18, § 5].

§ 3. Максимальные сцепленные системы: краткие сведения

Рассматриваем (1.15), (1.16) при $\mathfrak{X} = \mathcal{E}$. Тогда [18, § 5], в частности, имеем, что

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] = \{\mathcal{S} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}] |\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \ (\Sigma \cap S \neq \varnothing\ \forall S \in \mathcal{S}) \Longrightarrow (\Sigma \in \mathcal{S})\}.$$

Связь МСС и у/ф π-системы $\mathcal{E}$ определяется равенством

$$\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] |\ A \cap B \in \mathcal{U}\ \forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]);$$

МСС из семейства $\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] \setminus \mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E})$ условимся называть собственными. Введем теперь в рассмотрение семейства

$$\begin{gathered}(\langle \mathrm{link} \rangle^0[\mathcal{E}|L] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{S} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] |\ L \in \mathcal{S}\}\ \forall L \in \mathcal{E})\ \& \\ \&\ (\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{E}|H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{S} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] |\ \exists S \in \mathcal{S} \colon S \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{gathered} \tag{3.1}$$

В терминах множеств (3.1) определяем семейства (см. [18, § 5])

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\langle \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[\mathcal{E}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]\},$$

$$\hat{\mathfrak{C}}^{\star}_0[E;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]}[\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]] = \{\langle \mathrm{link} \rangle^0[\mathcal{E}|\Sigma] \colon \Sigma \in \mathcal{E}\}.$$

Тогда $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]]$, а потому определена (суперкомпактная) топология

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}])) \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]] \tag{3.2}$$

(см. [18, § 5]). В виде

$$(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle) \tag{3.3}$$

имеем суперкомпактное T_1-пространство; при этом, как нетрудно проверить (см. [17]),

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle]. \tag{3.4}$$

Напомним также, что [18, (5.9)] справедливо равенство

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E})}, \tag{3.5}$$

означающее, что (2.9) является подпространством ТП (3.3). Кроме того,

$$\hat{\mathfrak{C}}^{\star}_0[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]],$$

а потому определена топология

$$\mathbb{T}_{\star}\langle E|\mathcal{E}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\hat{\mathfrak{C}}^{\star}_0[E;\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]]. \tag{3.6}$$

При этом (см. [18, § 5]) в виде

$$(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}], \mathbb{T}_{\star}\langle E|\mathcal{E}\rangle) \tag{3.7}$$

имеем нульмерное T_2-пространство, для которого

$$\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E] = \mathbb{T}_{\star}\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E})}. \tag{3.8}$$

Итак, (2.6) есть подпространство ТП (3.7). Наконец (см. [18, (5.12)]),

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle \subset \mathbb{T}_{\star}\langle E|\mathcal{E}\rangle,$$

а потому имеем БТП $(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle, \mathbb{T}_{\star}\langle E|\mathcal{E}\rangle)$, точками которого являются МСС. Свойства (3.5), (3.6), (3.8) характеризуют данное БТП как объемлющее по отношению к БТП, точками которого являются у/ф. Более подробно свойства обоих БТП рассматривались в [17, 18].

§ 4. Суперкомпактные пространства ультрафильтров, 1

Рассмотрим краткую сводку свойств, относящихся к случаю, когда собственные МСС отсутствуют, для чего сначала напомним некоторые положения [18] и их очевидные следствия. Прежде всего (см. [18, предложение 5.1]), в общем случае ИП

$$(E, \mathcal{E}), \quad E \neq \varnothing, \quad \mathcal{E} \in \pi[E],$$

имеет место следующее равенство

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] \setminus \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \{\mathcal{S} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] | \ \exists S_1 \in \mathcal{S} \ \exists S_2 \in \mathcal{S} \ \exists S_3 \in \mathcal{S} \colon S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing\}, \quad (4.1)$$

определяющее множество всех собственных МСС на π-системе $\mathcal{E}$. С учетом (1.3) и (4.1) получаем следующее общее положение

$$(\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})) \Longleftrightarrow (\ \mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]). \quad (4.2)$$

Как следствие (см. (3.2), (3.5)) получаем, что

$$(\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]) \Longrightarrow (\mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E \rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]). \quad (4.3)$$

В свою очередь, из (1.5) и (4.3) получаем, что при $\mathcal{E} \in \Pi_\star^\sharp[E]$ непременно $\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$ и, кроме того,

$$\mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E \rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})] \quad (4.4)$$

Введем в рассмотрение семейство всех центрированных подсемейств π-системы $\mathcal{E}$:

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) | \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}.$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$, *то* $\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}] = (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$. Выберем произвольно $\mathcal{M} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}]$. С учетом [17, (4.5)] имеем для некоторой МСС $\mathfrak{U} \in \langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]$ вложение $\mathcal{M} \subset \mathfrak{U}$. По выбору $\mathcal{E}$ имеем (см. (4.2)), что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$. В частности, $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{E})$. В силу (2.1) имеем, что $A \cap B \in \mathfrak{U}$ (см. аксиомы фильтра). С использованием индукции получаем, что

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathfrak{U} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (U_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathfrak{U}^k.$$

В частности, получаем с очевидностью, что

$$\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U \in \mathfrak{U} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{M}).$$

Поскольку (см. (2.1)) $\varnothing \notin \mathfrak{U}$, имеем свойство

$$\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U \neq \varnothing \quad \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{M}).$$

Требуемое свойство центрированности семейства $\mathcal{M}$ установлено: $\mathcal{M} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}]$. Поскольку выбор $\mathcal{M}$ был произвольным, имеем, что $\langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}] \subset (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}]$. Противоположное вложение очевидно. $\square$

Рассмотрим один полезный частный случай, полагая до конца параграфа, что $E = [a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Итак, рассматривается случай, когда E является невырожденным замкнутым промежутком вещественной прямой $\mathbb{R}$. Кроме того, полагаем до конца настоящего параграфа, что (см. [25, (6.3.15)])

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \mathcal{J}_0(a,b) \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}([a,b])|\ \exists z \in [a,b]\times[a,b]: \\ (]\mathrm{pr}_1(z),\mathrm{pr}_2(z)[\subset H)\&(\ H \subset [\mathrm{pr}_1(z),\mathrm{pr}_2(z)])\},\end{aligned} \tag{4.5}$$

получая семейство всех промежутков (открытых, полуоткрытых, замкнутых), содержащихся в $[a,b]$; см. в этой связи [25, (6.3.12),(6.3.15)]. При этом (см. [25, предложение 6.3.2])

$$\mathcal{J}_0(a,b) \in \Pi[[a,b]]. \tag{4.6}$$

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Справедливо свойство* $\mathcal{J}_0(a,b) \in \Pi^\sharp_\star[[a,b]]$.

