УДК 517.977.58

© *В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук*

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

Рассматривается нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении системы с целевым множеством в фазовом пространстве на этом промежутке времени. Предлагается схема приближенного вычисления множеств разрешимости задачи о сближении, основанная на использовании попятных пошаговых процедур.

Ключевые слова: управляемая система, движение, множество достижимости, интегральная воронка, управление, задача о сближении, множество разрешимости.

Введение

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении системы с целевым множеством в фазовом пространстве, в которой требуется обеспечить приведение движения системы на целевое множество на заданном промежутке времени. Эта задача является одной из актуальных в теории управления, она связана с такими известными задачами, как задача о сближении управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент времени и задача об оптимальном быстродействии [1–5]. Решение этой задачи можно искать на пути выделения в пространстве позиций системы так называемого множества разрешимости [4, 5] — множества всех тех позиций, из которых разрешима задача о сближении. Этот путь является весьма трудным, но тем не менее в случае его реализации в конкретной задаче о сближении он дает в распоряжение лица́, управляющего системой, богатую и полезную информацию о возможностях управляемой системы по отношению к достижению целевого множества. Выделение множества разрешимости задачи о сближении можно трактовать как выделение в пространстве позиций системы интегральной воронки управляемой системы, дуальной в определенном смысле к исходной управляемой системе [4, 11, 12]. Множество разрешимости в тех конкретных задачах о сближении, в которых удается его вычислить, можно использовать для построения программных управлений, решающих задачу о сближении [4, 5, 11, 15]. Однако хорошо известно, что это множество удается вычислить точно или дать его эффективное аналитическое описание лишь в относительно простых задачах о сближении — в тех задачах, в которых управляемая система и целевое множество являются достаточно простыми. Поэтому актуальна проблематика, относящаяся к приближенному конструированию множеств разрешимости, которая тесно связана с приближенным конструированием или оценкой трубок траекторий или интегральных воронок управляемых систем. Этой важной проблематике приближенного конструирования и оценивания трубок траекторий, интегральных воронок и множеств достижимости динамических систем посвящены усилия и работы многих математиков [2, 4, 6, 8–10].

В настоящей статье обсуждаются вопросы, связанные с разработкой схем и алгоритмов приближенного конструирования множества разрешимости рассматриваемой задачи о сближении. В основном обсуждаются вопросы, связанные с приближенным конструированием множества разрешимости. Обосновывается корректность схемы, в рамках которой приближенное конструирование множества разрешимости сводится к приближенному конструированию множеств разрешимости в ряде задач о сближении управляемой системы с целевым множеством в фиксированные моменты времени из некоторого конечного набора.

По своей тематике статья близка к [1–15].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14–01–00486) и Программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

§ 1. Задача о сближении на промежутке времени

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \tag{1.1}$$

здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, где

$$u \in P, \tag{1.2}$$

P — компакт в пространстве $\mathbb{R}^r$.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

У с л о в и е 1.1. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L = L(D) \in [0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

У с л о в и е 1.2. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma\,(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P. \tag{1.4}$$

У с л о в и е 1.3. Множество $F(t, x) = f(t, x, P) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$ выпукло при любых $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Учитывая условие 1.1, получаем, что для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset$ $\subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ функция

$$\omega^*(\delta) = \max\bigl\{\|f(t_*, x, u) - f(t^*, x, u)\| : (t_*, x, u) \text{ и } (t^*, x, u) \text{ из } D \times P, |t_* - t^*| \leqslant \delta\bigr\}, \quad \delta \in (0, \infty),$$

такова, что $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, а также

$$d\bigl(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)\bigr) \leqslant \omega^*(\delta) + L\|x_* - x^*\|, \tag{1.5}$$
$$(t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D, \quad |t_* - t^*| \leqslant \delta.$$

Здесь $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между компактами F_* и F^*.

Напомним некоторые известные определения тех понятий, которые используются в настоящей работе.

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Обозначим $X(t^*, t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^n$ ($x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$) — множество достижимости системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному условию $x(t_*) = x_*$; $X(t_*, x_*) = \bigcup_{t^* \in [t_0, \vartheta]} \bigl(t^*, X(t^*, t_*, x_*)\bigr)$ — интегральная воронка системы (1.1) с начальной позицией $(t_*, x_*) \in$ $\in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $(t^*, X^*) = \bigl\{(t^*, x^*) : x^* \in X^*\bigr\}$, $X^* \subset \mathbb{R}^n$.

При условиях, которыми стеснена система (1.1), множество достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$ системы (1.1) является в то же время и множеством достижимости дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \tag{1.6}$$

и значит $X(t^*, t_*, x_*)$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$.

Ниже мы используем тот факт, что $X(t^*, t_*, x_*)$ есть множество достижимости д.в. (1.6).

Учитывая замкнутость и ограниченность множества $X(t^*, t_*, x_*)$, получаем, что оно есть компакт в $\mathbb{R}^n$, к тому же при тех условиях, которые наложены на систему (1.1) (условие 1.1), интегральная воронка $X(t_*, x_*)$ — компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Полагаем, что наряду с системой (1.1) задан компакт $M \subset \mathbb{R}^n$, который мы рассматриваем как целевое множество для системы (1.1).

З а д а ч а 1.1. (задача о сближении на промежутке $[t_0, \vartheta]$)). Требуется выделить в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ множество W всех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых существует допустимое управление на $[t_0,\vartheta]$, порождающее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющее при некотором $t^* \in [t_0,\vartheta]$ включению $x(t^*) \in M$.

Множество W, следуя работам [4, 11, 12], будем называть множеством разрешимости в задаче 1.1.

Задача 1.1, на наш взгляд, сложнее в общем случае, чем задача о сближении системы (1.1) с M в фиксированные моменты времени, а также более актуальна в приложениях.

Один из возможных подходов к решению задачи 1.1 заключается в сведении ее к серии более простых задач о сближении системы (1.1) с M в фиксированные моменты времени. Этот подход представлен в настоящей работе.

А именно, для каждого $t^* \in [t_0,\vartheta]$ определяем (выделяем) множество разрешимости $W^{t^*} \subset [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ в задаче о сближении системы (1.1) с M в момент t^* (см., например, [11], с. 277). Согласно [11] W^{t^*} есть множество всех тех позиций $(t_*, x_*) \subset [t_0, t^*]\times\mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует допустимое управление на $[t_0, t^*]$, переводящее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) в момент t^* в множество $M : x(t^*) \in M$.

Очевидно, имеет место

$$W = \bigcup_{t^*\in[t_0,\vartheta]} W^{t^*}. \tag{1.7}$$

В соответствии с (1.7) вычисление (выделение) множества W в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ можно свести к выделению в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ множеств W^{t^*}, $t^* \in [t_0,\vartheta]$ и последующей за этим операции объединения этих множеств.

Имея в виду такую схему выделения множества W, направим наши рассуждения на разработку соответствующих алгоритмов приближенного вычисления множества разрешимости W.