Д о к а т е л ь с т в о. Отметим сначала ряд совсем простых свойств множеств из $\mathcal{J}_0(a,b)$ (4.5). Так ясно, что при $I \in \mathcal{J}_0(a,b),\ c \in I$ и $d \in I$

$$[c,d] \subset I. \tag{4.7}$$

С учетом (4.7) нетрудно проверить, что $\forall I_1 \in \mathcal{J}_0(a,b)\ \forall I_2 \in \mathcal{J}_0(a,b)\ \forall x \in I_1 \setminus I_2\ \forall y \in I_2 \setminus I_1$

$$(x \leqslant y) \Longrightarrow (I_1 \cap I_2 \subset [x,y]). \tag{4.8}$$

Выберем произвольно $T_1 \in \mathcal{J}_0(a,b),\ T_2 \in \mathcal{J}_0(a,b)$ и $T_3 \in \mathcal{J}_0(a,b)$, для которых

$$(T_1 \cap T_2 \neq \varnothing)\&(T_2 \cap T_3 \neq \varnothing)\&(T_1 \cap T_3 \neq \varnothing). \tag{4.9}$$

Покажем, что $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \varnothing$. В самом деле, допустим противное: пусть

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \varnothing. \tag{4.10}$$

Ясно, что $T_1 = (T_1 \cap T_2) \cup (T_1 \setminus T_2)$ и $T_2 = (T_1 \cap T_2) \cup (T_2 \setminus T_1)$. Поэтому в силу (4.10)

$$T_1 \cap T_3 = (T_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup ((\ T_1 \setminus T_2) \cap T_3) = (T_1 \setminus T_2) \cap T_3.$$

С учетом (4.9) получаем теперь свойство

$$(T_1 \setminus T_2) \cap T_3 \neq \varnothing. \tag{4.11}$$

Используя (4.11), выберем и зафиксируем число

$$u \in (T_1 \setminus T_2) \cap T_3. \tag{4.12}$$

С учетом (4.9) реализуется свойство $(T_2 \setminus T_1) \cap T_3 \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем

$$v \in (T_2 \setminus T_1) \cap T_3. \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) следует, что $u \neq v$. Поэтому $(u < v) \vee (v < u)$. Обе возможности рассмотрим отдельно.

(1) Пусть $u < v$. Поскольку $u \in T_3$ и $v \in T_3$, то согласно (4.7)

$$[u,v] \subset T_3, \tag{4.14}$$

где согласно (4.8), (4.12) и (4.13) $T_1 \cap T_2 \subset [u,v]$. Учитывая (4.14), получаем вложение $T_1 \cap T_2 \subset T_3$, откуда с учетом (4.9) получаем, что

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \varnothing; \tag{4.15}$$

последнее противоречит (4.10).

(2) Пусть $v < u$. Вновь используя (4.7), (4.12) и (4.13), получаем, что

$$[v, u] \subset T_3. \tag{4.16}$$

С другой стороны, $v \in T_2 \setminus T_1$, а $u \in T_1 \setminus T_2$. Используя (4.8), получаем, что

$$T_1 \cap T_2 = T_2 \cap T_1 \subset [v, u]. \tag{4.17}$$

Комбинируя (4.16) и (4.17), имеем снова $T_1 \cap T_2 \subset T_3$, откуда в силу (4.9) получаем (4.15), что противоречит (4.10). Итак, во всех возможных случаях получаем противоречие с (4.10), чем и завершается проверка импликации

$$((T_1 \cap T_2 \neq \varnothing)\&(T_2 \cap T_3 \neq \varnothing)\&(T_1 \cap T_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \varnothing).$$

Поскольку выбор T_1, T_2 и T_3 был произвольным, с учетом (1.5) и (4.6) получаем требуемое утверждение. □

Из (1.5), (4.2) и предложения 4.2 получаем, что

$$\langle \text{link} \rangle_0 [\mathcal{J}_0(a, b)] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}_0(a, b)),$$

а согласно (4.4) имеем также

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{J}_0(a,b)} \langle [a, b] \rangle \in ((\mathbb{SC}) - \text{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}_0(a, b))].$$

Таким образом, получили следующее свойство:

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{J}_0(a, b)), \mathbf{T}^0_{\mathcal{J}_0(a,b)} \langle [a, b] \rangle) \tag{4.18}$$

есть суперкомпактное T_1-пространство (в дальнейшем (4.18) будет использоваться в построениях, связанных с обобщенными декартовыми произведениями ИП). С использованием упомянутого свойства ТП (4.18) будет построен непустой суперкомпакт. Однако сначала (в следующем параграфе) отметим одну простую, но весьма общую, конструкцию, связанную с построением специального гомеоморфизма, действующего на пространствах у/ф.

§ 5. Преобразование ультрафильтров и проблема суперкомпактности

В настоящем параграфе рассмотрим одну естественную процедуру продолжения у/ф, связанную с переходом от полуалгебры множеств к алгебре, порожденной упомянутой полуалгеброй. В настоящем параграфе фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ (здесь и ниже E — произвольное непустое множество) и полагаем, что $\mathcal{A} \triangleq \text{a}_E^0(\mathcal{L})$; итак, $\mathcal{A} \in (\text{alg})[E]$ есть алгебра п/м E, порожденная полуалгеброй $\mathcal{L}$. Упомянутые соглашения соблюдаем до тех пор, пока не оговорено противное. Согласно [26, (4.5)]

$$\psi[\mathcal{A}; \mathcal{U}] \triangleq \{A \in \mathcal{A} | \exists U \in \mathcal{U} \colon U \subset A\} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{L}). \tag{5.1}$$

Более того, в силу [26, предложение 4.1] получаем биекцию

$$\psi[\mathcal{A}; \cdot] \triangleq (\psi[\mathcal{A}; \mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{L})} \in (\text{bi})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{L}); \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A})]. \tag{5.2}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Отображение* (5.2) *непрерывно в смысле топологий волмэновского типа:*

$$\psi[\mathcal{A}; \cdot] \in C(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}} \langle E \rangle, \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}} \langle E \rangle). \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.7) по двойственности получаем, что

$$((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L});\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle])\&((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A});\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]).$$

Тогда, в частности, имеем свойства

$$((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle])\&(\mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]))). \tag{5.4}$$

Для доказательства (5.3) достаточно установить (в силу (5.4)) следующее свойство

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbf{A}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \forall \mathbf{A} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]. \tag{5.5}$$

Выберем и зафиксируем произвольное множество $A \in \mathcal{A}$, после чего рассмотрим

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})).$$

С учетом (1.7) и определения $\mathcal{A}$ выберем и зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $(L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \Delta_n(A,\mathcal{L})$. Тогда, в частности, $L_j \in \mathcal{A}\ \forall j \in \overline{1,n}$.

Сравним $\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A))$ и объединение всех множеств $\Phi_{\mathcal{L}}(L_i)$, $i \in \overline{1,n}$. Пусть

$$\mathcal{U}_\star \in \psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)).$$

Тогда $\mathcal{U}_\star \in \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}^\star \triangleq \psi[\mathcal{A};\mathcal{U}_\star] \in \Phi_{\mathcal{A}}(A)$, а потому [27, лемма 2.4.1] $L_s \in \mathcal{U}^\star$ для некоторого $s \in \overline{1,n}$. Вместе с тем (см. (5.1)) имеем, что $U_\star \subset L_s$, где $U_\star \in \mathcal{U}_\star$. Как следствие (см. (2.1), (2.3)) $\mathcal{U}_\star \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_s)$, чем и завершается проверка вложения

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) \subset \bigcup_{i=1}^n \Phi_{\mathcal{L}}(L_i). \tag{5.6}$$

Пусть $r \in \overline{1,n}$ и $\mathcal{V}_\star \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_r)$. В силу (5.1) $\mathcal{V}^\star \triangleq \psi[\mathcal{A};\mathcal{V}_\star] \in \mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A})$ и при этом $L_r \subset A$. Поскольку $L_r \in \mathcal{V}_\star$, имеем из (5.1), что $A \in \mathcal{V}^\star$. Как следствие (см. (2.3)) $\mathcal{V}^\star \in \Phi_{\mathcal{A}}(A)$. Поэтому $\mathcal{V}_\star \in \psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A))$. Поскольку r и $\mathcal{V}_\star$ выбирались произвольно, установлено, что

$$\bigcup_{i=1}^n \Phi_{\mathcal{L}}(L_i) \subset \psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)).$$

С учетом (5.4) и (5.6) получаем следующее свойство:

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) = \bigcup_{i=1}^n \Phi_{\mathcal{L}}(L_i) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$$

(используем также простейшие свойства замкнутых множеств). Поскольку выбор A был произвольным, свойство (5.5) установлено (см. (2.4)). Как следствие имеем с учетом известных свойств замкнутых множеств и операции взятия прообраза, что

$$\psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbf{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \forall \mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle] \tag{5.7}$$

(учитываем второе положение в (5.4)). Свойство (5.7) означает справедливость (5.3). □

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Отображение* (5.2) *является гомеоморфизмом волмэновских пространств* $(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)$ *и* $(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle)$:

$$\psi[\mathcal{A};\cdot] \in (\mathrm{Hom})[\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{L});\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle;\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A});\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]. \tag{5.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.2) и предложения 5.1 для проверки (5.8) достаточно установить свойство открытости $\psi[\mathcal{A};\cdot]$. Последнее вытекает из [26, предложение 4.3] с учетом (2.10) и положений [18, предложение 3.1, теорема 5.1]. □

П р е д л о ж е н и е 5.3. *Если* $\mathcal{L} \in \Pi_\star^\sharp[E]$, *то* $\mathbf{T}_\mathcal{A}^0\langle E\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A})]$.

Доказательство получается очевидной комбинацией (1.14), (4.4) и предложения 5.2. Заметим, что в отличие от случая, связанного с (4.4), здесь возможна (при $\mathcal{L} \in \Pi_\star^\sharp[E]$) ситуация, когда $\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{A}] \neq \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A})$. Соответствующие примеры легко строятся.

Т е о р е м а 5.1. *Если* $\mathcal{L} \in \Pi_\star^\sharp[E]$, *то* $\mathbf{T}_\mathcal{A}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_\mathcal{A}^\star[E]$ *и при этом*

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A}), \mathbf{T}_\mathcal{A}^0\langle E\rangle) = (\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A}), \mathbf{T}_\mathcal{A}^\star[E])$$

есть непустой нульмерный суперкомпакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (см. [18, предложение 3.1, теорема 5.1]) $\mathbf{T}_\mathcal{A}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_\mathcal{A}^\star[E]$, а БТП $(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{A}), \mathbf{T}_\mathcal{A}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_\mathcal{A}^\star[E])$ является вырожденным. Используя свойства ТП (2.6) и предложение 5.3, получаем требуемое утверждение. □

В заключение раздела отметим одно положение, касающееся (широко понимаемого) ИП $(E, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$.

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Если* $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$, *то*

$$\mathfrak{F}_\mathbf{C}^\natural[\mathcal{E}] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle]. \tag{5.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$. В силу (4.2) имеем равенство

$$\langle \mathrm{link}\rangle_0[\mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}). \tag{5.10}$$

Поэтому согласно [17, (5.5)] $\mathfrak{F}_\mathbf{C}^\natural[\mathcal{E}] = \hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{E}]$, а потому (см. (3.4), (3.5), (4.3), (5.10)) справедливо (5.9). □

В качестве очевидного следствия отметим, что (см. (1.13), (2.7)) при $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$ и $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathbb{F}_\mathbf{C}^\natural[\mathcal{E}|G]) \Longrightarrow (\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \mathbb{F}_\mathbf{C}^\natural[\mathcal{E}|G_1] \cup \mathbb{F}_\mathbf{C}^\natural[\mathcal{E}|G_2]).$$

§ 6. Декартовы произведения и условия суперкомпактности пространства ультрафильтров

В настоящем параграфе фиксируем непустые множества X и $\mathbf{E}$, а также отображение

$$(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X;$$

итак, имеем (многозначное) отображение

$$x \longmapsto E_x\colon X \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbf{E}). \tag{6.1}$$

Отображение (6.1) порождает (непустое) множество-произведение

$$\mathbb{E} \triangleq \prod_{x\in X} E_x = \{f \in \mathbf{E}^X \mid f(x) \in E_x\ \forall x \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E}^X). \tag{6.2}$$

Рассматриваем измеримые структуры на $\mathbb{E}$ (6.2), получаемые посредством произведения аналогичных структур на множествах $E_x,\ x \in X$. В этой связи отметим, что

$$\prod_{x\in X} \pi[E_x] = \{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X |\ \mathcal{L}_y \in \pi[E_y]\ \forall y \in X\},$$

$$\prod_{x\in X} \pi_\star^\sharp[E_x] = \{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X |\ \mathcal{L}_y \in \pi_\star^\sharp[E_y]\ \forall y \in X\} \in \mathcal{P}'(\prod_{x\in X} \pi[E_x]),$$

$$\prod_{x\in X} \Pi_\star^\sharp[E_x] = \{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X |\ \mathcal{L}_y \in \Pi_\star^\sharp[E_y]\ \forall y \in X\} \in \mathcal{P}'(\prod_{x\in X} \pi_\star^\sharp[E_x]),$$

$$\prod_{x\in X} \Pi[E_x] = \{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X |\ \mathcal{L}_y \in \Pi[E_y]\ \forall y \in X\} \in \mathcal{P}'(\prod_{x\in X} \pi[E_x]),$$

$$\prod_{x\in X} (\mathrm{alg})[E_x] = \{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X |\ \mathcal{L}_y \in (\mathrm{alg})[E_y]\ \forall y \in X\} \in \mathcal{P}'(\prod_{x\in X} \Pi[E_x]).$$

Отметим следующие два очевидных свойства декартовых произведений:

$$\begin{gathered}((\prod_{x\in X} S_x^{(1)}) \cap (\prod_{x\in X} S_x^{(2)}) = \prod_{x\in X} (S_x^{(1)} \cap S_x^{(2)})\ \forall (S_x^{(1)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X\ \forall (S_x^{(2)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X)\ \& \\ \&\ ((\prod_{x\in X} T_x^{(1)}) \cap (\prod_{x\in X} T_x^{(2)}) \cap (\prod_{x\in X} T_x^{(3)}) = \prod_{x\in X} (T_x^{(1)} \cap T_x^{(2)} \cap T_x^{(3)}) \\ \forall (T_x^{(1)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X \quad \forall (T_x^{(2)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X \quad \forall (T_x^{(3)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X).\end{gathered} \tag{6.3}$$

Введем два варианта произведения π-систем, один из которых подобен процедуре, используемой при построении канонической базы тихоновского произведения (см. [24, 2.3]), а второй допускает естественную аналогию с процедурой построения базы ящичной топологии (см. [28, с. 198]). Итак, при $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x]$ имеем

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) |\ \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x \colon (H = \prod_{x\in X} L_x) \& (\ \exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon \\ L_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\} \in \pi[\mathbb{E}],\end{gathered} \tag{6.4}$$

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{\prod_{x\in X} L_x \colon (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in \pi[\mathbb{E}], \tag{6.5}$$

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{6.6}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $\prod_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \prod_{x\in X} \pi_\star^\sharp[E_x]$, *то*

$$(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \pi_\star^\sharp[\mathbb{E}])\ \&\ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \pi_\star^\sharp[\mathbb{E}]).$$

Доказательство следует фактически из определений (см. (1.3), (6.4)–(6.6)) и использует (6.3). Вернемся к случаю ИП с полуалгебрами множеств. Отметим прежде всего, что по аналогии с [29, предложение III.3.1] устанавливается, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \Pi[\mathbb{E}]\ \ \forall (\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi[E_x]. \tag{6.7}$$