Предлагаемые ниже конструкции связаны с дискретизацией промежутка $[t_0,\vartheta]$ и множеств достижимости в фазовом пространстве. Эти конструкции естественным образом имеют отправной точкой и в то же время ориентиром представление (1.7) множества W.

Итак, введем разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0,\vartheta]$, удовлетворяющее условию $t_{j+1} - t_j = \Delta = \frac{1}{N}(\vartheta - t_0)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим набор из $(N+1)$-го множества W^{t_j}, $j = \overline{0,N}$, отвечающий разбиению Γ, а также множество

$$\check{W}^{\Gamma} = \bigcup_{j=\overline{0,N}} W^{t_j} \subset [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Поскольку W^{t_j}, $t_j \in \Gamma$ непусты, то и $\check{W}^{\Gamma} \neq \varnothing$.

Отметим очевидные свойства, которыми обладает $\check{W}^{\Gamma}$.

Выполняется включение $\check{W}^{\Gamma} \subset W$.

Далее, пусть $(t_*, x_*) \in W$. Существует допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*,\vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$ на $[t_*,\vartheta]$, для которого $x^*(t^*) \in M$ в некоторый момент $t^* \in [t_*,\vartheta]$ (см. рис. 1).

Имеем, что для некоторого $j = \overline{0, N-1}$ выполняется включение $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$.

С этого момента считаем, что область D (см. условие 1.1) выбрана нами цилиндрической формы, то есть $D = [t_0,\vartheta]\times D^*$, и настолько большой, что в ней содержатся все элементы разрешающих конструкций задачи 1.1, возникающие в ходе наших построений (то есть различные движения, ломаные Эйлера, интегральные воронки, множества достижимости и всевозможные их аппроксимации). Здесь D^* — компакт в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что, принимая во внимание условие 1.2 и компактность целевого множества M, мы можем оценить, насколько велик должен быть компакт D^*.

Введем $K = \max(\|f(t,x,u)\| : (t,x,u) \in D\times P)$.

Возникшее выше движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$ системы (1.1) на $[t_*,\vartheta]$, порожденное управлением $u^*(t)$, $t \in [t_*,\vartheta]$, удовлетворяет соотношению

$$x^*(t) = x^*(t_j) + \int_{t_j}^{t} f\big(\xi, x^*(\xi), u^*(\xi)\big)d\xi, \quad t \in [t_j, t^*].$$

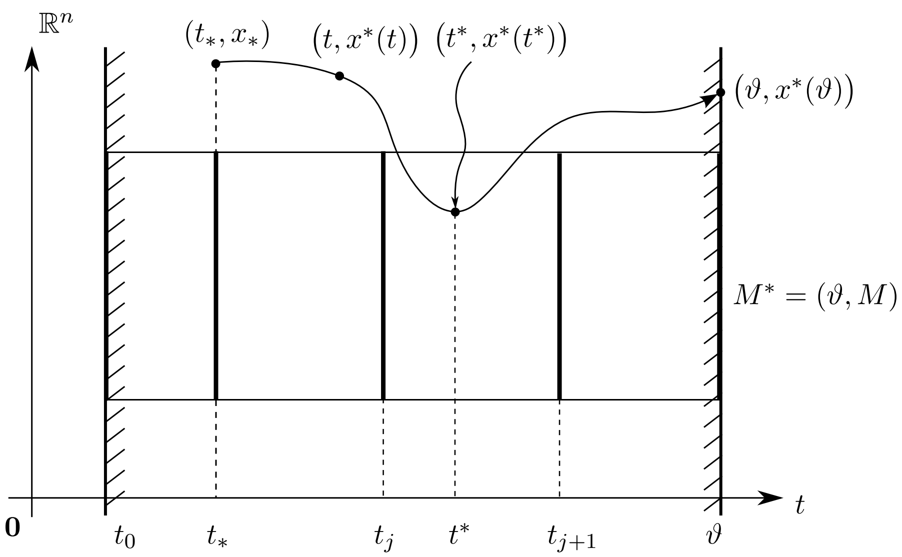

Рис. 1

Поскольку $(\xi, x^*(\xi)) \in D$, $\xi \in [t_0, \vartheta]$, то

$$\|f(\xi, x^*(\xi), u^*(\xi))\| \leqslant K, \quad \xi \in [t_*, t^*], \tag{1.9}$$

и значит имеет место

$$\|x^*(t) - x^*(t_j)\| \leqslant K(t - t_j) \leqslant K\Delta, \quad t \in [t_j, t^*].$$

В частности, справедлива оценка

$$\|x^*(t^*) - x^*(t_j)\| \leqslant K\Delta. \tag{1.10}$$

Из включения $\big(t^*, x^*(t^*)\big) \in (t^*, M)$ и оценки (1.10) следует

$$\big(t_j, x^*(t_j)\big) \in (t_j, M^\Delta), \text{ где } M^\Delta = M_{K\Delta}. \tag{1.11}$$

Здесь $M_{K\Delta}$ — $K\Delta$-окрестность множества M.

В результате получаем, что для произвольно выбранной позиции $(t_*, x_*) \in W$ найдется допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, \vartheta]$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $\big(t_j, x^*(t_j)\big) \in (t_j, M^\Delta)$ при некотором $t_j \in \Gamma$.

Введем в рассмотрение множество $\hat{W}^\Gamma \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ всех тех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, для которого $\big(t_j, x^*(t_j)\big) \in (t_j, M^\Delta)$ при некотором $t_j \in \Gamma$. Справедливо представление

$$\hat{W}^\Gamma = \bigcup_{t_j \in \Gamma} W^{t_j, \Delta}; \tag{1.12}$$

здесь $W^{t_j, \Delta} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — множество всех тех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, t_j]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, t_j]$, системы (1.1), удовлетворяющее включению $\big(t_j, x^*(t_j)\big) \in (t_j, M^\Delta)$.

Справедливо включение

$$\check{W}^\Gamma \subset W \subset \hat{W}^\Gamma. \tag{1.13}$$

При каждом $t_j \in \Gamma$ справедлива следующая оценка сверху:

$$d(\check{W}^\Gamma, \hat{W}^\Gamma) \leqslant \max_{t_j \in \Gamma} d(W^{t_j}, W^{t_j, \Delta}) \leqslant e^{L(t_j - t_0)} d(M, M^\Delta) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \tag{1.14}$$

Заметим, что в (1.14) для хаусдорфовых расстояний между $\check{W}^\Gamma$ и $\hat{W}^\Gamma$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и между M и M^Δ в $\mathbb{R}^n$ используем один и тот же символ $d(\cdot,\cdot)$.

Учитывая включение (1.13) и оценку (1.14), получаем

$$d(\check{W}^\Gamma, W) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}K\Delta. \tag{1.15}$$

Принимая во внимание (1.15), заключаем, что множество W можно вычислять приближенно как множество $\check{W}^\Gamma$ с точностью до величины $e^{L(\vartheta-t_0)}K\Delta$, где $\Delta = \frac{1}{N}(\vartheta - t_0)$.