Комбинируя (1.5), (6.7) и предложение 6.1, получаем, что

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x \in \Pi^\sharp_\star[\mathbb{E}] \ \ \forall(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi^\sharp_\star[E_x]. \tag{6.8}$$

Фиксируем до конца раздела две вещественнозначные (в/з) функции

$$((a_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X)\&((b_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X),$$

для которых $a_s < b_s \ \ \forall s \in X$. Последнее означает, что

$$(b_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}]a_x, \infty[.$$

С учетом (4.5) и предложения 4.1 получаем, что

$$(\mathcal{J}_0(a_x, b_x))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi^\sharp_\star[[a_x, b_x]]; \tag{6.9}$$

мы использовали здесь вариант общих определений настоящего параграфа для случая $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ и $E_x = [a_x, b_x] \ \forall x \in X$. Из предложения 6.1 извлекается свойство

$$\bigodot_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x) \in \pi^\sharp_\star[\mathbb{E}], \tag{6.10}$$

где согласно (6.2) $\mathbb{E} = \{f \in \mathbb{R}^X|\ \forall x \in X\ (a_x \leqslant f(x))\&(f(x) \leqslant b_x)\}$; (6.10) определяет «ящичную» π-систему п/м $\mathbb{E}$. Согласно (4.2), (4.3) и (6.10)

$$(\langle\mathrm{link}\rangle_0[\bigodot_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x)] =$$
$$= \mathbb{F}^\star_0(\bigodot_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x))) \ \& \ (\mathbf{T}^0_{\bigodot\limits_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x,b_x)}\langle\mathbb{E}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}^\star_0(\bigodot_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x))]).$$

Рассмотрим более актуальный вариант, связанный с (6.8), (6.9). Из (6.8) и (6.9) непосредственно следует, что

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x) \in \Pi^\sharp_\star[\mathbb{E}], \tag{6.11}$$

где $\mathbb{E}$ есть произведение всех множеств $[a_x, b_x],\ x \in X$. Согласно (4.2)–(4.4) и (6.11)

$$(\langle\mathrm{link}\rangle_0[\bigotimes_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x)] =$$
$$= \mathbb{F}^\star_0(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x)))\&(\ \mathbf{T}^0_{\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x,b_x)}\langle\mathbb{E}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}^\star_0(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x))]); \tag{6.12}$$

при этом (см. (6.12), § 2) в виде

$$(\mathbb{F}^\star_0(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x, b_x)), \mathbf{T}^0_{\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{J}_0(a_x,b_x)}\langle\mathbb{E}\rangle)$$

получаем суперкомпактное T_1-пространство. Последующие построения, связанные с предложением 5.2 и теоремой 5.1, позволят несколько уточнить последнее положение.

§ 7. Суперкомпакты ультрафильтров

Рассмотрим сначала естественное развитие конструкции, связанной с предложением 4.1. Фиксируем $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Наряду с полуалгеброй $\mathcal{J}_0(a,b)$ отрезка $[a,b]$ рассмотрим алгебру

$$\mathcal{A}_0(a,b) \overset{\triangle}{=} \mathrm{a}^0_{[a,b]}(\mathcal{J}_0(a,b)) \in (\mathrm{alg})[[a,b]], \tag{7.1}$$

порожденную полуалгеброй (4.6). Из предложений 4.2 и 5.3 следует, что

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}_0(a,b)}\langle[a,b]\rangle \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}_0(a,b))]. \tag{7.2}$$

Более того, согласно предложению 4.2, теореме 5.1, (7.1) и (7.2)

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}_0(a,b)}\langle[a,b]\rangle = \mathbf{T}^\star_{\mathcal{A}_0(a,b)}[[a,b]],$$

а возникающее при этом «единое» ТП

$$(\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A}_0(a,b)), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}_0(a,b)}\langle[a,b]\rangle) = (\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A}_0(a,b)), \mathbf{T}^\star_{\mathcal{A}_0(a,b)}[[a,b]])$$

есть непустой нульмерный суперкомпакт.

Замечание 7.1. Согласно предложению 5.2 отображение $\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{A}_0(a,b))$ на $\mathbb{F}^\star_0(\mathcal{J}_0(a,b))$, обратное к $\psi[\mathcal{A}_0(a,b));\cdot]$, есть гомеоморфизм, а тогда ТП (4.18) является (см. (1.14) и общие свойства гомеоморфизмов в [24]) непустым суперкомпактом. Отметим, что данное обстоятельство проявляется и в более общем случае (см. предложение 5.2 и теорему 5.1). $\square$

Вернемся к (6.1), полагая сейчас заданными непустые множества X и $\mathbf{E}$ и определяя $\mathbb{E}$ посредством (6.2). Отметим следующее легкопроверяемое свойство, связанное с (6.7),

$$\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x) = \mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X}\mathrm{a}^0_{E_x}(\mathcal{L}_x)) \in (\mathrm{alg})[\mathbb{E}] \ \ \forall (\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi[E_x]. \tag{7.3}$$

Согласно предложению 5.3, теореме 5.1 и (6.8) имеем, что при $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}\Pi^\sharp_\star[E_x]$

$$\mathbf{T}^0_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x)}\langle\mathbb{E}\rangle = \mathbf{T}^\star_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x)}[\mathbb{E}] \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x))],$$

а следующее «единое» ТП

$$(\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x)), \mathbf{T}^0_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x)}\langle\mathbb{E}\rangle) = (\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x)), \mathbf{T}^\star_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x)}[\mathbb{E}]) \tag{7.4}$$

является непустым нульмерным суперкомпактом. В отношении алгебры множеств, используемой в (7.4), полезно учитывать представление (7.3).

Отметим важный частный случай, связанный с (7.1). Полагаем при этом, что $\mathbf{E} = \mathbb{R}$; пусть $(p_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X$, $(q_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X$ и $p_y < q_y \ \forall y \in X$. В качестве $(E_x)_{x\in X}$ рассматриваем $([p_x,q_x])_{x\in X}$; тогда

$$\mathbb{E} = \{f \in \mathbb{R}^X \mid \forall x \in X \ \ (p_x \leqslant f(x))\&(f(x) \leqslant q_x)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^X). \tag{7.5}$$

Отметим, что (см. (6.9), (7.3))

$$((\mathcal{J}_0(p_x,q_x))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi^\sharp_\star[[p_x,q_x]])\&((\ \mathcal{A}_0(p_x,q_x))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathrm{alg})[[p_x,q_x]]),$$

где $\mathcal{A}_0(p_y, q_y) = \mathrm{a}^0_{[p_y, q_y]}(\mathcal{J}_0(p_y, q_y))\ \forall y \in X$. Согласно (6.11) и (7.3) имеем также, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{J}_0(p_x, q_x) \in \Pi^\sharp_\star[\mathbb{E}]\colon \mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{J}_0(p_x, q_x)) = \mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x, q_x)) \in (\mathrm{alg})[\mathbb{E}],$$

где $\mathbb{E}$ определено в (7.5). С учетом предложения 5.3 и теоремы 5.1 получаем, что

$$\mathbf{T}^0_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x,q_x))}\langle\mathbb{E}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x, q_x)))]$$

и при этом ТП

$$(\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x, q_x))), \mathbf{T}^0_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x,q_x))}\langle\mathbb{E}\rangle) = (\mathbb{F}^\star_0(\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x, q_x))), \mathbf{T}^\star_{\mathrm{a}^0_{\mathbb{E}}(\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{A}_0(p_x,q_x))}\langle\mathbb{E}\rangle)$$

есть непустой нульмерный суперкомпакт, точками которого являются у/ф алгебры множеств.

§ 8. Добавление: связь с конструкциями расширений

Во многих вопросах, связанных с корректностью экстремальных задач и задач о достижимости, важную роль играют обобщенные задачи различных типов, существенную «часть» которых составляют расширения пространства обычных решений или управлений. В этой связи отметим прежде всего монографию Дж. Варги [30], где были указаны три класса решений: обычные, приближенные и обобщенные (см. [30, III.2]). Не вдаваясь в подробности, остановимся сейчас только на проблеме построения обобщенных решений, а точнее, обобщенных элементов (ОЭ); заметим, что такие конструкции широко используются в теории управления и теории дифференциальных игр (наряду с [30] отметим исследования [31–34]). Распространение данных конструкций, применяемых в [30] для исследования задач оптимального управления и задач оптимизации, на широко понимаемые задачи о достижимости привело к разработке весьма общего аппарата, предусматривающего своеобразную компактификацию пространства обычных решений (управлений); см. [27, 35, 36] и др. Отметим в этой связи важное понятие компактификатора (см, например, [37]), используемое при исследовании абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Рассмотрим сейчас одну близкую по смыслу задачу, имея целью отметить возможное применение суперкомпактности при построении расширений.

Пусть, как и прежде, E — непустое множество, элементы которого называем обычными решениями, а $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ — заданное (и непустое) семейство п/м E. Множества — элементы $\mathfrak{E}$ — формируют то или иное ограничение на выбор элемента E. В задачах о достижимости с ОАХ весьма естественным (хотя и не обязательным) представляется предположение о том, что $\mathfrak{E}$ является направленным (см., в частности, [36, (3.3.8)]). Если этого нет, то в интересах построения множества притяжения, «заменяющего» множества достижимости (терминология теории управления), вводится фактически семейство $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{E})$, которое уже является направленным. Итак, в случае когда $\mathfrak{E}$ определяет ОАХ, вышеупомянутое предположение соответствует существу дела. Мы, однако, сейчас не будем рассматривать $\mathfrak{E}$ в качестве источника ОАХ; полагаем, что множества из $\mathfrak{E}$ определяют всякий раз стандартное ограничение на выбор $x \in E$, допуская при этом возможную неопределенность в осуществлении конкретного выбора $\Sigma \in \mathfrak{E}$.

Полагаем сейчас заданным произвольное ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, рассматриваемое в качестве целевого. Элементы $\mathbf{h}(x) \in \mathbf{H}$ являются всякий раз результатом того или иного выбора $x \in E$. Нас интересуют точки $z \in \mathbf{H}$, которые могут быть сколь угодно точно (в смысле топологии $\tilde{\tau}$) «приближены» элементами множества-образа

$\mathbf{h}^1(\Sigma)$ при любом выборе $\Sigma \in \mathfrak{E}$. Такие элементы z можно рассматривать как универсально реализуемые (в пределе). В частности, представляется интересным вопрос об условиях существования таких элементов. Мы исследуем здесь данный вопрос в одном специальном случае, когда $\mathfrak{E}$ удается «погрузить» в π-систему $\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E]$ с дополнительным свойством отделимости, а $\mathbf{h}$ реализуется в виде композиции двух отображений, одно из которых непрерывно.

Всюду в дальнейшем для каждого ТП (Y, θ), $Y \neq \varnothing$, и множества $B \in \mathcal{P}(Y)$ через $\mathrm{cl}(B, \theta)$ обозначаем замыкание B в упомянутом ТП.

Как и в [17, 18] полагаем, что

$$\tilde{\pi}^0[E] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[E] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in E\ \setminus L\ \exists\, \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}; \tag{8.1}$$

π-системы из семейства (8.1) называем отделимыми. Важно отметить, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $x \in E$

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} | x \in L\} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{L}). \tag{8.2}$$

Полагаем до конца параграфа, что фиксирована (отделимая) π-система

$$\mathcal{E} \in \pi_\star^\sharp[E] \cap \tilde{\pi}^0[E], \tag{8.3}$$

для которой $\mathfrak{E} \subset \mathcal{E}$. Итак, у нас

$$\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}). \tag{8.4}$$

В силу (8.2), (8.3) $(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})\ \forall x \in E$. С учетом этого введем отображение

$$\zeta \triangleq ((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})^E, \tag{8.5}$$

осуществляющее погружение множества E в $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$. Напомним в этой связи, что [18, предложение 7.1]

$$\mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle) = \mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_\mathcal{E}^\star[E]) = \Phi_\mathcal{E}(\Sigma)\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{8.6}$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Эквивалентны следующие два условия:*

(1) $\{\Phi_\mathcal{E}(\Sigma) \colon \Sigma \in \mathfrak{E}\} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}))]$;

(2) $\mathfrak{E} \in \langle \mathrm{link}\rangle[\mathcal{E}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что (см. [38, предложение 5.3] $\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}$

$$(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\Phi_\mathcal{E}(\Sigma_1) \cap \Phi_\mathcal{E}(\Sigma_2) = \varnothing). \tag{8.7}$$

Тогда (см. (8.7)), в частности, имеем $\forall \Sigma_1 \in \mathfrak{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathfrak{E}$

$$(\Phi_\mathcal{E}(\Sigma_1) \cap \Phi_\mathcal{E}(\Sigma_2) \neq \varnothing) \Longrightarrow (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing).$$

Это означает (см. (1.15)), что $(1) \Longrightarrow (2)$. Пусть истинно (2), т. е.

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \mathcal{E} \setminus \{\varnothing\}\ \forall \Sigma_1 \in \mathfrak{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathfrak{E}.$$

Выберем произвольно $\Sigma' \in \mathfrak{E}$ и $\Sigma'' \in \mathfrak{E}$, получая $\Sigma' \cap \Sigma'' \in \mathcal{E} \setminus \{\varnothing\}$; в частности, $\Sigma' \cap \Sigma'' \neq \varnothing$. Пусть $x_\star \in \Sigma' \cap \Sigma''$; тогда $\mathcal{U}_\star \triangleq \zeta(x_\star) \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$ и, в силу (8.2) $\Sigma' \cap \Sigma'' \in \mathcal{U}_\star$, откуда (см. (2.1)) следует, что $\mathcal{U}_\star \in \Phi_\mathcal{E}(\Sigma') \cap \Phi_\mathcal{E}(\Sigma'')$. Поэтому $\Phi_\mathcal{E}(\Sigma') \cap \Phi_\mathcal{E}(\Sigma'') \neq \varnothing$. Поскольку выбор Σ' и Σ'' был произвольным, установлено (1). Итак, $(2) \Longrightarrow (1)$. В итоге $(1) \Longleftrightarrow (2)$. $\square$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 8.1. Семейство $\mathfrak{E}$ (8.4) сцеплено: $\mathfrak{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}]$.