Заметим, что в общем случае оценку (1.15) можно улучшить за счет дробления разбиения Γ, то есть за счет увеличения числа N.

В ряде случаев оценку (1.15) можно улучшить за счет подмены коэффициента K в ее правой части. Действительно, упомянутое выше движение $x^*(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$ удовлетворяет включению $\big(t, x^*(t)\big) \in (t, M^\Delta)$ при $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Может вполне оказаться, что число $K_* = \max\big\{\|f(t,x,u)\| \colon (t,x,u) \in (t, M^\Delta, P)\big\}$ значительно меньше числа K в оценке (1.9), мажорирующего величину $\|f(t,x,u)\|$ на достаточно большом множестве $D \times P \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$. Например, такая ситуация имеет место в задачах о сближении, в которых множество M близко к началу координат $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет равенству $f(t,\mathbf{0},u) = \mathbf{0}$, $t \in [t_0,\vartheta]$, $u \in P$. Это имеет место, например, для управляемых систем вида

$$f(t,x,u) = \varphi(t,x) + B(t,x)u, \tag{1.16}$$

где $\varphi(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $B(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ при $t \in [t_0,\vartheta]$ или $\varphi(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $d\big(P, \{\mathbf{0}\}\big)$ невелико при $t \in [t_0,\vartheta]$.

В этом случае число K в оценке (1.15) можно и даже целесообразно заменить меньшим числом K_*:

$$d(\check{W}^\Gamma, W) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}K_*\Delta. \tag{1.17}$$

Итак, мы установили, что задача приближенного вычисления множества W может быть сведена к задаче вычисления $N+1$ множеств W^{t_j}, $j = \overline{0,N}$, и последующего вычисления объединения этих множеств в единое множество $\check{W}^\Gamma$. Вычисление объединения имеет смысл проводить в тех случаях, когда мы хотим представить себе геометрическую структуру множества $\check{W}^\Gamma$ и тем самым — множества разрешимости W.

Учитывая, что вычисление множества $\check{W}^\Gamma$ сводится к вычислению множеств W^{t_j}, $t_j \in \Gamma$, сосредоточимся на описании конструкций, предназначенных для вычисления этих множеств.

Итак, выберем произвольный момент $t_j \in \Gamma$ и рассмотрим вопрос о приближенном вычислении множества $W^{t_j} \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$, ибо точно вычислить W^{t_j} мы не в состоянии.

Для нас представляет интерес управляемая система (1.1) на промежутке $[t_0, t_j]$. Введем наряду с «прямым» временем $t \in [t_0, t_j]$ так называемое обратное время $\tau = t_0 + t_j - t \in [t_0, t_j]$ (см. рис. 2).

$$t_0 \xrightarrow{\quad\quad t \quad\quad} t_j$$

$$t_j \xleftarrow{\quad\quad \tau \quad\quad} t_0$$

Рис. 2

Сопоставим системе (1.1), рассматриваемой на $[t_0, t_j]$, управляемую систему, отвечающую обратному времени τ:

$$\frac{dz}{d\tau} = f^{(j)}(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, t_j]; \tag{1.18}$$

здесь $f^{(j)}(\tau,z,v) = -f(t_0 + t_j - \tau, z, v), \quad (\tau,z,v) \in [t_0,t_j] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Символом $Z^{t_j}(t_0, z^{(0)}) \subset [t_0,t_j] \times \mathbb{R}^n$ обозначим интегральную воронку системы (1.18) с исходной позицией $(t_0, z^{(0)})$, а символом $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M)$ — интегральную воронку системы (1.18) с исходным множеством $(t_0, M) = \big\{(t_0, z^{(0)}) : z^{(0)} \in M\big\}$, то есть $Z^{t_j} = \bigcup\limits_{z^{(0)} \in M} Z^{t_j}(t_0, z^{(0)})$.

Полагаем $W^{t_j}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in W^{t_j}\}$, $t \in [t_0, t_j]$ и $Z^{t_j}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : (\tau, z) \in Z^{t_j}\}$, $\tau \in [t_0, t_j]$. Справедливо равенство

$$W^{t_j}(t) = Z^{t_j}(\tau) \subset \mathbb{R}^n, \quad t = t_0 + t_j - \tau, \quad \tau \in [t_0, t_j]. \tag{1.19}$$

Как известно, при условиях, наложенных на систему (1.1), интегральная воронка Z^{t_j}, а следовательно, W^{t_j} есть компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Согласно замечанию относительно области D и разрешающих конструкций задачи о сближении (см. с. 204) множества Z^{t_j} и W^{t_j} содержатся в $D = [t_0, \vartheta] \times D^*$.

Принимая во внимание (1.19), можем трактовать W^{t_j} в терминах обратного времени $\tau \in [t_0, t_j]$ как интегральную воронку $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M) = \bigcup\limits_{\tau \in [t_0, t_j]} \big(\tau, Z^{t_j}(\tau)\big)$ системы (1.18). Следовательно, задачу вычисления W^{t_j} можем и будем решать как задачу вычисления Z^{t_j}. Мы смогли бы решить эту задачу, если бы умели вычислять все множества $Z^{t_j}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_j]$. Однако в нетривиальных задачах о сближении такое вычисление невозможно хотя бы потому, что совокупность $Z^{t_j}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_j]$ представляет собой несчетное множество в comp$(\mathbb{R}^n)$ и к тому же эти множества имеют в представленных задачах геометрию, не позволяющую осуществить вычисление.

Несмотря на эти неудобные качества множества Z^{t_j}, мы все же сосредоточим внимание на некотором конечном наборе множеств из совокупности $Z^{t_j}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_j]$ и их приближенном (но не точном) вычислении.

Итак, на оси обратного времени τ вводим конечное разбиение $\Gamma^{t_j} = \{\tau_0^{(j)} = t_0, \tau_1^{(j)}, \ldots, \tau_i^{(j)}, \ldots, \tau_j^{(j)} = t_j\}$ промежутка $[t_0, t_j]$ с одинаковыми шагами $\Delta^{(j)} = \tau_{i+1}^{(j)} - \tau_i^{(j)} = \Delta$, $i = \overline{0, j-1}$, где диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma^{t_j})$ тот же самый, что и диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ.

Введем конечный набор $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)}) \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, j}$, сечений интегральной воронки $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M)$ системы (1.18), отвечающий разбиению Γ^{t_j}.

Сечения $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, зададим рекуррентными соотношениями

$$Z^{t_j}(\tau_i^{(j)}) = Z^{(j)}\big(\tau_i^{(j)}, \tau_{i-1}^{(j)}, Z^{t_j}(\tau_{i-1}^{(j)})\big), \quad i = \overline{1, j}, \tag{1.20}$$

$$Z^{t_j}(\tau_0^{(j)}) = M;$$

здесь обозначено $Z^{(j)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ — множество достижимости в момент $\tau^* \in [t_0, t_j]$ системы (1.18) с исходным множеством (τ_*, Z_*), где $\tau_* \in [t_0, \tau^*]$, $Z_* \subset \mathbb{R}^n$.

Заметим, что множество $Z^{(j)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ и интегральная воронка $Z^{(j)}(\tau_*, Z_*)$ системы (1.18) могут (и будут) рассматриваться нами соответственно как множество достижимости и интегральная воронка д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in F^{(j)}(\tau, z), \quad \tau \in [\tau_*, \tau^*]; \tag{1.21}$$

здесь $F^{(j)}(\tau, z) = \{f^{(j)}(\tau, z, v) : v \in P\}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.

В тех случаях, когда мы могли бы при малых $\Delta > 0$ вычислять точно правые части в (1.20), мы смогли бы, продвигаясь вперед по моментам $\tau_i^{(j)} \in \Gamma^{t_j}$, вычислить последовательно все $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{1, j}$.

Однако, не имея возможности точно вычислить множества $Z^{(j)}\big(\tau_i^{(j)}, \tau_{i-1}^{(j)}, Z^{t_j}(\tau_{i-1}^{(j)})\big)$, будем вместо множеств $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, конструировать их аппроксимации $\mathcal{Z}^{t_j, a}(\tau_i^{(j)})$ как конечные множества в $\mathbb{R}^n$.

Опишем кратко схему конструирования множеств $\mathcal{Z}^{t_j, a}(\tau_i^{(j)})$, описав предварительно схему конструирования некоторого набора множеств $Z^{t_j, a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$.

Множества $Z^{t_j, a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, предшествующие множествам $\mathcal{Z}^{t_j, a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, являются конечными множествами, но могут оказаться непригодными для эффективных вычислений из-за слишком большой мощности.

Итак, подобно тому, как это описано в [12], зададим отображение

$$(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) \subset \mathbb{R}^n,$$

где $t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant t_j$, $\delta = \tau^* - \tau_* > 0$, Z_* — конечное множество в $\mathbb{R}^n$:

$$Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*). \tag{1.22}$$

В (1.22) $Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*) = z_* + \delta F^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, и при этом отображение $(\tau_*, z_*) \mapsto$ $\mapsto F^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$ определяем как некоторую конечнозначную аппроксимацию многозначного отображения $(\tau_*, z_*) \mapsto F^{(j)}(\tau_*, z_*)$, $(\tau_*, z_*) \in D$, стесненную ограничением

$$\sup_{(\tau_*, z_*) \in D} d\big(F^{(\delta)}(\tau_*, z_*), F^{(j)}(\tau_*, z_*)\big) \leqslant \xi^*(\delta), \quad \delta \in (0, \infty), \tag{1.23}$$

где функция $\xi^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\xi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Заметим, что отображение $(\tau_*, z_*) \mapsto F^{(\delta)}(\tau_*, z_*)$ можно выбирать различными способами. Так, например, его можно задать равенством $F^{(\delta)}(\tau_*, z_*) = f^{(j)}(\tau_*, z_*, P^{(\delta)})$, где $P^{(\delta)} \subset \mathbb{R}^r$ — некоторое конечное множество, удовлетворяющее вместе с $F^{(j)}(\tau_*, z_*) = f^{(j)}(\tau_*, z_*, P)$ ограничениям (1.23).

Перед определением набора $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{1, j}$, зададим стартовое множество $Z^{t_j,a}(\tau_0^{(j)})$ для набора как некоторое конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее неравенству

$$d\big(Z^{t_j,a}(\tau_0^{(j)}), Z^{t_j}(\tau_0^{(j)})\big) = d\big(Z^{t_j,a}(\tau_0^{(j)}), M\big) \leqslant \sigma^*(\delta),$$

где функция $\sigma^*(\delta)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Множества $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{1, j}$, задаем рекуррентно:

$$Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}) = Z^{(\Delta)}\big(\tau_i^{(j)}, \tau_{i-1}^{(j)}, Z^{t_j,a}(\tau_{i-1}^{(j)})\big). \tag{1.24}$$

При условиях, наложенных на систему (1.1), и условиях, которым удовлетворяют множества $Z^{t_j,a}(\tau_i) \subset D^*$, $i = \overline{0, j}$, справедлива оценка

$$d\big(Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}), Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})\big) \leqslant e^{L(\tau_i^{(j)} - t_0)}\big\{\sigma^*(\Delta) + (\tau_i^{(j)} - t_0)(\xi^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta)\big\}, \tag{1.25}$$

аналогичная оценке из [12].

Из (1.25) и определения функций $\sigma^*(\delta)$, $\xi^*(\delta)$, $\omega^*(\delta)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое малое $\Delta^0 = \Delta^0(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) \leqslant \Delta^0$ и любых $t_j \in \Gamma$, $\tau_i^{(j)} \in \Gamma^{t_j}$ имеет место $d\big(Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}), Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})\big) \leqslant \varepsilon$.

Отсюда следует предельное соотношение

$$\max_{t_j \in \Gamma, \tau_i^{(j)} \in \Gamma^{t_j}} d\big(Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}), Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})\big) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0.$$

В этом смысле множества $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, представляют собой аппроксимации множеств $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, — сечений интегральной воронки Z^{t_j} системы (1.18), отвечающих моментам $\tau_i^{(j)} \in \Gamma^{t_j}$.

Для ясности отметим, что моменты $t_j \in \Gamma$, $\tau_i^{(j)} \in \Gamma^{t_j}$ в (1.25) в соответствующем предельном соотношении являются «плавающими», то есть меняющимися вместе с разбиением Γ, когда $\Delta(\Gamma) \downarrow 0$.

Такая схема конструирования аппроксимирующих множеств $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0, j}$, может привести к появлению в ходе вычислений множеств, мощность $m\big(Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})\big)$ которых настолько велика, что становятся невозможными дальнейшие эффективные вычисления в рекуррентной пошаговой схеме (1.24). В связи с этим возникает необходимость в уменьшении мощности $m\big(Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})\big)$, то есть возникает необходимость в прореживании множеств $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$.

В работе [12] в аналогичной ситуации описана процедура прореживания сечений интегральных воронок дифференциальных включений.

Эта процедура $\Phi \mapsto H^{(\Delta)}(\Phi)$, зависящая от параметра $\Delta = \Delta(\Gamma)$, определена для конечных множеств $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ и переводит их в множества $H^{(\Delta)}(\Phi) \subset \mathbb{R}^n$ мощности $m\big(H^{(\Delta)}(\Phi)\big)$, меньшей, чем $m(\Phi)$, при этом

$$d\big(\Phi, H^{(\Delta)}(\Phi)\big) \leqslant \chi(\Delta); \tag{1.26}$$

здесь функция $\chi(\Delta)$, $\delta \in (0,\infty)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\chi(\delta) = \delta\chi^*(\delta)$, где $\chi^*(\delta) \downarrow 0$, при $\delta \downarrow 0$.