Как следствие получаем с учетом предложения 8.1, что

$$\mathfrak{L} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \colon \Sigma \in \mathfrak{E}\} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}))], \tag{8.8}$$

т. е. $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing \ \ \forall \mathbb{L}_1 \in \mathfrak{L}\, \forall \mathbb{L}_2 \in \mathfrak{L}$. Заметим, что согласно (2.4), (8.4) и (8.8)

$$\mathfrak{L} \subset (\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]. \tag{8.9}$$

Поэтому (см. (1.15), (8.8), (8.9)) получаем следующее свойство сцепленности:

$$\mathfrak{L} \in \langle \mathrm{link} \rangle[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]]. \tag{8.10}$$

Воспользуемся определением [17, (5.1)]: полагаем в этой связи, что

$$((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle] \triangleq$$
$$\triangleq \{\mathfrak{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}^0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle] | \bigcap_{\mathbb{X} \in \chi} \mathbb{X} \neq \varnothing\ \forall \chi \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathfrak{X}]\}, \tag{8.11}$$

$$((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E} \rangle] \triangleq$$
$$\triangleq \{\mathfrak{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}^0[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E} \rangle] | \bigcap_{\mathbb{X} \in \chi} \mathbb{X} \neq \varnothing\ \forall \chi \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathfrak{X}]\}. \tag{8.12}$$

Согласно [17, предложение 5.1] имеем свойство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^\star[E; \mathcal{E}] \in ((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E} \rangle]. \tag{8.13}$$

П р е д л о ж е н и е 8.2. *Пересечение всех множеств* $\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma),\ \Sigma \in \mathfrak{E}$, *непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся (8.10)–(8.13). Из (4.2) и (8.3) вытекает, что

$$\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}). \tag{8.14}$$

Как следствие из (3.2) и (3.5) имеем (см. (8.14)) равенство

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E} \rangle. \tag{8.15}$$

Получили (см. (8.11), (8.12), (8.14), (8.15)) также следующее равенство

$$((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle] = ((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\langle \mathrm{link} \rangle_0[\mathcal{E}]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E} \rangle]. \tag{8.16}$$

При этом (см. (8.14), [17, (4.9), (6.6)]) имеет место цепочка равенств

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] = \hat{\mathfrak{C}}_0^\star[E; \mathcal{E}]|_{\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})} = \hat{\mathfrak{C}}_0^\star[E; \mathcal{E}]. \tag{8.17}$$

Из (8.13), (8.16) и (8.17) получаем теперь, что

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \in ((\mathrm{p}, \mathrm{bin}) - \mathrm{cl})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}); \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle]. \tag{8.18}$$

Тогда в силу (8.1), (8.10), (8.11) и (8.18) получаем, что пересечение всех множеств из $\mathfrak{L}$ непусто, а потому (см. (8.8))

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) = \bigcap_{\mathbb{L} \in \mathfrak{L}} \mathbb{L} \neq \varnothing.$$

Предложение доказано. □

Из (8.6) и предложения 8.2 получаем теперь, что

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle) = \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E]) \neq \varnothing.$$

Т е о р е м а 8.1. *Если* $\mathbf{g} \in C(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ *и при этом* $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \zeta$, *то*

$$\mathbf{g}^1(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Phi_\mathcal{E}(\Sigma)) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathbf{g} \in C(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ со свойством $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \zeta$. Тогда [24, 1.4.1]

$$\mathbf{g}^1(\mathrm{cl}(\mathbb{U}, \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle)) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{g}^1(\mathbb{U}), \tilde{\tau}) \ \ \forall \mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})). \tag{8.19}$$

В частности (см. (8.5), (8.19)), получаем следующее свойство:

$$\mathbf{g}^1(\mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle)) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{g}^1(\zeta^1(\Sigma)), \tilde{\tau}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}) \ \forall \Sigma \in \mathcal{P}(E). \tag{8.20}$$

С учетом (8.6) и (8.20) получаем теперь, что

$$\mathbf{g}^1(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Phi_\mathcal{E}(\Sigma)) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathbf{g}^1(\Phi_\mathcal{E}(\Sigma)) = \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathbf{g}^1(\mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_\mathcal{E}^0\langle E\rangle)) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}).$$

Требуемое свойство установлено. □

С л е д с т в и е 8.1. *Если выполнены условия теоремы* 8.1, *то*

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}) \neq \varnothing. \tag{8.21}$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложения 8.2 и теоремы 8.1. Напомним, что сама теорема 8.1 и следствие 8.1 установлены при условии 8.1, а также при выполнении (8.3), (8.4). Отметим важную роль равенства $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \zeta$ в условиях данной теоремы и следствия 8.1.

§ 9. Связь с конструкциями расширений, 1

В настоящем параграфе продолжается обсуждение вопроса о существовании универсально реализуемых элементов произвольного ТП. Как и ранее, E — непустое множество. Условие (8.3) предполагается выполненным (полезно учесть, что $\Pi_\star^\sharp[E] \subset \pi_\star^\sharp[E] \cap \tilde{\pi}^0[E]$), а $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$; см. (8.4). Предложение 8.1 сохраняет силу. Имеем также отображение (8.5) со свойством (8.6), которое важно для дальнейшего. Полагаем далее выполненным условие 8.1 (итак, $\mathfrak{E}$ — сцепленное подсемейство $\mathcal{E}$). С учетом этого вводим семейство $\mathfrak{L}$ (8.8); оно «автоматически» оказывается сцепленным (см. (8.10)). Следуем [17, (5.1)], используя (8.11)–(8.13). Предложение 8.2 также сохраняет свою силу (см. также (8.6)):

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Phi_\mathcal{E}(\Sigma) = \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma), \mathbf{T}_\mathcal{E}^\star[E]) \neq \varnothing.$$

Как и в § 8 фиксируем ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Полагаем до конца настоящего параграфа, что

$$\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{g}} \circ \zeta, \tag{9.1}$$

где (фиксировано до конца параграфа)

$$\tilde{\mathbf{g}} \in C(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_\mathcal{E}^\star[E], \mathbf{H}, \tilde{\tau}). \tag{9.2}$$

Из (9.1) следует, конечно, что $\mathbf{h}^1(\Sigma) = \tilde{\mathbf{g}}^1(\zeta^1(\Sigma)) \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. По аналогии с теоремой 8.1 имеем следующее утверждение

Т е о р е м а 9.1. *Справедливо вложение*

$$\tilde{\mathbf{g}}^1(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma))\subset\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma),\tilde{\tau}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (9.2) имеем следующее свойство

$$\tilde{\mathbf{g}}^1(\mathrm{cl}(\mathbb{H},\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E]))\subset\mathrm{cl}(\tilde{\mathbf{g}}^1(\mathbb{H}),\tilde{\tau})\ \forall\mathbb{H}\in\mathcal{P}(\mathbb{F}^{\star}_0(\mathcal{E})).\tag{9.3}$$

Теперь учтем (8.5). С учетом (8.6) и (9.3) получаем, что

$$\tilde{\mathbf{g}}^1(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma))\subset\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\tilde{\mathbf{g}}^1(\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma))=$$
$$=\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\tilde{\mathbf{g}}^1(\mathrm{cl}(\zeta^1(\Sigma),\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E]))\subset\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\mathrm{cl}(\tilde{\mathbf{g}}^1(\zeta^1(\Sigma)),\tilde{\tau})=\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma),\tilde{\tau}).$$

Требуемое вложение установлено. □

С л е д с т в и е 9.1. *Множество всех универсально реализуемых элементов непусто: справедливо* (8.21).