Множества $\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $i = \overline{0,j}$, в $\mathbb{R}^n$ определяются равенствами

$$\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_0^{(j)}) = H^{(\Delta)}\big(Z^{t_j,a}(\tau_0^{(j)})\big), \tag{1.27}$$

$$\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}) = H^{(\Delta)}\Big(Z^{(\Delta)}\big(\tau_i^{(j)}, \tau_{i-1}^{(j)}, \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_{i-1}^{(j)})\big)\Big), \quad i = \overline{1,j},$$

и при достаточно малых Δ $(0 < \Delta < \frac{1}{L}\ln 2)$ удовлетворяют неравенству

$$d\big(\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_i^{(j)}), Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})\big) \leqslant \frac{2}{L} e^{L(\tau_i^{(j)} - t_0)} \chi^*(\Delta), \quad i = \overline{1,j}. \tag{1.28}$$

Введем множества $W^{t_j,a}(t_m) = Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$ и $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$, $t_m + \tau_i^{(j)} = t_0 + t_j$, $i = \overline{0,j}$. Множества $W^{t_j,a}(t_m)$ и $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$ являются аппроксимациями сечений $W^{t_j}(t_m)$ множества $W^{t_j} \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$, поскольку множества $Z^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$ и $\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau_i^{(j)})$ являются аппроксимациями сечений $Z^{t_j}(\tau_i^{(j)})$ интегральной воронки $Z^{t_j} \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$.

Оценки (1.25) и (1.28) запишем в виде

$$d\big(W^{t_j,a}(t_m), W^{t_j}(t_m)\big) \leqslant e^{L(t_j - t_m)} \big\{\sigma^*(\Delta) + (t_j - t_m)\big(\xi^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta\big)\big\}, \tag{1.29}$$

$$d\big(\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m), W^{t_j,a}(t_m)\big) \leqslant \frac{2}{L} e^{L(t_j - t_m)} \chi^*(\Delta), \quad m = \overline{0,j}. \tag{1.30}$$

Из оценок (1.29) и (1.30) получаем

$$d\big(\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m), W^{t_j}(t_m)\big) \leqslant e^{L(t_j - t_m)} \big\{\frac{2}{L}\chi^*(\Delta) + \sigma^*(\Delta) + (t_j - t_m)\big(\xi^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta\big)\big\}, \tag{1.31}$$

$$m = \overline{0,j}.$$

Оценку (1.31) огрубим, заменив экспоненту $e^{L(t_j - t_m)}$ на экспоненту $e^{L(\vartheta - t_0)}$, и получим

$$d\big(\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m), W^{t_j}(t_m)\big) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} \big\{\frac{2}{L}\chi^*(\Delta) + \sigma^*(\Delta) + (\vartheta - t_0)\big(\xi^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta\big)\big\}, \tag{1.32}$$

$$t_j \in \Gamma, \quad t_m \in \Gamma^{t_j}.$$

Отметим, что функция $S(\Delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}\big\{\frac{2}{L}\chi^*(\Delta) + \sigma^*(\Delta) + (\vartheta - t_0)\big(\xi^*(\Delta) + \omega^*(\Delta) + LK\Delta\big)\big\}$, $\Delta \in (0,\infty)$, монотонно убывает к нулю при $\Delta \downarrow 0$.

Отсюда следует предельное соотношение

$$\max_{t_j \in \Gamma, t_m \in \Gamma^{t_j}} d\Big(\big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big), \big(t_m, W^{t_j}(t_m)\big)\Big) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{1.33}$$

Из (1.33) следует предельное соотношение

$$\max_{t_j \in \Gamma} d\Bigg(\bigcup_{t_m \in \Gamma^{t_j}} \big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big), \bigcup_{t_m \in \Gamma^{t_j}} \big(t_m, W^{t_j}(t_m)\big)\Bigg) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{1.34}$$

Это предельное соотношение запишем в виде

$$\max_{t_j \in \Gamma} d\Bigg(\bigcup_{t_m \in \Gamma^{t_j}} \big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big), W^{t_j}\Bigg) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{1.35}$$

Полагаем $\mathcal{W}^{t_j,a} = \bigcup\limits_{t_m \in \Gamma^{t_j}} \big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big)$ и $\mathcal{W}^{\Gamma,a} = \bigcup\limits_{t_j \in \Gamma} \mathcal{W}^{t_j,a}$.

Заметим, что $\mathcal{W}^{t_j,a}$, $t_j \in \Gamma$ и $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$ — это те множества в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, которые реально мы можем вычислять. Предельное соотношение (1.35) запишем в виде

$$\max_{t_j \in \Gamma} d\left(\mathcal{W}^{t_j,a}, W^{t_j}\right) \to 0, \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0 \text{ при } t_j \in \Gamma.$$

Из этого предельного соотношения следует

$$d\big(\mathcal{W}^{\Gamma,a}, \check{W}^{\Gamma}\big) \to 0, \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{1.36}$$

Учитывая (1.36) и предельное соотношение $d(\check{W}^{\Gamma}, W) \to 0$ при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем

$$d\big(\mathcal{W}^{\Gamma,a}, W\big) \to 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{1.37}$$

Предельное соотношение (1.37) означает, что реально вычислимые множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$ являются аппроксимациями множества разрешимости W задачи 1.1 о сближении системы (1.1) с M.

Итак, мы привели схему приближенного вычисления множества разрешимости W задачи 1.1 о сближении системы (1.1) с M. В соответствии с этой схемой мы должны сначала осуществить приближенное вычисление $(N+1)$-го множества W^{t_j}, $j = \overline{0,N}$, в виде $(N+1)$-го множества $\mathcal{W}^{t_j,a}$ $j = \overline{0,N}$, а затем должны вычислить их объединение — множество $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$.

Справедливо следующее представление для $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$:

$$\mathcal{W}^{\Gamma,a} = \bigcup_{t_m \in \Gamma} \bigcup_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m} \big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big), \tag{1.38}$$

где $\bigcup\limits_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m} \big(t_m, \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big) = \big(t_m, \bigcup\limits_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m} \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)\big)$.

Согласно (1.38) приближенное вычисление множества разрешимости W может быть сведено к вычислению аппроксимаций $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m) = \bigcup\limits_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m} \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $m = \overline{0,N}$, сечений $W(t_m) \subset \mathbb{R}^n$ множества W.

Зафиксируем некоторый момент $t_m \in \Gamma$ и наметим схему вычисления множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$. Как видим, вычисление множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$ сводится к вычислению множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_j \in \Gamma,\ t_j \geqslant t_m$.

Таким образом, возникает вопрос о вычислении множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_j \in \Gamma$, $t_j \geqslant t_m$. В связи с этим зафиксируем также некоторый произвольный момент $t_j \in \Gamma$ и обсудим вопрос, относящийся к вычислению множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$, $t_\rho \in \Gamma^{t_j}$, в число которых входит и $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$.

Состоящие из конечного числа элементов множества $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$, $t_\rho \in \Gamma^{t_j}$, представляют собой аппроксимации множеств $W^{t_j}(t_\rho)$, $t_\rho \in \Gamma^{t_j}$, — сечений множества W^{t_j}.