Теоремы 8.1 и 9.1 определяют лишь общую идею подхода к исследованию вопроса о существовании универсально реализуемых элементов. Заметим, что два последних положения (теорема 9.1 и следствие 9.1) были установлены при следующих условиях: $\mathcal{E}\in\pi^{\sharp}_{\star}[E]\cap\tilde{\pi}^0[E]$, $\mathfrak{E}\in\langle\mathrm{link}\rangle[\mathcal{E}]$, справедливы соотношения (9.1), (9.2). В §§ 4–8 указаны классы (широко понимаемых) ИП, для которых обеспечено первое из упомянутых условий; второе (сцепленность) допускает в ряде случаев неосредственную проверку в терминах ИП $(E,\mathcal{E})$. Более сложной представляется ситуация с (9.1), (9.2). Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

§ 10. Связь с конструкциями расширений, 2

Полагаем сначала, что ИП $(E,\mathcal{E})$ соответствует § 9 ($E\neq\varnothing$ и $\mathcal{E}\in\pi^{\sharp}_{\star}[E]\cap\tilde{\pi}^0[E]$), а $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$, $\mathbf{H}\neq\varnothing$, есть T_2-пространство. Введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{E};\mathbf{H};\tilde{\tau}]\in\mathcal{P}'(\mathbf{H}^E),\tag{10.1}$$

определяемое в [39, (5.1)]. Элементы (10.1) — суть отображения $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^E$, у которых для каждого у/ф $\mathcal{U}\in\mathbb{F}^{\star}_0(\mathcal{E})$ семейство-образ $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\triangleq\{\mathbf{f}^1(U)\colon U\in\mathcal{U}\}$ есть база фильтра [40, гл. I], обладающая (единственным) пределом в $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$. С учетом этого в [39, § 5] каждому отображению $\mathbf{f}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{E};\mathbf{H};\tilde{\tau}]$ сопоставляется отображение $\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]\in\mathbf{H}^{\mathbb{F}^{\star}_0(\mathcal{E})}$, однозначно определяемое соотношением [39, (5.2)].

Усилим предположения в отношении $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$: будем полагать далее, что $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ есть регулярное [24, 1.5] ТП, т. е. ТП, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3 (в [39] использовалась несколько иная терминология, соответствующая [41]). Тогда [39, (5.5)]

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]\in C(\mathbb{F}^{\star}_0(\mathcal{E}),\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{E}}[E],\mathbf{H},\tilde{\tau})\ \ \forall\mathbf{f}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{E};\mathbf{H};\tilde{\tau}].\tag{10.2}$$

Наконец, согласно [39, (5.6)] для отображения ζ (8.5) реализуется система равенств

$$\mathbf{f}=\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]\circ\zeta\ \ \forall\mathbf{f}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{E};\mathbf{H};\tilde{\tau}].\tag{10.3}$$

Теперь, возвращаясь к (9.1), (9.2), получаем в терминах (10.2), (10.3) естественную реализацию: полагая, что $\mathbf{h}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{E};\mathbf{H};\tilde{\tau}]$, имеем представление (9.1) при условии

$\tilde{\mathbf{g}} = \varphi_{\lim}[\mathbf{h}]$. Следовательно, в рассматриваемом сейчас случае регулярного ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и $\mathbf{h} \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{E}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}]$ получаем (при $\mathfrak{E} \in \langle\mathrm{link}\rangle[E]$, где $\mathcal{E} \in \pi_{\star}^{\sharp}[E] \cap \tilde{\pi}^0[E]$), что

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{h}]^1\Big(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)\Big) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau})$$

и, как следствие (см. § 9), имеет место (8.21), т. е.

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}). \tag{10.4}$$

Замечание 10.1. В связи с (10.4) отметим, что при условии сцепленности $\mathfrak{E}$ согласно предложению 4.1 данное семейство $\mathfrak{E}$ центрировано. Рассмотрим одно простое следствие данного положения, имеющее отношение к задаче о достижимости при ОАХ. Итак, пусть $\mathcal{E} \in \Pi_{\star}^{\sharp}[E]$ и $\mathfrak{E} \in \langle\mathrm{link}\rangle[E]$, а потому $\mathfrak{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{E}]$. Тогда

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma \in \mathcal{P}'(E) \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{E}).$$

Как следствие получаем, что $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})$ есть непустое семейство непустых п/м E; более того, данное семейство направлено:

$$\forall S_1 \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \ \forall S_2 \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \ \exists S_3 \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \colon S_3 \subset S_1 \cap S_2. \tag{10.5}$$

Отметим, что определено множество притяжения $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \mathfrak{E}]$ [39, § 4], для которого

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \mathfrak{E}] = \bigcap_{S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(S), \tilde{\tau}) \subset \bigcap_{S \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tilde{\tau}). \tag{10.6}$$

Рассмотрим множество в левой части (10.6), т. е. МП при условии, что $\mathfrak{E}$ является источником ОАХ. При этом $(\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\star}[E], \zeta, \varphi_{\lim}[\mathbf{h}])$ есть компактификатор задачи (см. [37]); используем (10.2), (10.3) и свойства, отмеченные в [39, § 6]. Заметим, что $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \subset \mathcal{E}$, а тогда $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$. Поэтому [39, предложение 7]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})] = \bigcap_{S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(S), \tilde{\tau}) = \varphi_{\lim}[\mathbf{h}]^1(\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E} | \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}))), \tag{10.7}$$

где $\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E} | \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E}) | \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E}) \subset \mathcal{U}\}$ и, стало быть,

$$\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E} | \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})) = \bigcap_{S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})} \Phi_{\mathcal{E}}(S). \tag{10.8}$$

Из (10.6)–(10.8) получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \mathfrak{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})] = \varphi_{\lim}[\mathbf{h}]^1\left(\bigcap_{S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})} \Phi_{\mathcal{E}}(S)\right). \tag{10.9}$$

Отметим, что $\Phi_{\mathcal{E}}(S) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\star}[E]]$ при $S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})$; см. [17, (3.3)]. Кроме того, имеем (10.5), а тогда семейство

$$\tilde{\mathfrak{E}} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{E}}(S) \colon S \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{E})\}$$

также является направленным (см. (2.1)–(2.3)) и, как следствие (см. [36, (3.3.8), (3.3.16)]),

$$\tilde{\mathfrak{E}} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^{\star}(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\star}[E]]].$$

Поскольку ТП $(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E])$ является компактом, то $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}|\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{E})) = \bigcap_{S\in\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{E})} \Phi_{\mathcal{E}}(S) \neq \varnothing$, а тогда (см. (10.9)) получаем свойство

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{h}; \mathfrak{E}] \neq \varnothing. \tag{10.10}$$

Из (10.6) и (10.10) следует, в частности, (10.4). Важнее, однако, представляется комбинация (10.6) и (10.10): в рассматриваемом случае среди универсально реализуемых элементов множества $\mathbf{H}$ непременно содержатся элементы притяжения. $\square$

Свойство (10.4) для наших целей наиболее существенно. Теперь можно воспользоваться положениями [42], определяющими вариант конкретного представления элементов (10.1). Итак, напомним некоторые конструкции [42, раздел 6].

Пусть далее $(\mathbb{H}, \rho)$, $\mathbb{H} \neq \varnothing$, есть полное метрическое пространство (ρ — полная метрика на $\mathbb{H}$), $\mathcal{E} \in \Pi_\star^\sharp[E]$, а $B(E, \mathcal{E}, \mathbb{H}, \rho)$ определяется посредством [42, (2.5)] (множество всех ярусных отображений, действующих из E в $(\mathbb{H}, \rho)$; ярусные отображения — суть равномерные пределы $\mathcal{E}$-ступенчатых отображений и только они). Через $\mathcal{T}$ обозначим топологию множества $\mathbb{H}$, порожденную метрикой ρ; $\mathcal{T} \in (\mathrm{top})[\mathbb{H}]$. Кроме того, фиксируем непустое множество Γ, элементы которого играют далее роль индексов. При этом полагаем, что

$$\mathbf{H} = \mathbb{H}^\Gamma;$$

итак, $\mathbf{H}$ есть множество всех операторов, действующих из Γ в $\mathbb{H}$. Определяем $\tilde{\tau}$ в виде топологии $\otimes^\Gamma(\mathcal{T})$ [42, раздел 2] тихоновской степени (метризуемого) ТП $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ с индексным множеством Γ. Иными словами (см. [42, (6.16)]),

$$(\mathbf{H}, \tilde{\tau}) = (\mathbb{H}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\mathcal{T})) \tag{10.11}$$