Множества $W^{t_j}(t_\rho)$ и $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$, $t_\rho \in \Gamma^{t_j}$, связаны с множествами $Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho})$ и $\mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_{j-\rho})$ равенствами

$$W^{t_j}(t_\rho) = Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho}) \text{ и } \mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_{j-\rho}). \tag{1.39}$$

Множества $Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho})$, согласно их определению, являются сечениями интегральной воронки $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M) \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют соотношениям

$$Z^{t_j}(\tau^{(j)}_0) = M, \quad Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho}) = Z\big(\tau^{(j)}_{j-\rho}, \tau^{(j)}_{j-\rho-1}, Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho-1})\big), \quad \rho = j-1, j-2, \ldots, 0. \tag{1.40}$$

Рекуррентные соотношения (1.40) представим в виде схемы

$$Z^{t_j}(\tau^{(j)}_0) \to Z^{t_j}(\tau^{(j)}_1) \to \ldots \to Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho}) \to \ldots \to Z^{t_j}(\tau^{(j)}_j), \tag{1.41}$$

дающей некоторое общее представление о том, в какой последовательности вычисляются множества $Z^{t_j}(\tau^{(j)}_{j-\rho})$.

Этой пошаговой схеме (в терминах времени τ) отвечает следующая схема (в терминах времени t) пошаговых попятных вычислений множеств $W^{t_j}(t_\rho)$, $\rho = j-1, j-2, \ldots, 0$:

$$W^{t_j}(t_j) = M \to W^{t_j}(t_{j-1}) \to \ldots \to W^{t_j}(t_\rho) \to \ldots \to W^{t_j}(t_0). \tag{1.42}$$

Имея в виду это соответствие между схемами (1.41) и (1.42), мы смогли бы вычислить множество $W^{t_j}(t_m)$, применяя (1.40), если бы могли проводить точные вычисления согласно (1.40).

Однако, не имея возможности осуществить эти вычисления, мы вычисляем аппроксимациии множеств $W^{t_j}(t_\rho)$ — множества $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_{j-\rho})$, $\rho = j-1, j-2, \ldots, 0$, состоящие из конечного числа точек в $\mathbb{R}^n$.

Уточним, что поскольку нас интересует множество $W^{t_j}(t_m)$, то нам достаточно реализовать укороченную цепочку вычислений:

$$\mathcal{W}^{t_j,a}(t_j) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_0) \to \mathcal{W}^{t_j,a}(t_{j-1}) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_1) \to \mathcal{W}^{t_j,a}(t_{j-2}) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_2) \to \ldots \tag{1.43}$$

$$\to \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_{j-m}).$$

Итак, проведя для каждого $t_j \in \Gamma$, $t_j \geqslant t_m$, последовательное пошаговое вычисление $(j-m+1)$ множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$, $\rho = j, j-1, \ldots, m$, мы получаем в итоге множество $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m) = \mathcal{Z}^{t_j,a}(\tau^{(j)}_{j-m})$ (см. рис. 3).

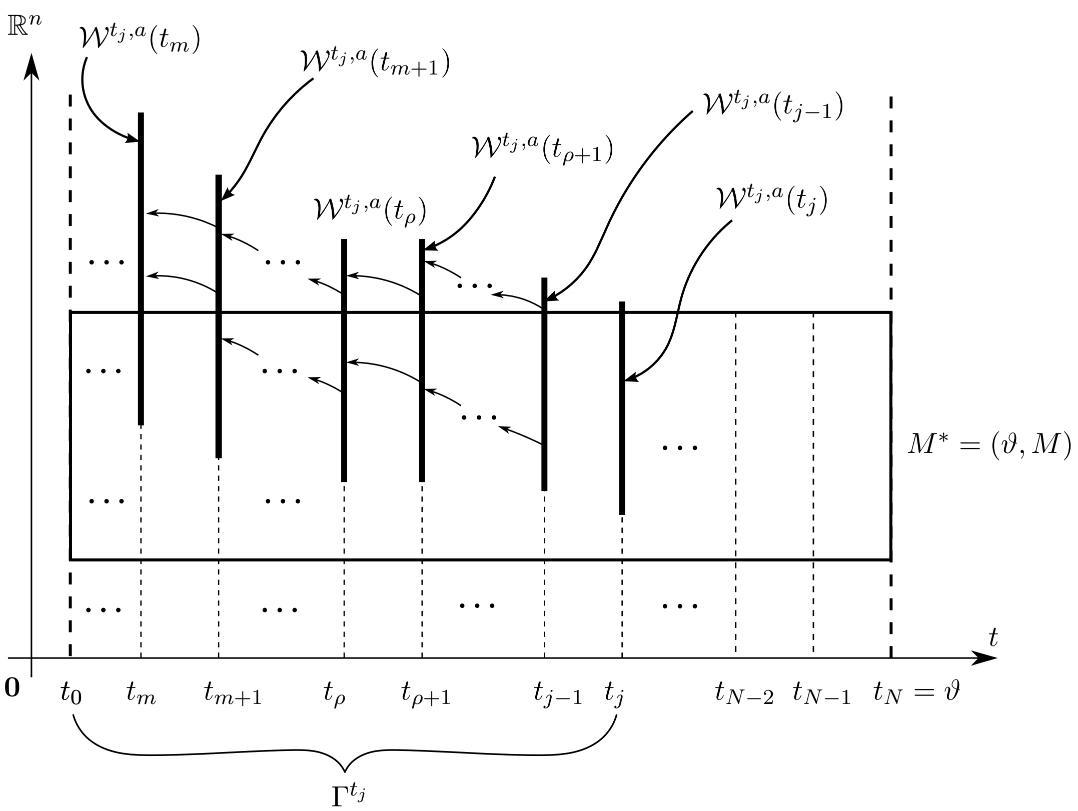

Рис. 3

На рисунке представлена лишь грубая схема, отражающая процедуру вычисления множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$, $\rho = j, j-1, \ldots, m$. На этом рисунке множества $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$ представлены в виде вертикальных, меняющихся от момента t_ρ к моменту $t_{\rho+1}$ отрезков, хотя на самом деле множества $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_\rho)$ — конечные множества в $\mathbb{R}^n$. В виде прямоугольника представлено цилиндрическое множество $[t_0, \vartheta] \times M \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, где вертикальные отрезки в прямоугольнике представляют множества (t_ρ, M), отвечающие моментам $t_\rho \in \Gamma$.

Перебирая моменты $t_j \in \Gamma$, $t_j \geqslant t_m$, мы вычислим $\mathcal{W}^{t_m,a}(t_m)$, $\mathcal{W}^{t_{m+1},a}(t_m), \ldots, \mathcal{W}^{t_N,a}(t_m)$. Вместе с тем считаем, что вычислено и множество $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$.

Проведя вычисление всех конечных множеств $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$, $m = N, N-1, \ldots, 0$, мы считаем, что вместе с тем вычислено множество $\mathcal{W}^{\Gamma,a} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — аппроксимация множества разрешимости W.

Иногда с целью прояснения геометрической структуры множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ полезно графически представлять его сечения $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. При размерностях $n = 2, 3$ это осуществимо, однако при размерностях $n > 3$ можно прибегнуть к изучению геометрии множеств $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, с помощью проектирования этих множеств на подпространства пространства $\mathbb{R}^n$ меньшей размерности. Например, множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_j)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$ мы можем изучить, проектируя их на всевозможные подпространства размерности 3.

Итак, мы представили схему вычисления множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$, аппроксимирующего множество разрешимости W в задаче 1.1. Вычисление множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$ свелось к вычислению его сечений $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m) = \bigcup\limits_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m} \mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_m \in \Gamma$, то есть к вычислению множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_j \in \Gamma$, $t_j \geqslant t_m$.

Покажем, как рационально реализовать вычисление множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_j \in \Gamma$. Эти рациональные вычисления мы будем проводить в рамках следующей попятной пошаговой схемы:

$$\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_0) \leftarrow \mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_1) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_N). \tag{1.44}$$

Опишем подробнее одно звено этой схемы, соответствующее переходу от момента t_m к моменту t_{m-1}, то есть звено

$$\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_{m-1}) \leftarrow \mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m).$$

Считаем, что в процессе реализации схемы (1.44) множество $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$ уже вычислено, то есть вычислены множества

$$\mathcal{W}^{t_m,a}(t_m), \mathcal{W}^{t_{m+1},a}(t_m), \ldots, \mathcal{W}^{t_{N-1},a}(t_m), \mathcal{W}^{t_N,a}(t_m), \tag{1.45}$$

из которых составлено $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$.

Справедливо представление $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_{m-1}) = \bigcup\limits_{t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_{m-1}} \mathcal{W}^{t_j,a}(t_{m-1})$.

Следовательно, для вычисления множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_{m-1})$ необходимо сначала при каждом $t_j \in \Gamma$, $t_j \geqslant t_m$, вычислить по множеству $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$ множество $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_{m-1})$, и тогда мы получим множества $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_{m-1})$, $t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m$. Далее, в дополнение к этим множествам следует вычислить множество $\mathcal{W}^{t_{m-1},a}(t_{m-1})$. Вместе с тем мы получаем полный набор множеств $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_{m-1})$, $t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_{m-1}$, составляющих $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_{m-1})$.

Приведенная здесь попятная пошаговая процедура вычисления множеств $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$, $m = N$, $N-1, \ldots, 0$, — сечений множества $\mathcal{W}^{\Gamma,a}$ — является, на наш взгляд, в общем случае, не учитывающем специфики управляемой системы (1.1) и целевого множества M, весьма рациональной.

Однако в некоторых задачах о сближении эта схема будет приводить к излишним вычислениям. Эту ситуацию удобнее всего пояснить, перейдя от множеств $\mathcal{W}^{\Gamma,a}(t_m)$ и $\mathcal{W}^{t_j,a}(t_m)$, $t_j \in \Gamma, t_j \geqslant t_m$, к множествам $\check{W}^{\Gamma}$ и $W^{t_j}(t_m)$. Так, например, может оказаться, что при некоторых $t_m \in \Gamma$ и $t_{j_1} \in \Gamma$, $t_{j_2} \in \Gamma$ $(t_{j_1} > t_m, t_{j_2} > t_m)$ множества $W^{t_{j_1}}(t_m)$ и $W^{t_{j_2}}(t_m)$ имеют непустое пересечение $W^{t_{j_1}}(t_m) \bigcap W^{t_{j_2}}(t_m)$, мало отличающееся от одного из них, допустим, от множества $W^{t_{j_1}}(t_m)$.

Тогда получается, что при конструировании множеств

$$W^{t_{j_1}}(t_{m-1}) = Z^{t_{j_1}}(\tau^{(j_1)}_{j_1-m+1}) = Z\big(\tau^{(j_1)}_{j_1-m+1}, \tau^{(j_1)}_{j_1-m}, Z^{t_{j_1}}(\tau^{(j_1)}_{j_1-m})\big) = Z\big(\tau^{(j_1)}_{j_1-m+1}, \tau^{(j_1)}_{j_1-m}, W^{t_{j_1}}(t_m)\big),$$

$$W^{t_{j_2}}(t_{m-1}) = Z^{t_{j_2}}(\tau^{(j_2)}_{j_2-m+1}) = Z\big(\tau^{(j_2)}_{j_2-m+1}, \tau^{(j_2)}_{j_2-m}, Z^{t_{j_2}}(\tau^{(j_2)}_{j_2-m})\big) = Z\big(\tau^{(j_2)}_{j_2-m+1}, \tau^{(j_2)}_{j_2-m}, W^{t_{j_2}}(t_m)\big)$$

(при условии, что мы действительно можем конструировать (то есть вычислять) эти множества) мы проделываем лишнюю работу, учитывая точки $x(t_m) \in W^{t_{j_1}}(t_m) \bigcap W^{t_{j_2}}(t_m)$ дважды (см. рис. 4).

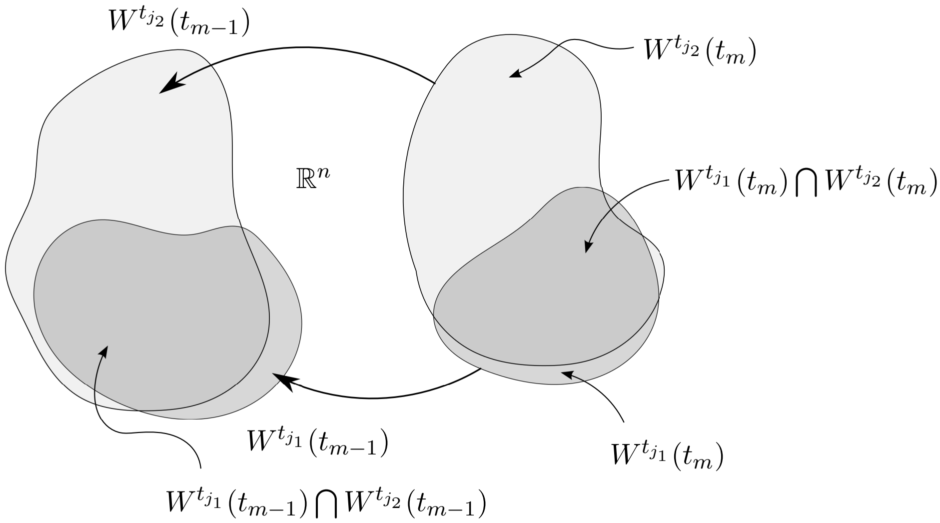

Рис. 4

Если бы мы действительно могли выделить такие ситуации (см. рис. 4), то могли бы существенно сократить объем вычислений.