есть тихоновское произведение [24, 2.3] экземпляров $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ с индексным множеством Γ; в виде (10.11) имеем, в частности, регулярное ТП, т. е. T_1- и T_3-пространство одновременно (заметим, что в [42, раздел 6] использовалась терминология, принятая в [41]). Следуя [42, раздел 6], сопоставляем произвольным $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma$ отображение

$$f(\cdot)(\gamma) \overset{\triangle}{=} (f(x)(\gamma))_{x\in E} \in \mathbb{H}^E,$$

получая соответствующую (индексу γ) компоненту f. В виде

$$B_\otimes[E; \mathcal{E}; \mathbb{H}; \rho|\Gamma] \overset{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{H}^E | f(\cdot)(\gamma) \in B(E, \mathcal{E}, \mathbb{H}, \rho)\ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

получаем (см. [42, (6.17)]) множество всех отображений (из $\mathbf{H}^E$) с ярусными компонентами. При этом [42, (6.18)]

$$B_\otimes[E; \mathcal{E}; \mathbb{H}; \rho|\Gamma] \subset \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{E}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}]. \tag{10.12}$$

С учетом (10.2), (10.3), (10.12) получаем теперь нужный вариант (9.1), (9.2), а именно: при $\mathbf{h} \in B_\otimes[E; \mathcal{E}; \mathbb{H}; \rho|\Gamma]$ определено (непрерывное) отображение $\varphi_{\lim}[\mathbf{h}] \in C(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^\star[E], \mathbf{H}, \tilde{\tau})$, реализующее $\mathbf{h}$ в виде

$$\mathbf{h} = \varphi_{\lim}[\mathbf{h}] \circ \zeta. \tag{10.13}$$

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Если* $\mathcal{E} \in \Pi_\star^\sharp[E]$, $\mathfrak{E} \in \langle \mathrm{link} \rangle[\mathcal{E}]$, $\mathbf{h} \in B_\otimes[E; \mathcal{E}; \mathbb{H}; \rho|\Gamma]$, *а* $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ *имеет вид* (10.11)*, то справедливо* (10.4)*.*

Доказательство непосредственно вытекает из (10.13). Итак, получены достаточные условия существования универсально реализуемых элементов в ТП (10.11). Отметим полезный частный случай: $(\mathbb{H}, \rho)$ — вещественная прямая $\mathbb{R}$ с метрикой-модулем, т. е. $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ и

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = |\xi_1 - \xi_2|\ \ \forall \xi_1 \in \mathbb{R}\ \forall \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18–01–00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
2. Ченцов А. Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311. http://mi.mathnet.ru/timm771
3. Ченцов А. Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293. http://mi.mathnet.ru/timm689
4. Ченцов А. Г. Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 225–239. http://mi.mathnet.ru/timm709
5. Пыткеев Е. Г., Ченцов А. Г. К вопросу о структуре ультрафильтров и свойствах, связанных со сходимостью в топологических пространствах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 2. С. 250–267. http://mi.mathnet.ru/timm1075
6. Ченцов А. Г., Пыткеев Е. Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329. http://mi.mathnet.ru/timm1136
7. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. https://doi.org/10.20537/vm100302
8. Грызлов А. А., Головастов Р. А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. https://doi.org/10.20537/vm130102
9. Головастов Р. А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24. https://doi.org/10.20537/vm120303
10. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
11. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
12. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
13. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. No. 1. P. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
14. Ченцов А. Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 55–79. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
15. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
16. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. No. 2. P. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
17. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
18. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
19. Архангельский А. В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
20. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

21. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
22. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009.
23. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004.
24. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
25. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010.
26. Ченцов А. Г. Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 85–102. https://doi.org/10.20537/vm120309
27. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
28. Богачев В. И. Слабая сходимость мер. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
29. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
30. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
31. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.
32. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
33. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
34. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
35. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York: Springer US, 1996.
36. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
37. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309. http://mi.mathnet.ru/timm1282
38. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. https://doi.org/10.20537/vm110112
39. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. https://doi.org/10.20537/vm140108
40. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
41. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.
42. Ченцов А. Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314. http://mi.mathnet.ru/timm888

Поступила в редакцию 20.04.2019

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 74–101.

A. G. Chentsov
On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type

Keywords: maximal linked system, topology, ultrafilter.

MSC2010: 93C83

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-07

This paper is concerned with ultrafilters and maximal linked systems of widely understood measurable spaces (nonempty sets with π-systems of its subsets are meant). The sets of ultrafilters and maximal linked systems are transformed to bitopological spaces by applying constructions that (in idea) meet the Wallman and Stone schemes. The focus is on ultrafilter space with topology of Wallman type. Conditions on the initial π-system for which the given space is supercompact are specified. Concrete classes of (widely understood) measurable spaces are listed for which the above-mentioned conditions are realized. Special attention is also given to one abstract problem of attainability under conditions when the choice of a concrete solution may have the following uncertainty: the set defining constraints can be an arbitrary element of a given nonempty family. The question of the existence of universally realized (in limit) elements in the space of values of the goal operator in our problem is considered. To obtain sufficient solutions, the supercompactness property of the ultrafilter space for special measurable structure is used; this structure is sufficient (under corresponding suppositions) for realization of all variants of constraints on the choice of a usual solution (control).

Funding. The research was funded by the Russian Foundation for Basic Research, project number 18–01–00410.

REFERENCES

1. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
2. Chentsov A. G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm771
3. Chentsov A. G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 12–39. https://doi.org/10.1134/S0081543811090021
4. Chentsov A. G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 276, suppl. 1, pp. 48–62. https://doi.org/10.1134/S0081543812020046
5. Pytkeev E. G., Chentsov A. G. On the structure of ultrafilters and properties related to convergence in topological spaces, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 289, suppl. 1, pp. 164–181. https://doi.org/10.1134/S0081543815050156
6. Chentsov A. G., Pytkeev E. G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. https://doi.org/10.1134/S0081543816020048
7. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100302
8. Gryzlov A. A., Golovastov R. A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130102
9. Golovastov R. A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 19–24 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120303

10. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006.
11. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
12. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
13. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
14. Chentsov A. G. Superextension as bitopological space, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
15. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170307
16. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems, *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
17. Chentsov A. G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
18. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
19. Arkhangelskii A. V. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 1–117.
20. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press Inc., 1960.
Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964.
21. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970.
22. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2009.
23. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004.
24. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986.
25. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010.
26. Chentsov A. G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 85–102 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120309
27. Chentsov A. G., Morina S. I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
28. Bogachev V. I. *Slabaya skhodimost' mer* (Weak convergence of measures), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2016.
29. Neve Zh. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei* (Mathematical basis of probabilities theory), Moscow: Mir, 1969.
30. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977.
31. Gamkrelidze R. V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Tbilisi University, 1975.
32. Krasovskii N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968.
33. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988.
34. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Guaranteed optimiza-

tion in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
35. Chentsov A. G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York: Springer US, 1996.
36. Chentsov A. G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
37. Chentsov A. G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. https://doi.org/10.1134/S0081543817020109
38. Chentsov A. G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm110112
39. Chentsov A. G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 87–101 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140108
40. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968.
41. Kelley J. L. *General topology*, Springer, 1955.
42. Chentsov A. G. The mappings and ultrafilter-based transformations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314. http://mi.mathnet.ru/eng/timm888

Received 20.04.2019

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 74–101.