К числу рассматриваемых ситуаций относится следующая ситуация: при любых t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ и любых $t \in [t_0, t_*]$ имеет место $W^{t_*}(t) \subset W^{t^*}(t)$. В этом случае имеет место $W^{t_*} \subset W^{t^*}$ и, следовательно, справедливы представления

$$W = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} W^t = W^{\vartheta}, \quad \check{W}^{\Gamma} = \bigcup_{t_j \in \Gamma} W^{t_j} = W^{t_N}. \tag{1.46}$$

Фактически в рассматриваемом случае множество разрешимости W в задаче 1.1 есть множество разрешимости в задаче о сближении управляемой системы (1.1) с M в конечный момент ϑ из промежутка $[t_0, \vartheta]$.

Равенства (1.46) означают, что множества W и $\check{W}^{\Gamma}$ можно приближенно вычислить как $W^{\vartheta} = W^{t_N}$.

Такая ситуация складывается, например, в тех задачах о сближении, в которых система (1.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) = \varphi(t, x) + B(t, x)u, \tag{1.47}$$

где $\varphi(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, а $B(t, x)$ — $(n \times r)$-матрица-функция, такие, что

$$\mathbf{0} \in F(t, x) = \varphi(t, x) + B(t, x)P, \quad (t, x) \in D. \tag{1.48}$$

Условие (1.48) выполняется, например, в случае, когда множество P — n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\mu \in (0, \infty)$ с центром в $\mathbf{0}$, а $(n \times n)$-матрица-функция $B(t, x)$ — неособенная при $(t, x) \in D$ и $\|B(t, x)^{-1}\varphi(t, x)\| \leqslant \mu$.

В случае системы (1.1) вида (1.47), (1.48) среди движений $x(t)$, $x(t^\natural) = x^\natural$, $t \in [t^\natural, \vartheta]$ системы (1.1), порожденных допустимыми управлениями, при любых $(t^\natural, x^\natural) \in D$ содержится и стационарное движение $x(t) = x^\natural$, $t \in [t^\natural, \vartheta]$. Отсюда вытекает, что если какая-либо позиция $(t^\natural, x^\natural)$ $(t_0 \leqslant t^\natural \leqslant t_*)$ при любых t_*, t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ удовлетворяет включению $(t^\natural, x^\natural) \in W^{t_*}$, то $(t^\natural, x^\natural) \in W^{t^*}$. Таким образом, в случае системы (1.1) вида (1.47), (1.48) имеет место включение $W^{t_*} \subset W^{t^*}$ при любых t_*, t^*, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$.

Для систем (1.47), (1.48) существенно упрощается приближенное вычисление множества разрешимости W. Оно сводится, как уже упоминалось, к приближенному вычислению множества W^{ϑ}, то есть к вычислению множеств $W^{t_N, a}(t_\rho) = Z^{t_N, a}(\tau^{(N)}_{N-\rho})$, $\rho = N, N-1, \ldots, 0$.

Заключение

В настоящей работе изложена схема приближенного вычисления множества разрешимости в задаче о сближении нелинейной управляемой системы с целевым множеством на конечном промежутке времени. Проведен анализ того, в каких задачах о сближении может быть сокращен объем вычислений, проводимых в рамках предложенной схемы. Схема составляет основу для конструирования разрешающих программных управлений из тех исходных позиций управляемой системы, которые содержатся в множестве, аппроксимирующем множество разрешимости задачи о сближении.

Авторы благодарят редакцию журнала за представленную возможность опубликовать статью в выпуске журнала, посвященном памяти замечательных российских математиков — профессоров Н.В. Азбелева и Е.Л. Тонкова. Для нас Н.В. Азбелев и Е.Л. Тонков — достойный пример служения науке. Один из авторов статьи, В.Н. Ушаков, был связан с Е.Л. Тонковым многолетними профессиональными отношениями и относился к Евгению Леонидовичу как к старшему товарищу, у которого можно было многому научиться. В.Н. Ушаков глубоко благодарен Евгению Леонидовичу и его семье за неизменные теплые дружеские отношения.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Куржанский А.Б. Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1047–1050.
3. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 3–13.
4. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
7. Тонков Е.Л., Панасенко Е.А. Инвариантные и устойчиво-инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 268. С. 202–221.
8. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 179–187.
9. Гусев М.И. Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
10. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 263–269.
11. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 275–284.
12. Ушаков А.В. Об одном варианте построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 94–107.
13. Панасюк А.И. Уравнения динамики множеств достижимости в задачах оптимизации и управления в условиях неопределенности // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 596–604.
14. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды математического института им. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
15. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 296–222.

Поступила в редакцию 13.10.2015

Ушаков Владимир Николаевич, член-корр. РАН, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Матвийчук Александр Ростиславович, к. ф.-м. н., заведующий отделом, отдел системного обеспечения, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: matv@uran.ru

V. N. Ushakov, A. R. Matviychuk

To solution of control problems of nonlinear systems on a finite time interval

Keywords: control system, movement, reachability set, integral funnel, control, problem of rapprochement, solvability set.

MSC: 93B03, 93C10

A nonlinear controlled system on a finite time interval is under consideration. The problem of rapprochement to a target set in the phase space in this period of time is studied. The scheme of approximate calculation of solvability sets based on the use of retrograde step by step procedures is proposed.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.
2. Kurzhanskii A.B. An analytical description of the beam of enduring trajectories of a differential system, *Dokl. AN SSSR,* 1986, vol. 287, no. 5, pp. 1047–1050 (in Russian).
3. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Differential-difference game of encounter with a functional target set, *J. Appl. Math. Mech.,* 1973, vol. 37, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1016/0021-8928(73)90128-7
4. Kurzhanskii A.B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009, 756 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
6. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: metod ellipsoidov* (Evaluation of the phase state of dynamical systems: the ellipsoid method), Moscow: Nauka, 1988, 319 p.
7. Tonkov E.L., Panasenko E.A. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, pp. 194–212. DOI: 10.1134/S0081543808030164
8. Guseinov Kh.G., Moiseev A.N., Ushakov V.N. The approximation of reachable domains of control systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 169–175. DOI: 10.1016/S0021-8928(98)00022-7
9. Gusev M.I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 134–146. DOI: 10.1134/S008154381006012X
10. Filippova T.F. Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 95–102. DOI: 10.1134/S008154381006009X
11. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Parshikov G.V. A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the feasibility set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 135–144. DOI: 10.1134/S0081543814020126
12. Ushakov A.V. On one version of approximate permitting control calculation in a problem of approaching, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 94–107.
13. Panasyuk A.I. Equations of the dynamics of sets of reachability in problems of optimization and control under conditions of uncertainty, *J. Appl. Math. Mech.*, 1986, vol. 50, no. 4, pp. 405–415. DOI: 10.1016/0021-8928(86)90001-8
14. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1986, vol. 169, pp. 199–259.
15. Taras'ev A.M., Ushakov V.N., Khripunov A.P. On a computational algorithm for solving game control problems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 167–172. DOI: 10.1016/0021-8928(87)90059-1

Received 13.10.2015

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Department of Dynamical Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Matviychuk Aleksandr Rostislavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: matv@uran.ru